

普通高等学校精品课程教材



WEI 微积分

主 编 方 涛 朱 丹
副主编 张 芃 罗太元

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

湖南 人民出版社

W E I J I F E N 微 积 分

普通高等学校精品课程教材



W E I J I F E N

微积分

主 编 方 涛 朱 丹
副主编 张 芃 罗太元

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

分 册 编

表 式 编 主

国 数 李 人 编 出

念 小 林 编 金 编 主 责

编 小 林 编 金 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

湖南 人民出版社

社 湖 中 南 人 南 编 主 责

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分 / 方涛主编. —长沙: 湖南人民出版社, 2009. 9

ISBN 978 - 7 - 5438 - 6023 - 0

I. 微… II. 方… III. 微积分 - 高等学校: 技术学校 - 教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 171024 号

微 积 分

主 编: 方 涛

出 版 人: 李建国

责 任 编 辑: 莫金莲 杜小念

装 帧 设 计: 黄 敏

出版、发行: 湖南人民出版社

网 址: <http://www.hnppp.com>

地 址: 长沙市营盘东路 3 号

邮 编: 410005

经 销: 湖南省新华书店

印 刷: 长沙科地印务有限公司

印 次: 2009 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

开 本: 787 × 1092 1 / 16

印 张: 15.5

字 数: 356000

印 数: 1 - 5000

书 号: ISBN 978 - 7 - 5438 - 6023 - 0

定 价: 31.00 元

总序

ZONGXU

在钟灵毓秀的岳麓山下，林立的高校似争奇斗艳的奇葩；在“唯楚有才，于斯为盛”的大学城内，群贤荟萃，荆玉焕彩。这里，源远流长的湖湘文化孕育了一代代贤哲俊彦，经世致用的湖湘精髓砥砺着一批批乡贤名士，而今，湖湘文化的接力棒依然鞭策着湖南财专的莘莘学人。为了传承文明，他们焚膏继晷，著书立说，撰写了一部部较高质量的著作。

湖南财专，兴学久远，私立起源，几经合并、迁址易名，改革开放后拓址新建，前后70余年。虽历尽坎坷，仍薪火相传，弦歌不绝。历代师生，筚路蓝缕，励精图治，春华秋实。正值高教突飞猛进、日新月异之际，湖南财专同仁审时度势，踏上了跨越式发展之路。为了抢抓机遇，夯实基础，内强实力，外树形象，财专人在办学理念上进行了不懈的探索。

近几年来，为实现学校跨越式发展战略目标，根据高等职业教育学科专业建设、课程建设、教材建设的发展趋势，结合我校实际，进一步明确了办学理念，理清了办学思路，调整和完善了学科与专业结构，形成了既注重人才培养模式的优化，又能适应现代化建设对财经类应用型人才的需求，体现和反映学校办学特色、办学风格和办学传统。为此，学校先后启动了“学科专业建设工程”、“重点课程建设工程”和“重点教学改革研究工程”，并于2008年5月资助出版12门重点建设课程教材。这次资助出版的重点建设课程教材，涉及市场营销、公共投资、经济数学、西方经济学、会计信息系统等方面。集中体现了学校主动适应人才市场需求的变化，重视实践教学，注重学生的自学能力、思考能力、应用能力的培养，不断优化课程体系，更新教学内容，优化知识结构，突出个性化养成，努力提高人才培养质量等方面所取得的成果。这批教材的出版，标志着我校的办学理念日趋成熟，专业结构日益优化，学校办学特色进一步彰显。

这批教材的作者长期在教学科研一线工作，既有丰富的教学经验，又有一定的教学积累和良好的专业基础，这批教材体现了财专学人的学术视野和教学理念，我们感谢湖南人民出版社为我们提供了这样的平台。当然，这批教材也存在着这样或那样的不足。我们恳请学者贤达关注、批评、指正。

衷心希望这批教材能够成为湖南财专实现跨越式发展的隆重献礼！

是为序。

伍中信

2009年5月于湖南财经高等专科学校

(总序作者为湖南财经高等专科学校校长，教授，湖南大学会计学院博士生导师)

在人类文明的发展进程中，教育始终扮演着至关重要的角色。它不仅承载着传承文化的使命，更是推动社会进步、实现民族振兴的根本途径。随着时代的变迁，教育的内容、形式和方法都在不断演进，以适应社会发展的需求。在当代中国，教育肩负着培养高素质人才、提升国民素质、促进社会公平正义的重任。这一使命的完成，离不开广大教育工作者的辛勤耕耘和无私奉献。

教育是一项系统工程，需要政府、社会、学校和家庭的共同努力。政府应加大教育投入，优化教育资源配置，保障教育公平；社会应营造良好的教育氛围，支持教育事业发展；学校应深化教育改革，提高教育教学质量；家庭应重视家庭教育，与学校形成教育合力。只有各方协同发力，才能构建起高质量的教育体系，为全面建设社会主义现代化国家提供坚实的人才支撑。

在推进教育现代化的过程中，我们面临着诸多挑战，如教育资源分布不均、教育体制机制有待完善、教育质量和水平有待进一步提升等。面对这些挑战，我们必须保持清醒的头脑，坚持问题导向，勇于改革创新。要通过深化教育体制改革，破除体制机制障碍，激发教育发展的内生动力；要通过推进教育信息化，创新教育模式，提高教育效率；要通过加强教师队伍建设，提升教师素质，打造高素质专业化教师队伍。

教育是国之大计、党之大计。我们要坚持以人民为中心的发展思想，把立德树人作为教育的根本任务，培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人。要弘扬教育家精神，引导广大教师争做“四有”好老师，努力成为先进教育理念的传播者、教育改革的推动者、教育创新的实践者。要通过办好人民满意的教育，让每个孩子都能享有公平而有质量的教育，为全面建设社会主义现代化国家、实现中华民族伟大复兴的中国梦贡献教育力量。

教育的发展是一个长期的过程，需要持之以恒的努力。我们要保持战略定力，坚持教育优先发展，坚定不移走中国特色社会主义教育发展道路。要立足国情，借鉴国际先进经验，探索具有中国特色的教育现代化道路。要通过持续不断的努力，推动我国教育高质量发展，为全面建设社会主义现代化国家、实现中华民族伟大复兴的中国梦提供坚实的人才支撑和智力支持。我们要坚信，只要全社会共同努力，就一定能够办好人民满意的教育，为民族复兴伟业培养更多优秀人才。

前言

QIANYAN

由于科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到社会、经济各个领域，数学的重要性已被整个社会所公认，数学的应用日益广泛深入。高等院校作为培育人才的摇篮，其数学课程的开设具有特别重要的意义。

本书编写的宗旨是：坚持“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，以“掌握概念，强化应用，培养技能”为重点，以“数学为本，经济为用”为目标。本书突出数学方法与经济应用，在每章后面专门一节介绍经济应用、经济模型；同时也不失数学理论的系统性和科学性。

本书作为普通高等学校精品课程教材，适用于高职高专经济管理类专业的学生。教材内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学、微分方程初步，并附有习题和参考答案。教学时可根据专业需要、学生基础、课时实际，有针对性地选择，实行模块化教学，使学生能够更扎实地掌握所学知识，提高教学效果。

本书由方涛、朱丹任主编，罗太元、张芄任副主编。方涛拟定全书编写大纲并负责修改补充和总纂定稿。全书编写分工如下：第1章：毛春华；第2章：姚元端、喻赛龙；第3章：张芄、刘征；第4章：孙群；第5章：罗太元、胡大伟；第6章：莫晓芸；第7章：朱丹、方涛；第8章：范国兵、严建明。

本书在讨论编写过程中，博采众长，借鉴了许多同行的论著、编著等科研成果，得到了学校领导、教务处、基础课部的大力支持，湖南人民出版社为本书的编写出版给予了大量的帮助，在此一并表示感谢！

由于编写水平有限，教材中的不妥之处在所难免，恳请专家、同行和读者予以指正。

编 者

2009年9月

第1章 函数

微积分是研究变量以及变量间函数关系的一门学科,其研究的基本方法是极限方法.本章首先引入函数的概念,再讨论函数的特性、基本初等函数与初等函数的知识,最后介绍经济学中常用的几种函数.这些内容是中学相关知识的系统复习和必要补充,也是我们以后学习微积分必需掌握好的基础知识.

第1节 函数的概念及其基本性质/002

第2节 初等函数/012

第3节 经济学中常见的函数/018

第2章 极限与连续

函数是微积分研究的主要对象,数列也是特殊的函数,而极限是研究函数的最主要手段之一,本章主要讨论函数极限的概念、方法和思想,以及函数极限的思想方法在经济研究上的应用.

第1节 数列的极限/023

第2节 函数的极限/032

第3节 函数极限的运算性质/040

第4节 无穷小量与无穷大量/043

第5节 两种重要极限/053

第6节 函数的连续性/058

第7节 极限在经济学中的应用举例/067

第3章 导数与微分

微分学是微积分学的重要组成部分,导数和微分是它的两个基本概念,其中导数反映了函数相对于自变量的变化快慢程度,而微分则刻画了当自变量有微小变化时,函数大体上变化多少,它们都是函数特性更深刻的反映.

第1节 导数的概念/072

第2节 求导法则/080

目 录

Contents

第3节 高阶导数/089

第4节 微分及其运算/092

第5节 导数与微分在经济学中的应用/098

第4章 微分中值定理与导数的应用

在第三章中,我们通过分析实际问题,引进了导数的概念,并解决了导数的运算问题.在这一章中,我们将主要应用导数这个工具来研究未定式极限的求法、函数的状态以及导数在经济学中的应用.为此,我们先来介绍微分学中的三个中值定理——导数应用的理论基础.

第1节 微分中值定理/107

第2节 洛必达(L'Hospital)法则/112

第3节 函数的单调性与极值/118

第4节 极值在经济学中的应用/124

第5章 不定积分

前面我们讨论了已知函数的导数和微分.本章我们将研究相反的问题,即已知一个函数的导数或微分,如何求原来的函数,由此引出不定积分的概念.本章主要介绍不定积分的概念、性质及求不定积分的基本方法.

第1节 不定积分的概念/130

第2节 不定积分的运算法则与直接积分法/134

第3节 换元积分法/139

第4节 分部积分法/148

第5节 不定积分在经济问题中的应用举例/152

第6章 定积分

积分的思想方法形成于对曲线围成的面积、曲面围成的体积、曲线段的长度、变速直线运动的路程、变力做功、物体的重心等实际问题的研究.积分思想的萌芽要比微分学早得多.古希腊的阿基米德用“穷竭法”,我国古代杰出的数

学家刘徽用“割圆术”，都计算过一些几何体的面积和体积，这些均为定积分的雏形。直到 17 世纪，定积分的有关理论才开始出现和发展起来，牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibnitz)先后提出了定积分的概念，并发现了积分与微分之间的内在联系，给出了微积分基本定理，即计算定积分的一般方法，从而使定积分成为解决有关实际问题的有力工具，并使微分学和积分学联系在一起，构成完整的微积分学理论体系。

- 第 1 节 定积分概念 / 156
- 第 2 节 微积分基本公式 / 162
- 第 3 节 定积分的换元法和分部积分法 / 167
- 第 4 节 定积分的几何及经济应用 / 171

第 7 章 多元函数微积分

前面各章我们研究的都是只有一个自变量的函数，即一元函数。但在许多实际问题中，经常会遇到一个变量依赖多个变量的情形，这类问题用一元函数的微积分知识解决不了，因此，有必要引进多元函数的概念。

- 第 1 节 多元函数的概念 / 180
- 第 2 节 二元函数的极限与连续性 / 183
- 第 3 节 偏导数及其在经济学中的应用 / 186
- 第 4 节 全微分 / 192
- 第 5 节 多元复合函数的微分法 / 195
- 第 6 节 高阶偏导数 / 201
- 第 7 节 多元函数的极值及其经济应用 / 203

第 8 章 微分方程初步

微分方程是一门独立的数学学科，有完整的理论体系，是数学联系实际并应用于实际的重要途径和桥梁，是各个学科进行科学研究的强有力的工具。本章主要介绍微分方程的一些基本概念，讨论几种简单并且常用的微分方程的解法，并介绍微分方程在经济学中的一些简单应用。

目 录

contents

第1节 微分方程的基本概念/210

第2节 一阶微分方程/213

第3节 可降阶的二阶微分方程/219

第4节 微分方程在经济学中的应用/222

参考答案/225

第1章

CHAPTER

函数

函数

函数

- 1. 区间与邻域, 函数, 复合函数, 反函数;
- 2. 基本初等函数, 初等函数;
- 3. 成本函数, 收益函数, 利润函数, 需求函数与供给函数.

本章须掌握的知识要点:

1. 区间

设 $a, b \in \mathbb{R}$, 且 $a < b$, 则 (a, b) 称为开区间, $[a, b]$ 称为闭区间, $(a, b]$ 称为左开右闭区间, $[a, b)$ 称为左闭右开区间. 开区间 (a, b) 记作 (a, b) , 闭区间 $[a, b]$ 记作 $[a, b]$, 左开右闭区间 $(a, b]$ 记作 $(a, b]$, 左闭右开区间 $[a, b)$ 记作 $[a, b)$. 开区间 (a, b) 的长度为 $b - a$, 闭区间 $[a, b]$ 的长度为 $b - a$. 开区间 (a, b) 的端点为 a 和 b , 闭区间 $[a, b]$ 的端点为 a 和 b . 开区间 (a, b) 的邻域为 $(a - \delta, a + \delta)$, 闭区间 $[a, b]$ 的邻域为 $(a - \delta, a + \delta)$.

开区间 (a, b) 的邻域为 $(a - \delta, a + \delta)$, 闭区间 $[a, b]$ 的邻域为 $(a - \delta, a + \delta)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \{x \mid x > a\} \cup \{x \mid x < b\} \\ \mathbb{R} &= \{x \mid x > a\} \cup \{x \mid x < b\} \\ \mathbb{R} &= \{x \mid x > a\} \cup \{x \mid x < b\} \\ \mathbb{R} &= \{x \mid x > a\} \cup \{x \mid x < b\} \\ \mathbb{R} &= \{x \mid x > a\} \cup \{x \mid x < b\} \end{aligned}$$

开区间 (a, b) 的邻域为 $(a - \delta, a + \delta)$, 闭区间 $[a, b]$ 的邻域为 $(a - \delta, a + \delta)$.

微积分是研究变量以及变量间函数关系的一门学科,其研究的基本方法是极限方法.本章首先引入函数的概念,再讨论函数的特性、基本初等函数与初等函数的知识,最后介绍经济学中常用的几种函数.这些内容是中学相关知识的系统复习和必要补充,也是我们以后学习微积分必需掌握好的基础知识.

第1节

函数的概念及其基本性质

一、区间与邻域

1. 区间

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 记 $(a, b) = \{x | a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为开区间; 记 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为闭区间; 记 $[a, b) = \{x | a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为左闭右开区间; 记 $(a, b] = \{x | a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为左开右闭区间; a, b 分别称为区间的左端点和右端点, 而 $b - a$ 称为区间长度. 区间长度为有限的区间称为有限区间. 上述四种区间为有限区间.

区间长度为无限的区间通常称为无限区间, 无限区间有以下五种:

$$(a, +\infty) = \{x | a < x, x \in \mathbf{R}\}$$

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x, x \in \mathbf{R}\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b, x \in \mathbf{R}\}$$

$$(-\infty, b] = \{x | x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$$

以后, 当不需要指明是哪一类区间时, 我们就简单地称之为“区间”, 且常用字母

I 表示.

2. 邻域

设 $x_0 \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 记 $U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$, 称为 x_0 的 δ 邻域, 其中 x_0 称为这个邻域的中心, δ 称为该邻域的半径. 容易知道,

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

【例如】 $|x - 2| < 0.002$ 表示以 2 为中心, 以 0.002 为半径的邻域, 记为 $U(2, 0.002)$.

$$U(2, 0.002) = (1.998, 2.002).$$

记 $\overset{0}{U}(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) - \{x_0\} = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, 称为 x_0 的去心 δ 邻域.

当不必知道邻域的半径 δ 的具体值时, 常将 x_0 的邻域和去心邻域分别简记为 $U(x_0)$ 和 $\overset{0}{U}(x_0)$. 并且称开区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 为 x_0 的左(右)邻域.

二、函数的概念

【定义 1】 设 D 为非空实数集, 若存在对应规则 f , 使得对任意的 $x \in D$, 按照对应规则 f , 都有唯一确定的 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应, 则称 f 为定义在 D 上的一个一元函数, 简称函数. D 称为 f 的定义域. 函数 f 的定义域常记作 D_f (或 $D(f)$). 对于 $x \in D_f$, 称其对应值 y 为函数 f 在点 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$, 全体函数值所构成的集合称为 f 的值域, 记作 $f(D)$, $\mathbf{R}_f$ (或 $\mathbf{R}(f)$), 即

$$\mathbf{R}_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}.$$

注意 1. 函数的这个定义也叫做近代定义, 是由狄利克雷 (Dirichlet, 1805—1859) 于 1837 年在一篇关于函数的论文中首次引进的.

2. 在定义 1 中, 函数是 f , 它是一个对应规则, 规定了 D_f 中的 x 对应于哪个实数 y . 而 $f(x)$ (即 y) 则是函数值, 是在对应规则 f 的规定下, x 所对应的那个值 y , 这两者在概念上是不一样的. 但由于历史的原因, 我们习惯上也把 $f(x)$ (或 y) 称为 x 的函数, 称 x 为自变量, 称 y 为因变量.

3. 常用拉丁文或希腊文字母如 f, g, h, φ, ψ 等表示函数. 有时为了减少记号, 也常用 $y = y(x)$ ($x \in D$) 表示函数, 此时左边的 y 表示与 x 对应的函数值, 右边的 y 表示对应规则.

4. 由定义 1 可知, 确定一个函数需确定其定义域和对应规则, 因此, 我们称定义域和

对应规则为确定函数的两个要素. 如果两个函数 f 和 g 的定义域和对应规则都相同, 则称这两个函数相同.

5. 函数的表示法一般有三种: 表格法, 图象法和解析法. 这三种方法各有特点, 表格法一目了然; 图象法形象直观; 解析法便于计算和推导. 在实际中可结合使用这三种方法.

【例1】 求 $\varphi(x) = \ln(\arcsin x)^2$ 和 $g(x) = 2\ln \arcsin x$ 的定义域, 并判断它们是否为同一个函数.

【解】 在中学我们就已知道, 对于用解析式表示的函数 $f(x)$, 若其定义域未给出, 则认为其定义域为使该函数式 $f(x)$ 有意义的实数的全体. 因此, 要使 $\varphi(x)$ 有意义, x 必须满足

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \arcsin x \neq 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

故 $D(\varphi) = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

要使 $g(x)$ 有意义, x 必须满足

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \arcsin x > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x < 0 \end{cases}.$$

故 $D(g) = (0, 1]$. 由于 $D(\varphi) \neq D(g)$, 可见 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 不是同一函数.

【例2】 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \\ x^2+1, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

求 $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$, 并作函数图形.

【解】 这是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数, 在定义域的不同部分上, 函数的表达式不同, 这种函数称为分段函数. 当 $x < 0$ 时, 对应的函数值 $f(x) = x-1$ [即用 $x-1$ 来计算 $f(x)$], 而当 $x \geq 0$ 时, 对应的函数值 $f(x) = x^2+1$ [即用 x^2+1 来计算 $f(x)$]. 所以

$$f(-1) = (-1) - 1 = -2,$$

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1,$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5.$$

函数图形可分段描绘, 并注意空心点和实心点的区别(图 1-1).

注意 1. 分段函数是一个函数, 而不是几个函数.

2. 分段函数的定义域是各个表示式的定义域的并集, 也就是说各个分段区间的并集.

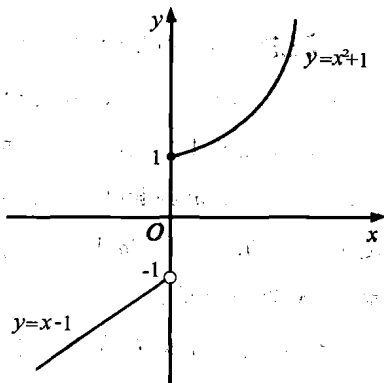


图 1-1

3. 分段函数求函数值如 $f(x_0)$ 时, 先看 x_0 属于哪一个表示式的定义域, 然后按此表示式计算 x_0 所对应的函数值, 如例2中 $f(2) = 2^2 + 1 = 5$, 而不能写成 $f(2) = 2 - 1 = 1$

$$\text{或者 } f(2) = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}.$$

4. 分段函数主要有两种形式:

$$(1) \text{ 分界点左右的表示式一样, 如 } y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 分界点左右的表示式不一样, 如 } y = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ 2x, & 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

三、复合函数

设 $y = f(u)$, $u \in U$, 而 $u = \varphi(x)$, $x \in X$, 此时 y 常常能通过变量 u 成为 x 的函数. 这是因为任取 $x \in X$, 由于 u 是 x 的函数, 由这个 x 可确定唯一的 u 与之对应, 又由于 y 是 u 的函数, 对这个由 x 所确定的 u (当 $u \in U$ 时), 又可确定唯一的一个 y 与 u 对应, 即 $x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y$, 由函数定义知 y 是 x 的函数. 其函数式可通过代入运算得到: 将 $u = \varphi(x)$ 代入 $y = f(u)$ 中, 得 $y = f(\varphi(x))$, 称为由 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 构成的复合函数.

【例3】 设 $y = f(u) = \ln u$, $u = \varphi(x) = \sin x$, 则它们构成的复合函数为 $y = f(\varphi(x)) = \ln \sin x$.

可见, 若给出两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$, 要求复合函数只须作代入运算即可. 但应注意, 并非任何两个函数都能构成复合函数.

【例4】 设 $y = f(u) = \ln(u - 2)$, $u = \varphi(x) = \sin x$, 问 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 能否构成复合函数 $f(\varphi(x))$?

【解】 将 $u = \sin x$ 代入到 $y = \ln(u - 2)$ 中, 得 $y = \ln(\sin x - 2)$, 由于 $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\sin x - 2 < 0$, 故函数的定义域为空集, 所以不能构成复合函数.

研究例3、例4可以发现, 要使 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 能够构成复合函数 $f(\varphi(x))$, 关键是要保证代入后的函数式要有意义, 或者说要保证 $u = \varphi(x)$ 的值域全部或部分落在 $y = f(u)$ 的定义域内, 这样, 我们得到复合函数的定义.

【定义2】 若 $y = f(u)$ 的定义域为 U , 而 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 X , 值域为 U^* , 且

$U \cap U^* \neq \emptyset$, 则 y 通过变量 u 成为 x 的函数, 称它为由 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 构成的复合函数, 记作 $f(\varphi(x))$. u 称为中间变量.

【例 5】 设 $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = 2^x$, 求复合函数 $f(\varphi(x))$ 和 $\varphi(f(x))$.

【解】 由例 3 知,

$$f(\varphi(x)) = (2^x)^2 = 2^{2x}.$$

$$\varphi(f(x)) = 2^{(x^2)} = 2^{x^2}.$$

【例 6】 将下列函数分解成基本初等函数的复合.

$$(1) y = \cos^2(5x+2)$$

$$(2) y = \sqrt{\ln \arcsin x^3}$$

【解】 (1) 设 $y = u^2$, $u = \cos v$, $v = 5x+2$. $y = \cos^2(5x+2)$ 是由基本初等函数 $y = u^2$, $u = \cos v$, $v = 5x+2$ 复合而成的.

(2) 设 $y = \sqrt{u}$, $u = \ln v$, $v = \arcsin w$, $w = x^3$, 则 $y = \sqrt{\ln \arcsin x^3}$ 是由基本初等函数 $y = \sqrt{u}$, $u = \ln v$, $v = \arcsin w$, $w = x^3$ 复合而成的.

【例 7】 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求复合函数 $f(\ln(x+1))$ 的定义域.

【解】 因 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 即 $0 \leq x \leq 1$. 因此, $\ln(x+1)$ 必须满足

$$0 \leq \ln(x+1) \leq 1.$$

因指数函数 $y = e^x$ 为单调递增函数, 故 $e^0 \leq e^{\ln(x+1)} \leq e^1$, 即 $1 \leq x+1 \leq e$.

从而 $0 \leq x \leq e-1$.

所以 $f(\ln(x+1))$ 的定义域为 $[0, e-1]$.

【例 8】 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \sin \frac{1}{x}$, 求 $f(x)$.

【解法 1】 令 $\frac{1}{x} = t$, 则 $x = \frac{1}{t}$, 将其代入函数式, 得

$$f(t) = \frac{1}{t^2} + \sin t. \text{ 即 } f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin x.$$

【解法 2】 将函数表达式变形, 得

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} + \sin \frac{1}{x}.$$

$$\text{令 } \frac{1}{x} = t, \text{ 得 } f(t) = \frac{1}{t^2} + \sin t, \text{ 即 } f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin x.$$

四、反函数

在研究两个变量的函数关系时, 可以根据问题的需要, 选定其中一个为自变量, 那么

另一个就是因变量或函数. 例如, 在圆面积公式 $S = \pi r^2$ 中, 圆面积 S 是随半径 r 的变化而变化的, 或者说任给一个 $r > 0$, 就有唯一确定的 S 与之对应, 因此 S 是 r 的一个函数, r 是自变量, S 是因变量. 但如果是要由圆面积 S 的值来确定半径 r , 则可从 $S = \pi r^2$ 中解出 r , 得 $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. 可见 r 是随 S 的变化而变化的, 或者说, 任给一个 $S > 0$, 就有唯一确定的 r 与之对应, 按函数定义, r 是 S 的函数, 这时的自变量为 S , 而 r 为因变量. 我们称 $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 为 $S = \pi r^2$ 的反函数.

【定义3】 设 $y = f(x)$ 的定义域为 X , 值域为 Y , 对 Y 中的任何一个 y 值, 通过函数 $y = f(x)$, 可以反解出唯一的一个 x , 使得 y 与这个 x 相对应, 根据函数定义, x 是 y 的函数. 这个函数的自变量是 y , 因变量是 x , 定义域是 Y , 值域是 X . 称之为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$.

相应地, 原来的函数 $y = f(x)$ 叫做直接函数.

显见, 若 $x = f^{-1}(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 则 $y = f(x)$ 是 $x = f^{-1}(y)$ 的反函数, 即它们互为反函数. $x = f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y = f(x)$ 的值域和定义域. 并且不难知道 $f^{-1}(f(x)) = x, x \in X; f(f^{-1}(y)) = y, y \in Y$.

注意到在 $x = f^{-1}(y)$ 中, y 是自变量, x 是因变量, 由于习惯上常用 x 作为自变量, y 作为因变量, 因此, 反函数 $x = f^{-1}(y), y \in Y$ 常记作 $y = f^{-1}(x), x \in Y$.

关于反函数还有一些常用结论:

(1) $y = f(x)$ (定义域为 X , 值域为 Y) 存在反函数 $y = f^{-1}(x) (x \in Y)$ 的充分条件是函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上单调(增加或减少), 并且函数 $y = f(x) (x \in X)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x) (x \in Y)$ 的单调性一致.

(2) 若 $y = f(x), x \in X$ 存在反函数 $y = f^{-1}(x)$, 则在同一直角坐标系 xOy 中, $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的函数图形关于直线 $y = x$ 对称.

这是因为若点 $P(a, b)$ 是 $y = f(x)$ 的函数图形上的点, 即 $b = f(a)$, 由反函数定义知, $a = f^{-1}(b)$, 因此点 $Q(b, a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 的函数图形上的点; 反之, 若点 $Q(b, a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 的函数图形上的点, 则 $P(a, b)$ 是 $y = f(x)$ 的函数图形上的点. 因点 $P(a, b)$ 与 $Q(b, a)$ 关于直线 $y = x$ 对称(即直线 $y = x$ 垂直平分线段 PQ), 故上述结论(2)正确(图1-2).

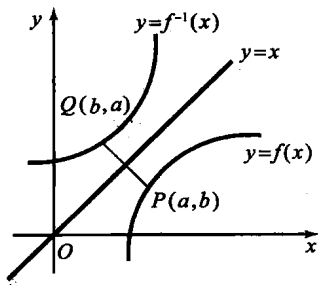


图1-2

【例9】 求下列函数的反函数:

$$(1) y = 2^x + 1; (2) f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$