普通高等学校精品课程教材

财经类
核心课程
系列教材
总主编 伍中信

WEI 微积分

主　编　方　涛　朱　丹
副主编　张　艽　罗太元

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

湖南人民出版社

W E I J I F E N 微 积 分

普通高等学校精品课程教材

财经类核心课程系列教材
总主编 伍中信

WEI 微积分

主编 方涛 朱丹
副主编 张芃 罗太元

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

湖南人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/方涛主编．—长沙：湖南人民出版社，2009.9

ISBN 978-7-5438-6023-0

Ⅰ．微…　Ⅱ．方…　Ⅲ．微积分-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第171024号

微积分

主　　编：方　涛

出 版 人：李建国

责任编辑：莫金莲　杜小念

装帧设计：黄　敏

出版、发行：湖南人民出版社

网　　址：http://www.hnppp.com

地　　址：长沙市营盘东路3号

邮　　编：410005

经　　销：湖南省新华书店

印　　刷：长沙科地印务有限公司

印　　次：2009年9月第1版第1次印刷

开　　本：787×1092　1/16

印　　张：15.5

字　　数：356000

印　　数：1-5000

书　　号：ISBN 978-7-5438-6023-0

定　　价：31.00元

营销电话：0731-82226732　（如发现印装质量问题请与承印厂调换）

总序

ZONGXU

在钟灵毓秀的岳麓山下，林立的高校似争奇斗艳的奇葩；在“唯楚有才，于斯为盛”的大学城内，群贤荟萃，荆玉焕彩。这里，源远流长的湖湘文化孕育了一代代贤哲俊彦，经世致用的湖湘精髓砥砺着一批批乡贤名士，而今，湖湘文化的接力棒依然鞭策着湖南财专的莘莘学人。为了传承文明，他们焚膏继晷，著书立说，撰写了一部部较高质量的著作。

湖南财专，兴学久远，私立起源，几经合并、迁址易名，改革开放后拓址新建，前后70余年。虽历尽坎坷，仍薪火相传，弦歌不绝。历代师生，筚路蓝缕，励精图治，春华秋实。正值高教突飞猛进、日新月异之际，湖南财专同仁审时度势，踏上了跨越式发展之路。为了抢抓机遇，夯实基础，内强实力，外树形象，财专人在办学理念上进行了不懈的探索。

近几年来，为实现学校跨越式发展战略目标，根据高等职业教育学科专业建设、课程建设、教材建设的发展趋势，结合我校实际，进一步明确了办学理念，理清了办学思路，调整和完善了学科与专业结构，形成了既注重人才培养模式的优化，又能适应现代化建设对财经类应用型人才的需求，体现和反映学校办学特色、办学风格和办学传统。为此，学校先后启动了“学科专业建设工程”、“重点课程建设工程”和“重点教学改革研究工程”，并于2008年5月资助出版12门重点建设课程教材。这次资助出版的重点建设课程教材,涉及市场营销、公共投资、经济数学、西方经济学、会计信息系统等方面。集中体现了学校主动适应人才市场需求的变化，重视实践教学，注重学生的自学能力、思考能力、应用能力的培养，不断优化课程体系，更新教学内容，优化知识结构，突出个性化养成，努力提高人才培养质量等方面所取得的成果。这批教材的出版，标志着我校的办学理念日趋成熟，专业结构日益优化，学校办学特色进一步彰显。

这批教材的作者长期在教学科研一线工作，既有丰富的教学经验，又有一定的教学积累和良好的专业基础，这批教材体现了财专学人的学术视野和教学理念，我们感谢湖南人民出版社为我们提供了这样的平台。当然，这批教材也存在着这样或那样的不足。我们恳请学者贤达关注、批评、指正。

衷心希望这批教材能够成为湖南财专实现跨越式发展的隆重献礼！

是为序。

伍中信

2009年5月于湖南财经高等专科学校

（总序作者为湖南财经高等专科学校校长，教授，湖南大学会计学院博士生导师）

前言

QIANYAN

由于科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到社会、经济各个领域，数学的重要性已被整个社会所公认，数学的应用日益广泛深入。高等院校作为培育人才的摇篮，其数学课程的开设具有特别重要的意义。

本书编写的宗旨是：坚持“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，以“掌握概念，强化应用，培养技能”为重点，以“数学为本，经济为用”为目标。本书突出数学方法与经济应用，在每章后面专门一节介绍经济应用、经济模型；同时也不失数学理论的系统性和科学性。

本书作为普通高等学校精品课程教材，适用于高职高专经济管理类专业的学生。教材内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学、微分方程初步，并附有习题和参考答案。教学时可根据专业需要、学生基础、课时实际，有针对性地选择，实行模块化教学，使学生能够更扎实地掌握所学知识，提高教学效果。

本书由方涛、朱丹任主编，罗太元、张艽任副主编。方涛拟定全书编写大纲并负责修改补充和总纂定稿。全书编写分工如下：第1章：毛春华；第2章：姚元端、喻赛龙；第3章：张艽、刘征；第4章：孙群；第5章：罗太元、胡大伟；第6章：莫晓芸；第7章：朱丹、方涛；第8章：范国兵、严建明。

本书在讨论编写过程中，博采众长，借鉴了许多同行的论著、编著等科研成果，得到了学校领导、教务处、基础课部的大力支持，湖南人民出版社为本书的编写出版给予了大量的帮助，在此一并表示感谢！

由于编写水平有限，教材中的不妥之处在所难免，恳请专家、同行和读者予以指正。

编　者

2009年9月

目录

contents

第 1 章　函数

微积分是研究变量以及变量间函数关系的一门学科，其研究的基本方法是极限方法.本章首先引入函数的概念，再讨论函数的特性、基本初等函数与初等函数的知识，最后介绍经济学中常用的几种函数.这些内容是中学相关知识的系统复习和必要补充，也是我们以后学习微积分必需掌握好的基础知识.

第 2 章　极限与连续

函数是微积分研究的主要对象，数列也是特殊的函数，而极限是研究函数的最主要手段之一，本章主要讨论函数极限的概念、方法和思想，以及函数极限的思想方法在经济研究上的应用.

第 3 章　导数与微分

微分学是微积分学的重要组成部分，导数和微分是它的两个基本概念，其中导数反映了函数相对于自变量的变化快慢程度，而微分则刻画了当自变量有微小变化时，函数大体上变化多少，它们都是函数特性更深刻的反映.

目录

contents

第 4 章　微分中值定理与导数的应用

在第三章中,我们通过分析实际问题,引进了导数的概念,并解决了导数的运算问题.在这一章中,我们将主要应用导数这个工具来研究未定式极限的求法、函数的状态以及导数在经济学中的应用.为此,我们先来介绍微分学中的三个中值定理——导数应用的理论基础.

第 5 章　不定积分

前面我们讨论了已知函数的导数和微分.本章我们将研究相反的问题,即已知一个函数的导数或微分,如何求原来的函数,由此引出不定积分的概念.本章主要介绍不定积分的概念、性质及求不定积分的基本方法.

第 6 章　定积分

积分的思想方法形成于对曲线围成的面积、曲面围成的体积、曲线段的长度、变速直线运动的路程、变力做功、物体的重心等实际问题的研究.积分思想的萌芽要比微分学早得多.古希腊的阿基米德用"穷竭法",我国古代杰出的数

学家刘徽用“割圆术”，都计算过一些几何体的面积和体积，这些均为定积分的雏形.直到17世纪，定积分的有关理论才开始出现和发展起来，牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibnitz)先后提出了定积分的概念，并发现了积分与微分之间的内在联系，给出了微积分基本定理，即计算定积分的一般方法，从而使定积分成为解决有关实际问题的有力工具，并使微分学和积分学联系在一起，构成完整的微积分学理论体系.

第 7 章　多元函数微积分

前面各章我们研究的都是只有一个自变量的函数，即一元函数.但在许多实际问题中，经常会遇到一个变量依赖多个变量的情形，这类问题用一元函数的微积分知识解决不了，因此，有必要引进多元函数的概念.

第 8 章　微分方程初步

微分方程是一门独立的数学学科，有完整的理论体系，是数学联系实际并应用于实际的重要途径和桥梁，是各个学科进行科学研究的强有力的工具.本章主要介绍微分方程的一些基本概念，讨论几种简单并且常用的微分方程的解法，并介绍微分方程在经济学中的一些简单应用.

目录

contents

第1章 CHAPTER

函数

本章须掌握的知识要点：

1. 区间与邻域，函数，复合函数，反函数；
2. 基本初等函数，初等函数；
3. 成本函数，收益函数，利润函数，需求函数与供给函数

微积分是研究变量以及变量间函数关系的一门学科，其研究的基本方法是极限方法．本章首先引入函数的概念，再讨论函数的特性、基本初等函数与初等函数的知识，最后介绍经济学中常用的几种函数．这些内容是中学相关知识的系统复习和必要补充，也是我们以后学习微积分必需掌握好的基础知识．

第1节 函数的概念及其基本性质

一、区间与邻域

1. 区间

设$a,b \in \mathbf{R}$,且$a < b$,记$(a,b) = \{x|a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$,称为开区间;记$[a,b] = \{x|a \leqslant x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$,称为闭区间;记$[a,b) = \{x|a \leqslant x < b, x \in \mathbf{R}\}$,称为左闭右开区间;记$(a,b] = \{x|a < x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$,称为左开右闭区间;$a,b$分别称为区间的左端点和右端点,而$b-a$称为区间长度．区间长度为有限的区间称为有限区间．上述四种区间为有限区间．

区间长度为无限的区间通常称为无限区间,无限区间有以下五种:

$(a, +\infty) = \{x|a < x, x \in \mathbf{R}\}$

$[a, +\infty) = \{x|a \leqslant x, x \in \mathbf{R}\}$

$(-\infty, b) = \{x|x < b, x \in \mathbf{R}\}$

$(-\infty, b] = \{x|x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$

$(-\infty, +\infty) = \{x|-\infty < x < +\infty\}$

以后,当不需要指明是哪一类区间时,我们就简单地称之为"区间",且常用字母

I表示.

2. 邻域

设 $x_0 \in \mathbf{R}, \delta > 0$,记 $U(x_0,\delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$,称为 x_0 的 δ 邻域,其中 x_0 称为这个邻域的中心,δ 称为该邻域的半径. 容易知道,

$$U(x_0,\delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

【例如】 $|x-2| < 0.002$ 表示以 2 为中心, 以 0.002 为半径的邻域, 记为 $U(2,0.002)$.

$U(2,0.002) = (1.998,2.002)$.

记 $\overset{0}{U}(x_0,\delta) = U(x_0,\delta) - \{x_0\} = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, x \in R\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,称为 x_0 的去心 δ 邻域.

当不必知道邻域的半径 δ 的具体值时,常将 x_0 的邻域和去心邻域分别简记为 $U(x_0)$ 和 $\overset{0}{U}(x_0)$. 并且称开区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 为 x_0 的左(右)邻域.

二、函数的概念

【定义1】 设 D 为非空实数集,若存在对应规则 f,使得对任意的 $x \in D$,按照对应规则 f,都有唯一确定的 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的一个一元函数,简称函数. D 称为 f 的定义域. 函数 f 的定义域常记作 D_f(或 $D(f)$). 对于 $x \in D_f$,称其对应值 y 为函数 f 在点 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y = f(x)$. 全体函数值所构成的集合称为 f 的值域,记作 $f(D)$、$\mathbf{R}_f$(或 $\mathbf{R}(f)$),即

$$\mathbf{R}_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}.$$

注意 1. 函数的这个定义也叫做近代定义,是由狄利克雷(Dirichlet,1805—1859)于1837年在一篇关于函数的论文中首次引进的.

2. 在定义1中,函数是 f,它是一个对应规则,规定了 D_f 中的 x 对应于哪个实数 y. 而 $f(x)$(即 y)则是函数值,是在对应规则 f 的规定下,x 所对应的那个值 y,这两者在概念上是不一样的. 但由于历史的原因,我们习惯上也把 $f(x)$(或 y)称为 x 的函数,称 x 为自变量,称 y 为因变量.

3. 常用拉丁文或希腊文字母如 f,g,h,φ,ψ 等表示函数. 有时为了减少记号,也常用 $y = y(x)(x \in D)$ 表示函数,此时左边的 y 表示与 x 对应的函数值,右边的 y 表示对应规则.

4. 由定义1可知,确定一个函数需确定其定义域和对应规则,因此,我们称定义域和

对应规则为确定函数的两个要素.如果两个函数f和g的定义域和对应规则都相同,则称这两个函数相同.

5. 函数的表示法一般有三种:表格法,图象法和解析法.这三种方法各有特点,表格法一目了然;图象法形象直观;解析法便于计算和推导.在实际中可结合使用这三种方法.

【例1】 求$\varphi(x)=\ln(\arcsin x)^2$和$g(x)=2\ln\arcsin x$的定义域,并判断它们是否为同一个函数.

【解】 在中学我们就已知道,对于用解析式表示的函数$f(x)$,若其定义域未给出,则认为其定义域为使该函数式$f(x)$有意义的实数的全体.因此,要使$\varphi(x)$有意义,x必须满足

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ \arcsin x\neq 0\end{cases},\text{即}\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ x\neq 0\end{cases},$$

故 $D(\varphi)=[-1,0)\cup(0,1]$.

要使 $g(x)$有意义,x必须满足

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ \arcsin x>0\end{cases},\text{即}\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ x<0\end{cases},$$

故 $D(g)=(0,1]$.由于$D(\varphi)\neq D(g)$,可见$\varphi(x)$和$g(x)$不是同一函数.

【例2】 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1,\text{当}x<0\text{时},\\ x^2+1,\text{当}x\geqslant 0\text{时}\end{cases}$$

求 $f(0),f(-1),f(2)$,并作函数图形.

【解】 这是定义在$(-\infty,+\infty)$内的一个函数,在定义域的不同部分上,函数的表达式不同,这种函数称为分段函数.当$x<0$时,对应的函数值$f(x)=x-1$[即用$x-1$来计算$f(x)$],而当$x\geqslant 0$时,对应的函数值$f(x)=x^2+1$[即用x^2+1来计算$f(x)$].所以

$$f(-1)=(-1)-1=-2,$$

$$f(0)=0^2+1=1,$$

$$f(2)=2^2+1=5.$$

函数图形可分段描绘,并注意空心点和实心点的区别(图1-1).

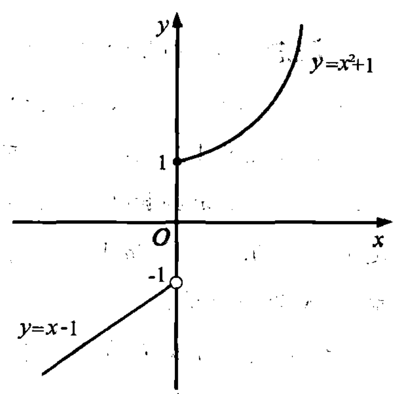

图1-1

注意 1. 分段函数是一个函数,而不是几个函数.

2. 分段函数的定义域是各个表示式的定义域的并集,也就是说各个分段区间的并集.

3. 分段函数求函数值如 $f(x_0)$ 时，先要看 x_0 属于哪一个表示式的定义域，然后按此表示式计算 x_0 所对应的函数值，如例 2 中 $f(2) = 2^2 + 1 = 5$，而不能写成 $f(2) = 2 - 1 = 1$ 或者 $f(2) = \begin{cases} 1 \\ 5. \end{cases}$

4. 分段函数主要有两种形式：

(1) 分界点左右的表示式一样，如 $y = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(2) 分界点左右的表示式不一样，如 $y = \begin{cases} x+2, & -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ x^2+1, & 0 < x < 1 \\ 2x, & 1 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$

三、复合函数

设 $y = f(u)$，$u \in U$，而 $u = \varphi(x)$，$x \in X$，此时 y 常常能通过变量 u 成为 x 的函数. 这是因为任取 $x \in X$，由于 u 是 x 的函数，由这个 x 可确定唯一的 u 与之对应，又由于 y 是 u 的函数，对这个由 x 所确定的 u（当 $u \in U$ 时），又可确定唯一一个 y 与 u 对应，即 $x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y$，由函数定义知 y 是 x 的函数. 其函数式可通过代入运算得到：将 $u = \varphi(x)$ 代入 $y = f(u)$ 中，得 $y = f(\varphi(x))$，称为由 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 构成的复合函数.

【例 3】 设 $y = f(u) = \ln u$，$u = \varphi(x) = \sin x$，则它们构成的复合函数为 $y = f(\varphi(x)) = \ln \sin x$.

可见，若给出两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$，要求复合函数只须作代入运算即可. 但应注意，并非任何两个函数都能构成复合函数.

【例 4】 设 $y = f(u) = \ln(u-2)$，$u = \varphi(x) = \sin x$，问 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 能否构成复合函数 $f(\varphi(x))$？

【解】 将 $u = \sin x$ 代入到 $y = \ln(u-2)$ 中，得 $y = \ln(\sin x - 2)$，由于 $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$，$\sin x - 2 < 0$，故函数的定义域为空集，所以不能构成复合函数.

研究例 3、例 4 可以发现，要使 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 能够构成复合函数 $f(\varphi(x))$，关键是要保证代入后的函数式要有意义，或者说要保证 $u = \varphi(x)$ 的值域全部或部分落在 $y = f(u)$ 的定义域内，这样，我们得到复合函数的定义.

【定义 2】 若 $y = f(u)$ 的定义域为 U，而 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 X，值域为 U^*，且

$U \cap U^* \neq \varnothing$,则$y$通过变量$u$成为$x$的函数,称它为由$f(u)$和$\varphi(x)$构成的复合函数,记作$f(\varphi(x))$. u称为中间变量.

【例 5】 设$f(x) = x^2, \varphi(x) = 2^x$,求复合函数$f(\varphi(x))$和$\varphi(f(x))$.

【解】 由例3知,

$$f(\varphi(x)) = (2^x)^2 = 2^{2x}.$$

$$\varphi(f(x)) = 2^{(x^2)} = 2^{x^2}.$$

【例 6】 将下列函数分解成基本初等函数的复合.

(1) $y = \cos^2(5x+2)$　　(2) $y = \sqrt{\ln \arcsin x^3}$

【解】 (1) 设$y = u^2, u = \cos v, v = 5x + 2$. $y = \cos^2(5x+2)$是由基本初等函数$y = u^2, u = \cos v, v = 5x + 2$复合而成的.

(2) 设$y = \sqrt{u}, u = \ln v, v = \arcsin w, w = x^3$,则$y = \sqrt{\ln \arcsin x^3}$是由基本初等函数$y = \sqrt{u}, u = \ln v, v = \arcsin w, w = x^3$复合而成的.

【例 7】 设$f(x)$的定义域为$[0,1]$,求复合函数$f(\ln(x+1))$的定义域.

【解】 因$f(x)$的定义域为$[0,1]$,即$0 \leqslant x \leqslant 1$. 因此,$\ln(x+1)$必须满足

$$0 \leqslant \ln(x+1) \leqslant 1.$$

因指数函数$y = e^x$为单调递增函数,故$e^0 \leqslant e^{\ln(x+1)} \leqslant e^1$,即$1 \leqslant x + 1 \leqslant e$.

从而　$0 \leqslant x \leqslant e - 1$,

所以　$f(\ln(x+1))$的定义域为$[0, e-1]$.

【例 8】 设$f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \sin\frac{1}{x}$,求$f(x)$.

【解法 1】 令$\frac{1}{x} = t$,则$x = \frac{1}{t}$,将其代入函数式,得

$$f(t) = \frac{1}{t^2} + \sin t. \text{ 即 } f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin x.$$

【解法 2】 将函数表达式变形,得

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} + \sin\frac{1}{x}.$$

令$\frac{1}{x} = t$,得$f(t) = \frac{1}{t^2} + \sin t$,即$f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin x$.

四、反函数

在研究两个变量的函数关系时,可以根据问题的需要,选定其中一个为自变量,那么

另一个就是因变量或函数. 例如,在圆面积公式 $S = \pi r^2$ 中,圆面积 S 是随半径 r 的变化而变化的,或者说任给一个 $r > 0$,就有唯一确定的 S 与之对应,因此 S 是 r 的一个函数,r 是自变量,S 是因变量. 但如果是要由圆面积 S 的值来确定半径 r,则可从 $S = \pi r^2$ 中解出 r,得 $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. 可见 r 是随 S 的变化而变化的,或者说,任给一个 $S > 0$,就有唯一确定的 r 与之对应,按函数定义,r 是 S 的函数,这时的自变量为 S,而 r 为因变量. 我们称 $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 为 $S = \pi r^2$ 的反函数.

【定义 3】　设 $y = f(x)$ 的定义域为 X,值域为 Y,对 Y 中的任何一个 y 值,通过函数 $y = f(x)$,可以反解出唯一的一个 x,使得 y 与这个 x 相对应,根据函数定义,x 是 y 的函数. 这个函数的自变量是 y,因变量是 x,定义域是 Y,值域是 X. 称之为 $y = f(x)$ 的反函数,记为 $x = f^{-1}(y)$.

相应地,原来的函数 $y = f(x)$ 叫做直接函数.

显见,若 $x = f^{-1}(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数,则 $y = f(x)$ 是 $x = f^{-1}(y)$ 的反函数,即它们互为反函数. $x = f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y = f(x)$ 的值域和定义域. 并且不难知道 $f^{-1}(f(x)) = x, x \in X; f(f^{-1}(y)) = y, y \in Y$.

注意到在 $x = f^{-1}(y)$ 中,y 是自变量,x 是因变量,由于习惯上常用 x 作为自变量,y 作为因变量,因此,反函数 $x = f^{-1}(y), y \in Y$ 常记作 $y = f^{-1}(x), x \in Y$.

关于反函数还有一些常用结论:

(1) $y = f(x)$(定义域为 X,值域为 Y) 存在反函数 $y = f^{-1}(x)(x \in Y)$ 的充分条件是函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上单调(增加或减少),并且函数 $y = f(x)(x \in X)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)(x \in Y)$ 的单调性一致.

(2) 若 $y = f(x), x \in X$ 存在反函数 $y = f^{-1}(x)$,则在同一直角坐标系 xOy 中,$y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的函数图形关于直线 $y = x$ 对称.

这是因为若点 $P(a,b)$ 是 $y = f(x)$ 的函数图形上的点,即 $b = f(a)$,由反函数定义知,$a = f^{-1}(b)$,因此点 $Q(b,a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 的函数图形上的点;反之,若点 $Q(b,a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 的函数图形上的点,则 $P(a,b)$ 是 $y = f(x)$ 的函数图形上的点. 因点 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 关于直线 $y = x$ 对称(即直线 $y = x$ 垂直平分线段 PQ,故上述结论(2) 正确(图 1-2).

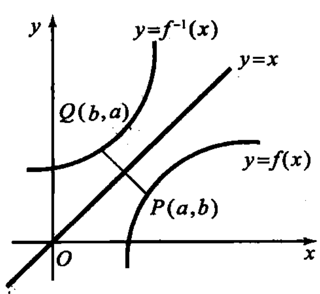

图 1-2

【例 9】　求下列函数的反函数:

(1) $y = 2^x + 1$; (2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$