【全国名校一线特高级教师联合编写】

GAOKAOGELEIXINTIXINGJIEXI
高考各类新题型解析

［杨霞芬 杨林仙］总主编

高考各类新题型解析

高考夺魁很轻松，
清华北大不是梦！

一网打尽 —— 囊括全国各大省市高考试题

三箭齐发 —— 考点尽收 重点突破 难点详解

掌握趋势 —— 紧扣新大纲 整合新课程 解读新趋势

冲刺高考 —— 科学设计 讲练结合 事半功倍 轻松夺魁

数学（理科）

考试用书

武秀琴 主编

全国百佳图书出版单位 百佳 中华人民共和国新闻出版总署评定

中国时代经济出版社

【全国名校一线特高级教师联合编写】

GAOKAOGELEIXINTIXINGJIEXI

高考各类新题型解析

高考各类新题型解析

数学（理科）

考试用书

主编：武秀琴

中国时代经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

高考各类新题型解析·数学（理科）/ 武秀琴主编．—北京：中国时代经济出版社，2010.1

ISBN 978-7-80221-904-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．武…　Ⅲ．数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 096643 号

高考各类新题型解析·数学（理科）

武秀琴　主编

出版者	中国时代经济出版社
地　址	北京市西城区车公庄大街乙 5 号 鸿儒大厦 B 座
邮政编码	100044
电　话	（010）68320825（发行部） （010）88361317（邮购）
传　真	（010）68320634
发　行	各地新华书店
印　刷	北京鑫海达印刷有限公司
开　本	880×1230　1/16
版　次	2010 年 1 月第 1 版
印　次	2010 年 1 月第 1 次印刷
印　张	27
字　数	750 千字
定　价	43.00 元
书　号	ISBN 978-7-80221-904-5

编写说明

新课程理念冲击并改变着我们的固有观念，新高考需要我们运用新的思维方法去探索，重新审视高考命题的导向。要想在高考中取得理想的成绩，需要具备扎实的知识、灵活的思维和准确的表达等素养。素养的形成源自艰苦努力的积累。在高考的考场上，我们要靠智慧来答题，而不是记忆。智慧要在不懈的实践和不懈的反思中形成。基于上述理念，我们特请国内重点中学长期从事高三教学工作特高级教师编写了本套丛书。

考点扫描：紧扣新教材，落实新大纲要求，梳理知识脉络，展示知识要点，把握准确的高考信息。

应试对策：针对各专题的重点、难点讲解复习的方法和策略以及基本的解题思路和技巧，使学生掌握高考命题的规律、命题手法和解决问题的思维规律。

高考题解：试题从近五年全国各类高考题中遴选，题目经典新颖，内容丰富翔实。注重基础知识的同时，突出培养学生灵活解决问题的综合能力，力求解题效益的最大化。

跟踪训练：依据新课程要求，从近五年高考题中选题，重点选取考生易出错的知识点的题目进行针对训练，使学生体验高考，探索解题规律。

本书最后还配有三套学科内综合的模拟题，帮助考生进行高考前的热身，帮助考生在最后的复习中拾遗补阙，争取最大的收益。

编者

. Contents 目录 .

专题一 集 合

考点扫描

考点1 集合的概念

①集合是具有某一共同属性的一组对象的全体，其中的每一个对象都叫做集合的元素.

②集合中的元素具有确定性、无序性和互异性.

③集合的表示方法，常用的有列举法和描述法和图示法.

④集合的分类：按照集合中元素的多少，集合分为有限集、无限集、空集.

⑤常用数集及其记法：非负整数集(自然数集)：N；正整数集：N^* 或 N^+；整数集：Z；有理数集：Q；实数集：R.

考点2 集合与集合的关系

①子集：对于集合 A、B，如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，那么集合 A 就叫做集合 B 的子集，记作：$A\subseteq B$ 或 $A\subset B$

②真子集：如果集合 A 是 B 的子集，而且集合 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 就叫做 B 的真子集，记作：$A\subsetneqq B$

③集合相等：如果集合 A 是集合 B 的子集，而且集合 B 是集合 A 的子集，那么就说集合 A、B 相等，记作 $A=B$.

④子集的性质

1)$A\subseteq A$；2)$\Phi\subseteq A$，特别地 $\Phi\subseteq\Phi$；3)若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

4)若集合 A 是 n 个元素的集合，则集合 A 有 2^n 个子集(其中 2^{n-1}个真子集)；

考点3 交集与并集

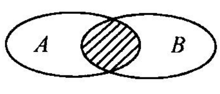


图 1—1

(1)定义：一般地，由属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的交集. 即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$. 如图 1—1中的阴影部分.

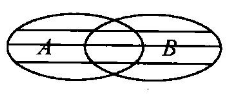


图 1—2

(2)定义：一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集. 即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$. 如图 1—2 中的阴影部分.

(3)简单性质：

1)$A\cap A=A$，$A\cap\Phi=\Phi$，$A\cap B=B\cap A$；

2)$A\cup A=A$，$A\cup\Phi=A$，$A\cup B=B\cup A$；

3)$(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B)$；$(A\cap B)\subseteq B\subseteq(A\cup B)$；

4)$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$；$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$；

考点4 全集与补集

(1)包含了所要研究的各个集合的全部元素的集合称为全集，记作 U；

(2)若 S 是一个集合，$A\subseteq S$，则 $C_SA=\{x|x\in S$ 且 $x\notin A\}$称 S 中子集 A 的补集；

(3)简单性质：1)$C_S(C_SA)=A$；2)$C_SS=\Phi$，$C_S\Phi=S$；3)$C_S(A\cap B)=(C_SA)\cup(C_SB)$；4)$C_S(A\cup B)=(C_SA)\cap(C_SB)$

应试策略

有关集合的高考试题，考查重点是集合与集合之间的关系，近年试题加强了对集合的计算化简的考查，并向无限集发展，考查抽象思维能力，在解决这些问题时，要注意利用几何的直观性，注意运用 Venn 图解题方法的训练，注意利用特殊值法解题，加强集合表示方法的转换和化简的训练. 考试形式多以一道选择题为主，分值 5 分. 建议在复习时要注意集合的基本概念、运算和工具作用.

高考题解

例1 (1)(2009 全国Ⅰ)设集合 $A=\{4,5,7,9\}$，$B=\{3,4,7,9\}$，全集 $U=A\cup B$，则集合 $C_U(A\cap B)$中的元素共有 ( )

A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

(2)(2008 山东)满足 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$的集合 M 的个数是 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(3)(2007 湖南)设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$，S_1，S_2，…，S_k 都是M 的含两个元素的子集，且满足：对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$，$S_j=\{a_j,b_j\}$ $(i\neq j$，i、$j\in\{1,2,3,\cdots,k\})$，都有 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\}$($\min\{x,y\}$表示两个数 x，y 中的较小者)，则 k 的最大值是 ( )

A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

(1)解析：全集 $U=A\cup B=\{3,4,5,7,8,9\}$，$A\cap B=\{4,7,9\}$，$\therefore C_U(A\cap B)=\{3,5,8\}$.

【答案】 A

【点评】 集合中的元素具有确定性、无序性、互异性.

(2)解析:本小题主要考查集合子集的概念及交集运算.集合 M 中必含有 a_1,a_2,则 $M=\{a_1,a_2\}$ 或 $M=\{a_1,a_2,a_4\}$.

【答案】 B.

【点评】 该题考查集合子集个数公式.如果一个集合有 n 个元素,那么它的子集有 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\dots C_n^n=2^n$.想一想:若 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4,\dots,a_8\}$,而其他条件不变呢?(提示:相当于一个含有 6 个元素的集合的子集的个数).

(3)解析:含 2 个元素的子集有 15 个,但$\{1,2\}$、$\{2,4\}$、$\{3,6\}$只能取一个;$\{1,3\}$、$\{2,6\}$只能取一个;$\{2,3\}$、$\{4,6\}$只能取一个,故满足条件的两个元素的集合有 11 个.

【答案】 B

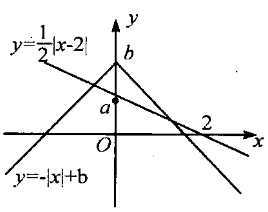
例 2 (1)(2007 北京)已知集合 $A=\{x\mid |x-a|\leqslant 1\}$,$B=\{x\mid x^2-5x+4\geqslant 0\}$.若 $A\cap B=\varnothing$,则实数 a 的取值范围是________.

(2)(2007 湖南)设集合 $A=\{(x,y)\mid y\geqslant\frac{1}{2}|x-2|\}$,$B=\{(x,y)\mid y\leqslant -|x|+b\}$,$A\cap B\neq\varnothing$.则 b 的取值范围是______;若 $(x,y)\in A\cap B$,且 $x+2y$ 的最大值为 9,则 b 的值是______.

(1)解析:集合 $A=\{x\mid |x-a|\leqslant 1\}=\{x\mid a-1\leqslant x\leqslant a+1\}$,$B=\{x\mid x^2-5x+4\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 4$ 或 $x\leqslant 1\}$.又 $A\cap B=\varnothing$,$\therefore\begin{cases}a+1<4\\a-1>1\end{cases}$,解得 $2<a<3$,实数 a 的取值范围是 $(2,3)$.

【答案】 $(2,3)$

(2)解析:如图 1-3 所示,由图象可知 b 的取值范围是$[1+\infty)$.



若 $(x,y)\in A\cap B$,令 $t=x+2y$,则在 $(0,b)$ 处取得最大值,所以 $0+2=9$,所以 $b=\frac{9}{2}$.

【答案】 $[1+\infty)$;$\frac{9}{2}$

例 3 (2007 北京)已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k\geqslant 2)$,其中 $a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,k)$,由 A 中的元素构成两个相应的集合:$S=\{(a,b)\mid a\in A,b\in A,a+b\in A\}$,$T=\{(a,b)\mid a\in A,b\in A,a-b\in A\}$.其中 (a,b) 是有序数对,集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n.若对于任意的 $a\in A$,总有 $-a\notin A$,则称集合 A 具有性质 P.

(Ⅰ)检验集合$\{0,1,2,3\}$与$\{-1,2,3\}$是否具有性质 P 并对其中具有性质 P 的集合,写出相应的集合 S 和 T;

(Ⅱ)对任何具有性质 P 的集合 A,证明:$n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$;

(Ⅲ)判断 m 和 n 的大小关系,并证明你的结论.

(Ⅰ)解:集合$\{0,1,2,3\}$不具有性质 P.

集合$\{-1,2,3\}$具有性质 P,其相应的集合 S 和 T 是 $S=\{(-1,3)(3,-1)\}$,$T=\{(2,-1)(2,3)\}$.

(Ⅱ)证明:首先,由 A 中元素构成的有序数对 (a_i,a_j) 共有 k^2 个.

$\because 0\notin A$,$\therefore(a_i,a_i)\notin T(i=1,2,\cdots,k)$;

$\because$ 当 $a\in A$ 时,$-a\notin A$ 时,$-a\notin A$,$\therefore$ 当 $(a_i,a_j)\in T$ 时,$(a_j,a_i)\notin T(i,j=1,2,\cdots,k)$.

$\therefore$ 集合 T 中元素的个数最多为 $\frac{1}{2}(k^2-k)=\frac{k(k-1)}{2}$,即 $n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$.

(Ⅲ)解:$m=n$,证明如下:

(1)对于 $(a,b)\in S$,根据定义,$a\in A,b\in A$,且 $a+b\in A$,从而 $(a+b,b)\in T$.

如果 (a,b) 与 (c,d) 是 S 的不同元素,那么 $a=c$ 与 $b=d$ 中至少有一个不成立,从而 $a+b=c+d$ 与 $b=d$ 中也至少有一个不成立.

$\therefore(a+b,b)$ 与 $(c+d,d)$ 也是 T 的不同元素.

可见,S 中元素的个数不多于 T 中元素的个数,即 $m\leqslant n$,

(2)对于 $(a,b)\in T$,根据定义,$a\in A,b\in A$,且 $a-b\in A$,从而 $(a-b,b)\in S$.如果 (a,b) 与 (c,d) 是 T 的不同元素,那么 $a=c$ 与 $b=d$ 中至少有一个不成立,从而 $a-b=c-d$ 与 $b=d$ 中也不至少有一个不成立,故 $(a-b,b)$ 与 $(c-d,d)$ 也是 S 的不同元素.

可见,T 中元素的个数不多于 S 中元素的个数,即 $n\leqslant m$,由(1)(2)可知,$m=n$.

例 4 (2009 福建)从集合$\{1,2,3,4,5\}$的所有非空子集中,等可能地取出一个.

(Ⅰ)记性质 r:集合中的所有元素之和为 10,求所取出的非空子集满足性质 r 的概率;

(Ⅱ)记所取出的非空子集的元素个数为 ξ,求 ξ 的分布列和数学期望 $E\xi$.

解:(Ⅰ)记"所取出的非空子集满足性质 r"为事件 A.

基本事件总数 $n=C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=31$;

事件 A 包含的基本事件是$\{1,4,5\}$,$\{2,3,5\}$,$\{1,2,3,4\}$;

事件 A 包含的基本事件数 $m=3$.

$\therefore P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{31}$.

(Ⅱ)依题意,ξ 的所有可能取值为 1,2,3,4,5.

又 $P(\xi=1)=\frac{C_5^1}{31}=\frac{5}{31}$,$P(\xi=2)=\frac{C_5^2}{31}=\frac{10}{31}$,

$P(\xi=3)=\frac{C_5^3}{31}=\frac{10}{31}$,$P(\xi=4)=\frac{C_5^4}{31}=\frac{5}{31}$,

$P(\xi=5)=\frac{C_5^5}{31}=\frac{1}{31}$,

故 ξ 的分布列为:

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{5}{31}$	$\frac{10}{31}$	$\frac{10}{31}$	$\frac{5}{31}$	$\frac{1}{31}$

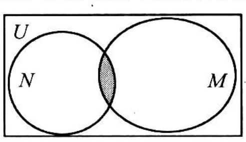
$\therefore E\xi=1\times\frac{5}{31}+2\times\frac{10}{31}+3\times\frac{10}{31}+4\times\frac{5}{31}+5\times\frac{1}{31}=\frac{80}{31}$.

【点评】 本小题主要考查排列与组合、概率与统计等基础知识，考查数据处理能力、运算求解能力，考查分类与整合思想、化归与转化思想.

跟踪训练

一、选择题

1.(2009广东)已知全集$U=R$,集合$M=\{x|-2\leqslant x-1\leqslant 2\}$和$N=\{x|x=2k-1,k=1,2,\cdots\}$的关系的韦恩(Venn)图如图1所示,则阴影部分所示的集合的元素共有　(　　)



A. 3个　　B. 2个　　C. 1个　　D. 无穷多个

2.(2009全国Ⅱ)设集合$A=\{x|x>3\}$,$B=\left\{x\left|\frac{x-1}{x-4}<0\right.\right\}$,则$A\cap B=$　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $(3,4)$　　C. $(-2,1)$　　D. $(4,+\infty)$

3.(2009浙江)设$U=\boldsymbol{R}$,$A=\{x|x>0\}$,$B=\{x|x>1\}$,则$A\cap C_UB=$　(　　)

A. $\{x|0\leqslant x<1\}$　　B. $\{x|0<x\leqslant 1\}$

C. $\{x|x<0\}$　　D. $\{x|x>1\}$

4.(2008全国Ⅱ)设集合$M=\{m\in\mathbf{Z}|-3<m<2\}$,$N=\{n\in\mathbf{Z}|-1\leqslant n\leqslant 3\}$,则$M\cap N=$　(　　)

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

5.(2008陕西)已知全集$U=\{1,2,3,4,5\}$,集合$A=\{x|x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x|x=2a,a\in A\}$,则集合$C_U(A\cup B)$中元素的个数为　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6.(2008天津)设集合$S=\{x||x-2|>3|$,$T=\{x|a<x<a+8\}$,$S\cup T=R$,则a的取值范围是　(　　)

A. $-3<a<-1$　　B. $-3\leqslant a\leqslant -1$

C. $a\leqslant -3$或$a\geqslant -1$　　D. $a<-3$或$a>-1$

7.(2008浙江)已知$U=R$,$A=\{x|x>0|\}$,$B=\{x|x\leqslant -1\}$,则$(A\cap C_uB)\cup(B\cap C_uA)$　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{x|x\leqslant 0\}$

C. $\{x|x>-1\}$　　D. $\{x|x>0$或$x\leqslant -1\}$

8.(2008四川延考)集合$A=\{-1,0,1\}$,A的子集中,含有元素0的子集共有(　　)个

A. 2个　　B. 4个　　C. 6个　　D. 8个

9.(2007全国Ⅰ)设$a,b\in R$,集合$\{1,a+b,a\}=\{0,\frac{b}{a},b\}$,则$b-a=$　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

10.(2007山东)已知集合$M=\{-1,1\}$ $N=\left\{x\left|\frac{1}{2}<2^{x+1}<4,x\in\mathbf{Z}\right.\right\}$,则$M\cap N=$　(　　)

A. $\{-1,1\}$　　B. $\{0\}$　　C. $\{-1\}$　　D. $\{-1,0\}$

11.(2007湖北)设P和Q是两个集合,定义集合$P-Q=\{x|x\in P,x\notin Q\}$,如果$P=\{x|\log_2x<1\}$,$Q=\{x||x-2|<1\}$,那么$P-Q$等于　(　　)

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|0<x\leqslant 1\}$

C. $\{x|1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|2\leqslant x<3\}$

12.(2009福建)已知全集$U=R$,集合$A=\{x|x^2-2x>0\}$,则C_UA等于　(　　)

A. $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$　　B. $\{x|0<x<2\}$

C. $\{x|x<0$或$x>2\}$　　D. $\{x|x\leqslant 0$或$x\leqslant 2\}$

13.(2009安徽)若集合$A=\{x||2x-1|<3\}$,$B=\left\{x\left|\frac{2x+1}{3-x}<0\right.\right\}$,则$A\cap B$是　(　　)

A. $\left\{x\left|-1<x<-\frac{1}{2}\right.\text{或}2<x<3\right\}$

B. $\{x|2<x<3\}$

C. $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<2\right.\right\}$

D. $\left\{x\left|-1<x<-\frac{1}{2}\right.\right\}$

14.(2009宁夏海南)已知集合$A=\{1,3,5,7,9\}$,$B=\{0,3,6,9,12\}$,则$A\cap C_NB$　(　　)

A. $\{1,5,7\}$　　B. $\{3,5,7\}$　　C. $\{1,3,9\}$　　D. $\{1,2,3\}$

15.(2007陕西)设集合$S=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$,在S上定义运算为:$A_i\oplus A_j=A_k$,其中k为$i+j$被4除的余数,$i,j=0,1,2,3$.满足关系式$=(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$的$x(x\in S)$的个数为　(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

16.(2006江苏)若A、B、C为三个集合,$A\cup B=B\cap C$,则一定有　(　　)

A. $A\subseteq C$　　B. $C\subseteq A$　　C. $A\neq C$　　D. $A=\varnothing$

17.(2006湖北)有限集合S中元素个数记作card(S),设A、B都为有限集合,给出下列命题:

①$A\cap B=\varnothing$的充要条件是card$(A\cup B)=$card$(A)+$card(B);

②$A\subseteq B$的必要条件是card$(A)\leqslant$card(B);

③$A\not\subseteq B$的充分条件是card$(A)\leqslant$card(B);

④$A=B$的充要条件是card$(A)=$card(B).

其中真命题的序号是　(　　)

A. ③、④　　B. ①、②　　C. ①、④　　D. ②、③

18.(2006辽宁)设集合$A=\{1,2\}$,则满足$A\cup B=\{1,

2,3}的集合 B 的个数是 ( )

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 8

19. (2005 浙江)设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$, $P=\{1,2,3,4,5\}$, $Q=\{3,4,5,6,7\}$, 记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in P\}$, $\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}$, 则 $(\hat{P}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{P})=$ ( )

A. $\{0,3\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $(3,4,5)$　　D. $\{1,2,6,7\}$

20. (2005 天津)设集合 $A=\{4\mid |4x-1|\geqslant 9, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid \frac{x}{x+3}\geqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

A. $(-3,-2]$　　B. $(-3,-2]\cup\left[0,\frac{5}{2}\right)$

C. $(0,-3]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$　　D. $(0,-3)\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$

21. (2005 山东)设集合 A、B 是全集 U 的两个子集，则 $A\subsetneqq B$ 是 $(C_UA)\cup B=U$ 的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

22. (2005 湖北)设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b\mid a\in P, b\in Q\}$，若 $P=\{0,2,5\}$, $Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是 ( )

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

23. (2005 江西)设集合 $I=\{x\mid |x|<3, x\in Z\}$, $A=\{1,2\}$, $B=\{-2,-1,2\}$, 则 $A\cup(C_IB)=$ ( )

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

二、填空题

1. (2009 重庆)若 $A=\{x\in R\mid |x|<3\}$, $B=\{x\in R\mid 2^x>1\}$, 则 $A\cap B=$________.

2. (2009 上海)已知集合 $A=\{x\mid x\leqslant 1\}$, $B=\{x\mid x\geqslant a\}$, 且 $A\cup B=R$，则实数 a 的取值范围是________

3. (2009 湖南)某班共 30 人，其中 15 人喜爱篮球运动，10 人喜爱乒乓球运动，8 人对这两项运动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为________.

4. (2008 江苏)$A=\{x\mid (x-1)^2<3x+7\}$，则 $A\cap Z$ 的元素个数为________.

5. (2008 上海)若集合 $A=\{x\mid x\leqslant 2\}$, $B=\{x\mid x\geqslant a\}$ 满足 $A\cap B=\{2\}$，则实数 $a=$________

6. (2008 重庆)设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{2,4\}$, $B=\{3,4,5\}$, $C=\{3,4\}$, 则 $(A\cup B)\cap(\complement_UC)=$________.

7. (2008 上海)已知集合 $A=\{x\mid x<-1或2\leqslant x<3\}$, $B=\{x\mid -2\leqslant x<4\}$, 则 $A\cup B=$________.

专题二 函数概念与表示

考点扫描

考点1 函数的概念

设A、B是非空的数集，如果按照某个确定的对应关系f，使对于集合A中的任意一个数x，在集合B中都有唯一确定的数$f(x)$和它对应，那么就称$f:A\to B$为从集合A到集合B的一个函数. 记作：$y=f(x)$，$x\in A$. 其中，x叫做自变量，x的取值范围A叫做函数的定义域；与x的值相对应的y值叫做函数值，函数值的集合$\{f(x)|x\in A\}$叫做函数的值域.

注意：(1)"$y=f(x)$"是函数符号，可以用任意的字母表示，如"$y=g(x)$"；

(2)函数符号"$y=f(x)$"中的$f(x)$表示与x对应的函数值，一个数，而不是f乘x.

考点2 构成函数的三要素：定义域、对应关系和值域

(1)解决一切函数问题必须认真确定该函数的定义域，函数的定义域包含三种形式：

①自然型：指函数的解析式有意义的自变量x的取值范围(如：分式函数的分母不为零，偶次根式函数的被开方数为非负数，对数函数的真数为正数，等等)；

②限制型：指命题的条件或人为对自变量x的限制，这是函数学习中重点，往往也是难点，因为有时这种限制比较隐蔽，容易犯错误；

③实际型：解决函数的综合问题与应用问题时，应认真考查自变量x的实际意义.

(2)求函数的值域是比较困难的数学问题，中学数学要求能用初等方法求一些简单函数的值域问题.

①配方法(将函数转化为二次函数)；②判别式法(将函数转化为二次方程)；③不等式法(运用不等式的各种性质)；④函数法(运用基本函数性质，或抓住函数的单调性、函数图象等).

考点3 两个函数的相等

函数的定义含有三个要素，即定义域A、值域C和对应法则f. 当函数的定义域及从定义域到值域的对应法则确定之后，函数的值域也就随之确定. 因此，定义域和对应法则为函数的两个基本条件，当且仅当两个函数的定义域和对应法则都分别相同时，这两个函数才是同一个函数.

考点4 区间

(1)区间的分类：开区间、闭区间、半开半闭区间；

(2)无穷区间；

(3)区间的数轴表示.

考点5 映射的概念

一般的，设A、B是两个非空的集合，如果按某一个确定的对应法则f，使对于集合A中的任意一个元素x，在集合B中都有唯一确定的元素y与之对应，那么就称对应$f:A\to B$为从集合A到集合B的一个映射. 记作"$f:A\to B$".

函数是建立在两个非空数集间的一种对应，若将其中的条件"非空数集"弱化为"任意两个非空集合"，按照某种法则可以建立起更为普通的元素之间的对应关系，这种的对应就叫映射.

注意：(1)这两个集合有先后顺序，A到B的映射与B到A的映射是截然不同的. 其中f表示具体的对应法则，可以用汉字叙述.

(2)"都有唯一"包含两层意思：一是必有一个；二是只有一个，也就是说有且只有一个的意思.

考点6 函数表示法

(1)解析法：就是把两个变量的函数关系，用一个等式来表示，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式；

(2)列表法：就是列出表格来表示两个变量的函数关系；

(3)图象法：就是用函数图象表示两个变量之间的关系.

考点7 分段函数

若一个函数的定义域分成了若干个子区间，而每个子区间的解析式不同，这种函数又称分段函数；

考点8 复合函数

若$y=f(u)$，$u=g(x)$，$x\in(a,b)$，$u\in(m,n)$，那么$y=f[g(x)]$称为复合函数，u称为中间变量，它的取值范围是$g(x)$的值域.

应试策略

函数是整个高中数学的重点，其中函数思想是最重要的数学思想方法，函数问题在历年的高考中都占据相当大的比例. 从近几年来看，对本部分内容的考查形势稳中求变，向着更灵活的方向发展，对于函数的概念及表示多以下面的形式

出现:通过具体问题(几何问题、实际应用题)找出变量间的函数关系,再求出函数的定义域、值域,进而研究函数性质,寻求问题的结果.

高考对函数概念与表示考查是以选择或填空为主,以解答题形式出现的可能性相对较小,本节知识作为工具和其他知识结合起来命题的可能性依然很大.建议在第二轮复习时要回归课本,真正理解函数的概念和相关性质,同时要熟练掌握函数与其他知识点如导数、不等式等之间的联系.

高考题解

例1 (1)(2008湖北)函数$f(x)=\frac{1}{x}\ln(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4})$的定义域为 ( )

A. $(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$　　B. $(-4,0)\cup(0.1)$

C. $[-4,0)\cup(0,1]$　　D. $[-4,0)\cup(0,1)$

(2)(2009山东)定义在R上的函数$f(x)$满足$f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x),x\leqslant0\\f(x-1)-f(x-2),x>0\end{cases}$,则$f(2009)$的值为 ( )

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

(3)(2007浙江)设$f(x)=\begin{cases}x^2,|x|\geqslant1\\x,|x|<1,\end{cases}$ $g(x)$是二次函数,若$f(g(x))$的值域是$[0+\infty)$,则$g(x)$的值域是 ( )

A. $(-\infty,-1]\cup[1+\infty)$

B. $(-\infty,-1]\cup[0+\infty)$

C. $[0,+\infty)$

D. $[1,+\infty)$

解析:(1)函数的定义域必须满足条件:

$$\begin{cases}x\neq0\\x^2-3x+2\geqslant0\\-x^2-3x+4\geqslant0\\\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4}>0\end{cases}$$

$\Rightarrow x\in[-4,0)\cup(0,1)$

【答案】 D.

(2)由已知得$f(-1)=\log_2 2=1,f(0)=0,f(1)=f(0)-f(-1)=-1,f(2)=f(1)-f(0)=-1,f(3)=f(2)-f(1)=-1-(-1)=0,f(4)=f(3)-f(2)=0-(-1)=1,f(5)=f(4)-f(3)=1,f(6)=f(5)-f(4)=0$,所以函数$f(x)$的值以6为周期重复性出现.所以$f(2009)=f(5)=1$,故选C.

【答案】 C.

【点评】 本题考查归纳推理以及函数的周期性和对数的运算.

(3)要$f(\mu)$的值域是$[0,+\infty)$,则μ可取$(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$.又$g(x)$是二次函数,定义域连续,故$g(x)$不可能同时$(-\infty,-1]$和$[0,+\infty)$.结合选项只能选C,

【答案】 C

例2 (2005广东)在同一平面直角坐标系中,函数$y=f(x)$和$y=g(x)$的图象关于直线$y=x$对称.现将$y=g(x)$图象沿x轴向左平移2个单位,再沿y轴向上平移1个单位,所得的图象是由两条线段组成的折线(如图2—1所示),则函数$f(x)$的表达式为 ( )

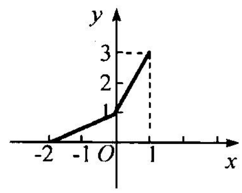


图2—1

A. $f(x)=\begin{cases}2x+2,-1\leqslant x\leqslant0\\\frac{x}{2}+2,0<x\leqslant2\end{cases}$

B. $f(x)=\begin{cases}2x-2,-1\leqslant x\leqslant0\\\frac{x}{2}-2,0<x\leqslant2\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}2x-2,1\leqslant x\leqslant2\\\frac{x}{2}+1,2<x\leqslant4\end{cases}$

D. $f(x)=\begin{cases}2x-6,1\leqslant x\leqslant2\\\frac{x}{2}-3,2<x\leqslant4\end{cases}$

解析:将图象沿y轴向下平移1个单位,再沿x轴向右平移2个单位得图2—2,从而可以得到$g(x)$的图象,故$g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}-1,0\leqslant x\leqslant2\\2x-4,2<x\leqslant3\end{cases}$,

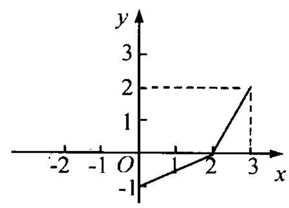


图2—2

∵函数$y=f(x)$和$y=g(x)$的图象关于直线$y=x$对称,

$$\therefore f(x)=\begin{cases}2x+2,-1\leqslant x\leqslant0\\\frac{x}{2}+2,\quad 0<x\leqslant2.\end{cases}$$

【答案】 A

【点评】 也可以用特殊点检验获得答案.

例3 (2007北京)已知函数$f(x),g(x)$分别由下表给出

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1
$g(x)$	3	2	1

则$f[g(1)]$的值为________;满足$f[g(x)]>g[f(x)]$的x的值是________.

解析:$f[g(1)]=f(3)=1$;

当$x=1$时,$f[g(1)]=1,g[f(1)]=g(1)=3$,不满足条件,

当$x=2$时,$f[g(2)]=f(2)=3,g[f(2)]=g(3)=1$,满足条件,

当$x=3$时，$f[g(3)]=f(1)=1,g[f(3)]=g(1)=3$，不满足条件，

∴只有$x=2$时，符合条件.

【答案】 1;2.

例4 (2007湖北)为了预防流感，某学校对教室用药熏消毒法进行消毒.已知药物释放过程中，室内每立方米空气中的含药量y(毫克)与时间t(小时)成正比；药物释放完毕后，y与t的函数关系式为$y=\left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$($a$为常数)，如图2—3所示.据图中提供的信息，回答下列问题：

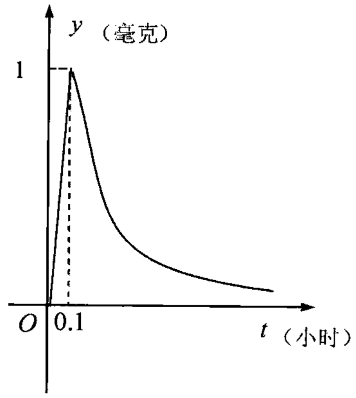


图2—3

(Ⅰ)从药物释放开始，每立方米空气中的含药量y(毫克)与时间t(小时)之间的函数关系式为________；

(Ⅱ)据测定，当空气中每立方米的含药量降低到0.25毫克以下时，学生方可进教室，那么，药物释放开始，至少需要经过________小时后，学生才能回到教室.

解析：(Ⅰ)由题意和图示，当$0\leqslant t\leqslant 0.1$时，可设$y=kt$($k$为待定系数)，由于点(0.1,1)在直线上，∴$k=10$；同理，当$t>0.1$时，可得$1=\left(\frac{1}{16}\right)^{0.1-a}\Rightarrow 0.1-a=0\Rightarrow a=\frac{1}{10}$

(Ⅱ)由题意可得$y\leqslant 0.25=\frac{1}{4}$，即得$\begin{cases}10t\leqslant\frac{1}{4}\\0\leqslant t\leqslant 0.1\end{cases}$或$\begin{cases}\left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}}\leqslant\frac{1}{4}\\t>0.1\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{40}$或$t\geqslant 0.6$，由题意至少需要经过0.6小时后，学生才能回到教室.

【答案】 (Ⅰ)$y=\begin{cases}10t,(0\leqslant t\leqslant 0.1)\\\left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}},(t>0.1)\end{cases}$ (Ⅱ)0.6

例5 (2007北京)如图2—4，有一块半椭圆形钢板，其半轴长为$2r$，短半轴长为r，计划将此钢板切割成等腰梯形的形状，下底AB是半椭圆的短轴，上底CD的端点在椭圆上，记$CD=2x$，梯形面积为S.

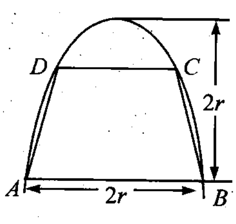


图2—4

(Ⅰ)求面积S以x为自变量的函数式，并写出其定义域；

(Ⅱ)求面积S的最大值.

解：(Ⅰ)依题意，以AB的中点O为原点建立直角坐标系$O-xy$(如图2—5)，则点C的横坐标为x.点C的纵坐标y满足方程$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{4r^2}=1(y\geqslant 0)$，

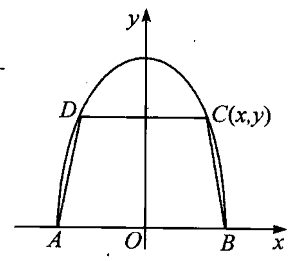


图2—5

解得$y=2\sqrt{r^2-x^2}(0<x<r)$

$S=\frac{1}{2}(2x+2r)\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}$

$=2(x+r)\sqrt{r^2-x^2}$

其定义域为$\{x|0<x<r\}$.

(Ⅱ)记$f(x)=4(x+r)^2(r^2-x^2),0<x<r$，

则$f'(x)=8(x+r)^2(r-2x)$.

令$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{2}r$.

∵当$0<x<\frac{r}{2}$时，$f'(x)>0$；当$\frac{r}{2}<x<r$时，$f'(x)<0$，所以$f\left(\frac{1}{2}r\right)$是$f(x)$的最大值.

∴当$x=\frac{1}{2}r$时，S也取得最大值，

最大值为$\sqrt{f\left(\frac{1}{2}r\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

即梯形面积S的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

例6 (2006江苏)设a为实数，记函数$f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$的最大值为$g(a)$.

(Ⅰ)设$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求t的取值范围，并把$f(x)$表示为t的函数$m(t)$

(Ⅱ)求$g(a)$

(Ⅲ)试求满足$g(a)=g(\frac{1}{a})$的所有实数a

解：(Ⅰ)∵$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，

∴要使t有意义，必须$1+x\geqslant 0$且$1-x\geqslant 0$，即$-1\leqslant x\leqslant 1$

∵$t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\in[2,4]$，且$t\geqslant 0$ ①

∴t的取值范围是$[\sqrt{2},2]$.

由①得：$\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}t^2-1$，∴$m(t)=a(\frac{1}{2}t^2-1)+t=\frac{1}{2}at^2+t-a,t\in[\sqrt{2},2]$.

(Ⅱ)由题意知$g(a)$即为函数$m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a$，$t\in[\sqrt{2},2]$的最大值，

∵直线$t=-\frac{1}{a}$是抛物线$m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a$的对称轴，∴可分以下几种情况进行讨论：

(1)当$a>0$时，函数$y=m(t),t\in[\sqrt{2},2]$的图象是开口向上的抛物线的一段，

由$t=-\frac{1}{a}<0$知$m(t)$在$t\in[\sqrt{2},2]$上单调递增，故$g(a)=m(2)=a+2$；

(2)当 $a=0$ 时,$m(t)=t$,$t\in[\sqrt{2},2]$,有 $g(a)=2$;

(3)当 $a<0$ 时,,函数 $y=m(t)$,$t\in[\sqrt{2},2]$的图象是开口向下的抛物线的一段,

若 $t=-\frac{1}{a}\in(0,\sqrt{2}]$即 $a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$g(a)=m(\sqrt{2})=\sqrt{2}$,

若 $t=-\frac{1}{a}\in(\sqrt{2},2]$即 $a\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}]$时,

$g(a)=m(-\frac{1}{a})=-a-\frac{1}{2a}$,

若 $t=-\frac{1}{a}\in(2,+\infty)$即 $a\in(-\frac{1}{2},0)$时,

$g(a)=m(2)=a+2.$

综上所述,有 $g(a)=\begin{cases}a+2, & (a>-\frac{1}{2})\\ -a-\frac{1}{2a}, & (-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2}).\\ \sqrt{2}, & (a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2})\end{cases}$

(Ⅲ)当 $a>-\frac{1}{2}$时,$g(a)=a+2>\frac{3}{2}>\sqrt{2}$;

当$-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2}$时,$-a\in[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$,$-\frac{1}{2a}\in(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$,

$\therefore -a\neq-\frac{1}{2a}$,

$g(a)=-a-\frac{1}{2a}>2\sqrt{(-a)\cdot(-\frac{1}{2a})}=\sqrt{2}$,故当 $a>-\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$g(a)>\sqrt{2}$;

当 $a>0$ 时,$\frac{1}{a}>0$,由 $g(a)=g(\frac{1}{a})$知:$a+2=\frac{1}{a}+2$,故 $a=1$;

当 $a<0$ 时,$a\cdot\frac{1}{a}=1$,故 $a\leqslant-1$ 或$\frac{1}{a}\leqslant-1$,从而有 $g(a)=\sqrt{2}$或 $g(\frac{1}{a})=\sqrt{2}$,

要使 $g(a)=g(\frac{1}{a})$,必须有 $a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\frac{1}{a}\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$,即$-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

此时,$g(a)=\sqrt{2}=g(\frac{1}{a})$.

综上所述,满足 $g(a)=g(\frac{1}{a})$的所有实数 a 为:$-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$或 $a=1$.

【点评】 本题主要考查函数、方程等基本知识,考查分类讨论的数学思想方法和综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力

跟踪训练

一、选择题

1.(2009 江西)设函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}(a<0)$的定义域为 D,若所有点$(s,f(t))(s,t\in D)$构成一个正方形区域,则 a 的值为 ( )

A. -2　　B. -4　　C. -8　　D. 不能确定

2.(2009 湖南)设函数 $y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义。对于给定的正数 K,定义函数 $f_k(x)=\begin{cases}f(x),f(x)\leqslant K\\ K,f(x)>K\end{cases}$取函数 $f(x)=2-x-e^{-1}$。若对任意的 $x\in(+\infty,-\infty)$,恒有 $f_k(x)=f(x)$,则 ( )

A. K 的最大值为 2　　B. K 的最小值为 2

C. K 的最大值为 1　　D. K 的最小值为 1

3.(2009 天津)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x, & x\geqslant0\\ 4x-x^2, & x<0\end{cases}$若 $f(2-a^2)>f(a)$则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　B. $(-1,2)$

C. $(-2,1)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

4.(2008 江西)若函数 $y=f(x)$的值域是$[\frac{1}{2},3]$,则函数 $F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$的值域是 ( )

A. $[\frac{1}{2},3]$　B. $[2,\frac{10}{3}]$　C. $[\frac{5}{2},\frac{10}{3}]$　D. $[3,\frac{10}{3}]$

5.(2008 重庆)已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$的最大值为 M,最小值为 m,则$\frac{m}{M}$的值为 ( )

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6.(2006 广东)函数 $f(x)=\frac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\lg(3x+1)$的定义域是 ( )

A. $(-\frac{1}{3},+\infty)$　　B. $(-\frac{1}{3},1)$

C. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　D. $(-\infty,-\frac{1}{3})$

7.(2006 湖北)设 $f(x)=\lg\frac{2+x}{2-x}$,则 $f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{2}{x}\right)$的定义域为 ( )

A. $(-4,0)\cup(0,4)$　　B. $(-4,-1)\cup(1,4)$

C. $(-2,-1)\cup(1,2)$　　D. $(-4,-2)\cup(2,4)$

8.(2005 浙江)设 $f(x)=\begin{cases}|x-1|-2, |x|\leqslant1,\\ \frac{1}{1+x^2}, |x|>1\end{cases}$,则 $f[f(\frac{1}{2})]=$ ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{4}{13}$　　C. $-\frac{9}{5}$　　D. $\frac{25}{41}$

9.(2005 湖南)函数 $f(x)=\sqrt{1-2^x}$的定义域是(　　)

A. $(-\infty,0]$　　B. $[0,+\infty)$

C. $(-\infty,0)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

二、填空题

1.(2008 湖北)已知函数 $f(x)=x^2+2x+a$,$f(bx)=9x^2-6x+2$,其中 $x\in\mathrm{R}$,a,b 为常数,则方程 $f(ax+b)=0$ 的解集为________.

2.(2008 上海春)函数 $f(x)=\frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{x-1}$的定义域是________.

3.(2008 安徽)函数 $f(x)=\frac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-1)}$的定义域为________.

4.(2007 上海)函数 $f(x)=\frac{\lg(4-x)}{x-3}$的定义域为________.

5.(2006 辽宁)设 $g(x)=\begin{cases}e^x, x\leqslant 0.\\ lnx, x>0.\end{cases}$ 则 $g(g(\frac{1}{2}))=$________.

6.(2006 安徽)函数 $f(x)$对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$,若 $f(1)=-5$,则 $f(f(5))=$________.

7.(2005 广东)函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$的定义域是________.

三、解答题

1.(2005 浙江)已知函数 $f(x)$和 $g(x)$的图象关于原点对称,且 $f(x)=x^2=2x$.

(Ⅰ)求函数 $g(x)$的解析式;

(Ⅱ)解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$.

2.(2006 重庆)已知定义域为 R 的函数 $f(x)$满足 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$,

(Ⅰ)若 $f(2)=3$,求 $f(1)$;又若 $f(0)=a$,求 $f(a)$;

(Ⅱ)设有且仅有一个实数 x_0,使得 $f(x_0)=x_0$,求函数 $f(x)$的解析表达式.

3.(2007 湖南)如图 2—6,某地为了开发旅游资源,欲修建一条连接风景点 P 和居民区 O 的公路,点 P 所在的山坡面与山脚所在水平面 α 所成的二面角为 $\theta(0°<\theta<90°)$,且 $\sin\theta=\frac{2}{5}$,点 P 到平面 α 的距离 $PH=0.4(\mathrm{km})$. 沿山脚原有一段笔直的公路 AB 可供利用. 从点 O 到山脚修路的造价为

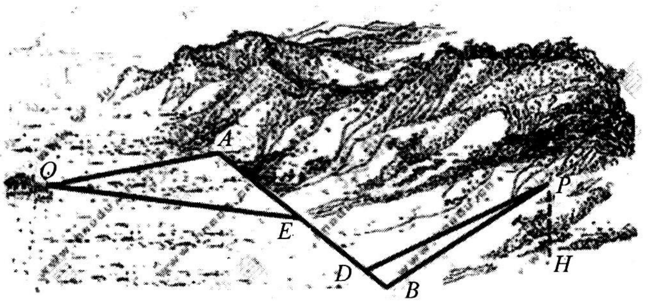


图 2—6

a 万元/km,原有公路改建费用为$\frac{a}{2}$万元/km. 当山坡上公路长度为 $l$km$(1\leqslant l\leqslant 2)$时,其造价为$(l^2+1)a$ 万元. 已知 $OA\perp AB$,$PB\perp AB$,$AB=1.5(\mathrm{km})$,$OA=\sqrt{3}(\mathrm{km})$.

(Ⅰ)在 AB 上求一点 D,使沿折线 $PDAO$ 修建公路的总造价最小;

(Ⅱ)对于(Ⅰ)中得到的点 D,在 DA 上求一点 E,使沿折线 $PDEO$ 修建公路的总造价最小.

(Ⅲ)在 AB 上是否存在两个不同的点 D',E',使沿折线 $PD'E'O$ 修建公路的总造价小于(Ⅱ)中得到的最小总造价,证明你的结论.

4.(2007 福建)某分公司经销某种品牌产品,每件产品的成本为 3 元,并且每件产品需向总公司交 a 元$(3\leqslant a\leqslant 5)$的管理费,预计当每件产品的售价为 x 元$(9\leqslant x\leqslant 11)$时,一年的销售量为$(12-x)^2$ 万件.

(Ⅰ)求分公司一年的利润 L(万元)与每件产品的售价 x 的函数关系式;

(Ⅱ)当每件产品的售价为多少元时,分公司一年的利润 L 最大,并求出 L 的最大值 $Q(a)$.

5.(2006 湖南)对 1 个单位质量的含污物体进行清洗,清洗前其清洁度(含污物体的清洁度定义为:$1-\frac{污物质量}{物体质量(含污物)}$)为 0.8,要求清洗完后的清洁度为 0.99. 有两种方案可供选择,方案甲:一次清洗;方案乙:分两次清洗. 该物体初次清洗后受残留水等因素影响,其质量变为 $a(1\leqslant a\leqslant 3)$. 设用 x 单位质量的水初次清洗后的清洁度是$\frac{x+0.8}{x+1}(x>a-1)$,用 y 单位质量的水第二次清洗后的清洁度是$\frac{y+ac}{y+a}$,其中 $c(0.8<c<0.99)$是该物体初次清洗后的清洁度.

(Ⅰ)分别求出方案甲以及 $c=0.95$ 时方案乙的用水量,并比较哪一种方案用水量较少;

(Ⅱ)若采用方案乙,当 a 为某固定值时,如何安排初次与第二次清洗的用水量,使总用水量最小?并讨论 a 取不同数值时对最少总用水量多少的影响.

专题三 反函数

考点扫描

考点1 反函数定义

一般的,函数 $y=f(x)(x\in A)$ 中,设它的值域为 C.我们根据这个函数中 x,y 的关系,用 y 把 x 表示出来,得到 $x=\varphi(y)$.如果对于 y 在 C 中的任何一个值,通过 $x=\varphi(y)$,x 在 A 中都有唯一的值和它对应,那么 $x=\varphi(y)$ 就表示 y 是自变量,x 是自变量 y 的函数.这样的函数 $x=\varphi(y)(y\in C)$ 叫做函数 $y=f(x)(x\in A)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$

考点2 反函数与函数的关系

(1)反函数与函数是相对的.如果函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$,那么函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数就是 $y=f(x)$,即 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数;

(2)$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域,值域正好对调.(反函数的定义域是由原函数的值域确定,而不是由它的表达式确定);

(3)在同一坐标系中 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称;

(4)原函数与反函数在对称的区间上单调性相同;

(5)偶函数没有反函数,奇函数可能有反函数,如果有反函数也是奇函数.

考点3 求反函数的步骤

(1)反解,即由 $y=f(x)$ 解出 $x=\varphi(y)$;(2)对调,即把 $x=\varphi(y)$ 中的 x 写成 y,y 写成 x;(3)标出反函数的定义域(即原函数的值域).

应试策略

反函数作为与函数概念紧紧相关的知识点,不仅涉及各种基本函数及其运算,还涉及数形结合等数学思想,历年的高考中都占有一席之地.从近几年来看,对本部分内容的考查大多以选择题或填空题的形式出现,以解答题形式出现的可能性相对较小,本节知识作为工具和其他知识结合起来命题的可能性依然很大.建议复习时要注意数学思想和方法特别是数形结合的运用.

高考题解

例1 (1)(2008陕西)已知函数 $f(x)=2^{x+3}$,$f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数,若 $mn=16(m,n\in R^{+})$,则 $f^{-1}(m)+f^{-1}(n)$ 的值为 ( )

A. -2 B. 1 C. 4 D. 10

(2)(2006安徽)函数 $y=\begin{cases}2x,x\geqslant 0\\-x^2,x<0\end{cases}$ 的反函数是 ( )

A. $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2},x\geqslant 0\\\sqrt{-x},x<0\end{cases}$ B. $y=\begin{cases}2x,x\geqslant 0\\\sqrt{-x},x<0\end{cases}$

C. $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2},x\geqslant 0\\-\sqrt{-x},x<0\end{cases}$ D. $y=\begin{cases}2x,x\geqslant 0\\-\sqrt{-x},x<0\end{cases}$

(3)(2009广东)若函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=a^x(a>0$,且 $a\neq 1)$ 的反函数,其图像经过点 $(\sqrt{a},a)$,则 $f(x)=$ ( )

A. $\log_2 x$ B. $\log_{\frac{1}{2}} x$ C. $\dfrac{1}{2^x}$ D. x^2

解析:(1)$f(x)=2^{x+3}\Rightarrow f^{-1}x=\log_2 x-3$ 于 $f^{-1}(m)+f^{-1}(n)=\log_2 m-3+\log_2 n-3-\log_2 mn-6=\log_2 16-6=4-6=-2$

【答案】 A.

(2)当 $x\geqslant 0$ 时,$y=2x\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}y,y\geqslant 0$,对应的反函数为 $y=\dfrac{1}{2}x,x\geqslant 0$;当 $x<0$ 时,$y=-x^2(x<0)\Rightarrow x=-\sqrt{-y},y<0$,对应的反函数为 $y=-\sqrt{-x},(x<0)$.

【答案】 A.

(3)$f(x)=\log_a x$,代入 $(\sqrt{a},a)$,解得 $a=\dfrac{1}{2}$,所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$,选B.

【答案】 B.

【点评】 本题考查有关分段函数的反函数的求法.

例2 (1)(2008湖南)设函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$,且函数 $y=x-f(x)$ 的图象过点(1,2),则函数 $y=f^{-1}(x)-x$ 的图象一定过点________.

(2)(2007江西)设函数 $y=4+\log_2(x-1)(x\geqslant 3)$,则其

反函数的定义域为________.

(3)(2006 江西)设 $f(x)=\log_3(x+6)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$,若 $[f^{-1}(m)+6]\cdot[f^{-1}(m)+6]=27$,则 $f(m+n)=$________

解析:(1)由函数 $y=x-f(x)$ 的图象过点(1,2)得:$f(1)=-1$,即函数 $y=f(x)$ 过点 $(1,-1)$,则其反函数过点 $(-1,1)$,所以函数 $y=f^{-1}(x)-x$ 的图象一定过点 $(-1,2)$.

【答案】 $(-1,2)$

(2)反函数的定义即为原函数的值域,由 $x\geqslant3$ 得 $x-1\geqslant2$,所以 $\log_2(x-1)\geqslant1$,所以 $y\geqslant5$,反函数的定义域为 $[5,+\infty)$,

【答案】 $[5,+\infty)$

(3) $f(x)=\log_3(x+6)\Rightarrow f^{-1}(x)=3^x-6\Rightarrow[f^{-1}(m)+6]\cdot[f^{-1}(m)+6]=3^m\cdot3^n=3^{m+n}=27\Rightarrow m+n=3\Rightarrow f(m+n)=\log_3(3+6)=2$.

例 3 (2008 上海春)已知函数 $f(x)=\log_2(2^x+1)$.

(1)求证:函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增;

(2)记 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x)$ 的反函数. 若关于 x 的方程 $f^{-1}(x)=m+f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有解,求 m 的取值范围.

(1)证明:任取 $x_1<x_2$,则

$f(x_1)-f(x_2)=\log_2(2^{x_1}+1)-\log_2(2^{x_2}+1)$

$=\log_2\dfrac{2^{x_1}+1}{2^{x_2}+1}$,$\because x_1<x_2$,$\therefore 0<2^{x_1}+1<2^{x_2}+1$,

$\therefore 0<\dfrac{2^{x_1}+1}{2^{x_2}+1}<1$,$\log_2\dfrac{2^{x_1}+1}{2^{x_2}+1}<0$,

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$,即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增.

(2)解法一:$\because f^{-1}(x)=\log_2(2^x-1)\ (x>0)$,

$\therefore m=f^{-1}(x)-f(x)=\log_2(2^x-1)-\log_2(2^x+1)$

$=\log_2\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=\log_2\left(1-\dfrac{2}{2^x+1}\right)$,

当 $1\leqslant x\leqslant2$ 时,$\dfrac{2}{5}\leqslant\dfrac{2}{2^x+1}\leqslant\dfrac{2}{3}$,$\therefore\dfrac{1}{3}\leqslant1-\dfrac{2}{2^x+1}\leqslant\dfrac{3}{5}$,

$\therefore m$ 的取值范围是 $\left[\log_2\left(\dfrac{1}{3}\right),\log_2\left(\dfrac{3}{5}\right)\right]$.

解法二:$\because f^{-1}(x)=\log_2(2^x-1)\ (x>0)$

$\therefore$ 方程可化为 $\log_2(2^x-1)=m+\log_2(2^x+1)$,得 $x=\log_2\left(\dfrac{2^m+1}{1-2^m}\right)$,

$\because 1\leqslant x\leqslant2$,$\therefore 1\leqslant\log_2\left(\dfrac{2^m+1}{1-2^m}\right)\leqslant2$,解得 $\log_2\left(\dfrac{1}{3}\right)\leqslant m\leqslant\log_2\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

$\therefore m$ 的取值范围是 $\left[\log_2\left(\dfrac{1}{3}\right),\log_2\left(\dfrac{3}{5}\right)\right]$.

例 4 (2009 上海)已知函数 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数,定义:若对给定的实数 $a(a\neq0)$,函数 $f(x+a)$ 与 $y=f^{-1}(x+a)$ 互为反函数,则称 $y=f(x)$ 满足"a 和性质";若函数 $y=f(ax)$ 与 $y=f^{-1}(ax)$ 互为反函数,则称 $y=f(x)$ 满足"a 积性质".

(1)判断函数 $g(x)=x^2+1\ (x>0)$ 是否满足"1 和性质",并说明理由;

(2)求所有满足"2 和性质"的一次函数;

(3)设函数 $y=f(x)\ (x>0)$ 对任何 $a>0$,满足"a 积性质". 求 $y=f(x)$ 的表达式.

解:(1)函数 $g(x)=x^2+1\ (x>0)$ 的反函数是 $g^{-1}(x)=\sqrt{x-1}\ (x>1)$,

$\therefore g^{-1}(x+1)=\sqrt{x}\ (x>0)$,

而 $g(x+1)=(x+1)^2+1\ (x>-1)$,

其反函数为 $y=\sqrt{x-1}-1\ (x>1)$

故函数 $g(x)=x^2+1\ (x>0)$ 不满足"1 和性质".

(2)设函数 $f(x)=kx+b\ (x\in\mathbf{R}$ 满足"2 和性质",$k\neq0$.

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{k}(x\in\mathbf{R}$,$\therefore f^{-1}(x+2)=\dfrac{x+2-b}{k}$,

而 $f(x+2)=k(x+2)+b\ (x\in\mathbf{R})$,

得反函数 $y=\dfrac{x-b-2k}{k}$,

由"2 和性质"定义可知 $\dfrac{x+2-b}{k}=\dfrac{x-b-2k}{k}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

$\therefore k=-1,b\in\mathbf{R}$,

即所求一次函数为 $f(x)=-x+b\ (b\in\mathbf{R})$.

(3)设 $a>0,x_0>0$,且点 (x_0,y_0) 在 $y=f(ax)$ 图像上,

则 (y_0,x_0) 在函数 $y=f^{-1}(ax)$ 图像上,

故 $\begin{cases}f(ax_0=y_0,\\f^{-1}(ay_0)=x_0,\end{cases}$ 可得 $ay_0=f(x_0)=af(ax_0)$,

令 $ax_0=x$,则 $a=\dfrac{x}{x_0}$.

$\therefore f(x_0)=\dfrac{x}{x_0}f(x)$,即 $f(x)=\dfrac{x_0f(x_0)}{x}$.

综上所述,$f(x)=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$,此时 $f(ax)=\dfrac{k}{ax}$,其反函数就是 $y=\dfrac{k}{ax}$,

而 $f^{-1}(ax)=\dfrac{k}{ax}$,故 $y=f(ax)$ 与 $y=f^{-1}(ax)$ 互为反函数.

跟踪训练

一、选择题

1.(2008 安徽)在同一平面直角坐标系中,函数 $y=g(x)$ 的图象与 $y=e^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 而函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象关于 y 轴对称,若 $f(m)=-1$,则 m 的值是 (　　)

A. $-e$　　B. $-\dfrac{1}{e}$　　C. e　　D. $\dfrac{1}{e}$

2.(2008 全国Ⅰ)若函数 $y=f(x-1)$ 的图象与函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,则 $f(x)=$ (　　)