中国数学奥林匹克协作体学校培训教材

高中奥数专题讲座与模拟训练

主　编　孙先亮　严贤付　邹　明

顾　问　裘宗沪　吴建平

编　者　方牡丹　徐　瑢　于在洋　羊明亮
周建军　肖恩利　李　智　李海军
邰海峰　王　欣　王建中　李兴怀
周建新　杨　琦　郭希连　陈　健
丁振华　方廷刚　马云龙　张　军
周国栋

青岛出版社

序一

在老一辈数学家的倡导和众多数学工作者、数学教师的共同努力下，我国的数学奥林匹克活动得到了较好的发展，取得了丰硕的成果和丰富的经验。近年来出现的一个现象正在引起社会的关注：国内有一批很好的中学，她们把数学奥林匹克活动规范到学校校本课程之中。在这些学校，学生但凭兴趣学习数学，不必奔波于社会上各种“奥班”或“奥校”之间，学得很生动、很有效。这些学校实际上已成为数学和科学人才发现、国际数学奥林匹克选手成长的沃土，如中国人大附中、东北师大附中、湖北武钢三中、华中师大一附中、华东师大二附中、广东深圳中学、浙江镇海中学等学校，在 2006—2007 年的两届 IMO 中，均有两人次入选中国代表队。尤其令人兴奋的是，在这些学校参加过数学奥林匹克活动的学生差不多都是发展较全面、高考成绩最好的学生，而且进入大学学习后，其发展的优势更为明显。

数学奥林匹克也为发现数学人才作出了贡献。素有国际数学界最高荣誉之称的菲尔兹奖，其得主中不少人就曾在 IMO 初试啼声，如俄罗斯的 Gregori Margulis(1962 年获 IMO 银牌，1978 年获菲尔兹奖)；乌克兰的 Valdimir Drinfeld(1969 年获 IMO 金牌，1990 年获菲尔兹奖)；法国的 Jean-Christophe Yoccoz(1974 年获 IMO 金牌，1994 年获菲尔兹奖)；英国的 Richard Borcherds(1977 年获 IMO 金牌，1998 年获菲尔兹奖)；英国的 Timothy Gowers(1981 年获 IMO 金牌，1998 年获菲尔兹奖)；法国的 Laurant Lafforgue(1985 年获 IMO 银牌，2002 年获菲尔兹奖)。而 2006 年菲尔兹奖得主华裔天才陶哲轩，更是于 1986、1987 和 1988 年连续三次在 IMO 中获奖，其不满 13 岁就赢得金牌的纪录至今无人能破。

事实上，学生科学精神和创新品质的培养从来都是具体的教育活动。规范的数学奥林匹克活动体现的正是素质教育的要求，其中就渗透了丰富多彩的研究性学习。对数学奥林匹克活动这个客观存在，教育管理者和专家应本着实事求是的态度开展研究。

值得庆幸的是，国内一些在数学奥林匹克活动中成绩卓著的学校，为了探索数学科学人才发现与培养的规律、总结数学奥林匹克活动的经验和教训这个值得称道的目的，共同构筑了一个交流的平台——中国数学奥林匹克协作体学校(以下简称“协作体”)。协作体由东北师大附中、东北育才学校、哈尔滨师大附中、大连第二十四中学、中国人民大学附中、

清华大学附中、山东青岛二中、江苏盐城中学、上海中学、上海延安中学、复旦大学附中、福建福州一中、湖北黄冈中学、湖北武钢三中、华中师大一附中、湖南师大附中、湖南长沙一中、四川成都七中、华南师大附中、深圳中学等20所中学组成。协作体成立年8年，开展了一系列有意义的活动，如一年一度的数学夏令营，由中国数学奥委会的委员和协作体学校教师进行讲座和辅导。因此夏令营不仅给那些优秀的数学爱好者提供了交流学习心得的时空舞台，而且通过专家和教师的"教"，实现对教师的培训，促进了数学教师的成长。协作体在实践中显示出旺盛的生命力，较好地促进了中国数学奥林匹克活动和科学教育的健康发展。

第八届中国数学奥林匹克协作体夏令营将于2008年7月在福建省福州第一中学举办。本书收录的是本次夏令营的活动资料。不难看出，书中内容并不以难取胜，而是通过精选的材料帮助学生理解数学思想、方法，训练学生分析问题、解决问题的能力，因而具有很好的针对性和实用性。

随着科学技术的发展，数学的重要性会不断为人类所认识，年轻一代学习数学的热情会更加高涨。如何通过数学奥林匹克活动这种被广泛接受的形式更好地发现和培养数学和科学人才，无疑是一个很有价值的课题。祝愿协作体和所有有相同志趣的学校在数学和科学人才的发现与培养方面不断取得新的成果、新的经验。

裘宗沪

2009 年 6 月

序二

我所了解的中国数学奥林匹克协作体

1999年11月“全国高级中学校长委员会会议”在广州召开，会议期间，中国数学奥林匹克委员会约请有关学校的校长召开了一个小型研讨会，裘宗沪教授主持了这个会议，我当时也应邀参加了。有来自8个省份的16家学校参加：东北育才学校、上海中学、华南师大附中、湖南师大附中、武钢三中、大连第二十四中、人大附中，清华附中、青岛二中、盐城中学、复旦附中、上海延安中学、华中师大一附中、黄冈中学、长沙一中、深圳中学。

会议回顾了开展数学竞赛活动的历史并分析了现状，介绍了各自学校开设数学选修课及活动课的情况，交流探索了数学与科学人才发现和培养的规律，大家一致认为共同构筑一个平台是十分必要的，于是就有了“中国数学奥林匹克协作体”，中国数学奥林匹克委员会作为这个协助体的业务指导单位。

校长们为这个“俱乐部”制定了若干规则，明确了工作任务：

1. 每两年召开一次协作体学校校长会议，确定大政方针；每两年由两位校长共同担任轮值主席，负责实施这两年的工作(2000—2001年的轮值主席是东北育才学校和华南师大附中，2002—2003年的轮值主席是湖南师大附中和武钢三中，2004—2005年的轮值主席是清华附中和大连第二十四中，2006—2007年的轮值主席是华中师大一附中和深圳中学，2008—2009年的轮值主席是福州第一中学和青岛二中)。

2. 偶数年份召开一次部分校长参加的小会议，奇数年份召开全体成员学校校长参加的大会议，以便确定未来的发展方针(我记得参加了2002年至2006年召开的五次会议，2007年由于全国高中数学联赛试卷复评工作会议与在深圳中学召开的校长会冲突而未能参加)。

3. 每年3月份在中国国家集训队选拔活动期间，各成员学校选派两名学生单独组成一个训练班，并且确定协作体学校的五位老师组成教练组，一方面协助国家教练组的工作，一方面也让这些老师增强交流与合作。

4. 每年暑假举办一次协作体内部的高中数学夏令营，出版或汇编由各成员学校提供的专题讲座、模拟试题，供协作体成员校使用。本书就是由这次夏令营的举办方福州一中组织出版的。

在2003年9月长沙召开第三次协作体成员校校长会议上，增补福州一中和东北师大

附中为新成员，至此协作体成员校达到了 18 家，涉及 10 个省份。

在 2005 年 10 月大连召开的第四次协作体成员校校长会议上，增补成都七中和哈师大附中为新成员，至此协作体成员校达到了 20 家，涉及 12 个省份。

9 年来（2000 年至 2008 年），协作体的工作在成员学校各位领导的关心支持和老师们的悉心努力下，取得了令人瞩目的成绩，为我国的数学奥林匹克事业作出了显著的贡献，从下面的数据（截至 2008 年）可略见一斑，在参加 IMO 的中国代表队 54 人次中有 37 人次来自“协作体”成员校：

2000 年	2001 年	2002 年	2003 年	2004 年	2005 年	2006 年	2007 年	2008 年
华南师大附中	东北育才学校	东北育才学校	华南师大附中	华南师大附中	上海复旦附中	深圳中学	深圳中学	北京人大附中
华南师大附中	湖北武钢三中	武钢三中	武钢三中	上海中学	深圳中学	东北师大附中	东北师大附中	上海中学
上海中学	湖南师大附中	湖南师大附中	湖南师大附中	华南师大附中	天津耀华中学	天津耀华中学	人大附中	华中师大一附中
长沙一中	湖南长沙一中	清华附中	长沙一中	湖南师大附中	华东师大二附中	武钢三中	湖南师大附中	华东师大二附中
湖北黄冈中学	北京人大附中	华东师大二附中	清华附中	黄冈中学	江西师大附中	华中师大一附中	武钢三中	山东师大附中
江苏常州中学	江苏启东中学	西安铁一中	四川彭州中学	江西鹰潭一中	石家庄二中	浙江镇海中学	浙江镇海中学	浙江嘉兴一中

衷心祝愿中国数学奥林匹克协作体不断取得新的成绩。

2009 年 6 月 16 日

目　　录

专题讲座

1. 函数方程与迭代

华中师大一附中　方牡丹

一、迭代法

先看一个有趣的问题：李政道博士 1979 年 4 月到中国科技大学，给少年班的同学面试这样一道题：

5 只猴子分一堆桃子，怎么也平分不了，于是大家同意先去睡觉，明天再说. 夜里一只猴子偷偷起来，把一个桃子吃掉后正好可以分成 5 份，收藏起自己的一份后又去睡觉了. 第二只猴子起来后，像第一只猴子一样，先吃掉一个，剩下的又刚好分成 5 份，也把自己的一份收藏起来睡觉去了. 第三、第四、第五只猴子也都是这样：先吃掉一个，剩下的刚好分成 5 份，然后拿走自己的一份. 问这堆桃子最少是多少个？

设桃子的总数为 x 个. 第 i 只猴子吃掉一个并拿走一份后，剩下的桃子数目为 x_i 个，则

$x_i=\frac{4}{5}(x_{i-1}-1)$，$i=1,2,3,4,5$ 且 $x_0=x$. 设 $f(x)=\frac{4}{5}(x-1)=\frac{4}{5}(x+4)-4$. 于是

$$x_1=f(x)=\frac{4}{5}(x+4)-4,$$

$$x_2=f(f(x))=\left(\frac{4}{5}\right)^2(x+4)-4,$$

$$x_3=f(f(f(x)))=\left(\frac{4}{5}\right)^3(x+4)-4,$$

$$x_4=f(f(f(f(x))))=\left(\frac{4}{5}\right)^4(x+4)-4,$$

$$x_5=f(f(f(f(f(x)))))=\left(\frac{4}{5}\right)^5(x+4)-4.$$

由于剩下的桃子数都是整数，所以，$5^5\mid x+4$. 因此，最小的 x 为：$x=5^5-4=3121$.

上面的解法，我们利用了一个函数自身复合多次，这就叫迭代. 一般的，设 $f:D\to D$ 是一个函数，对 $\forall x\in D$，记 $f^{(0)}(x)=x$，$f^{(1)}(x)=f(x)$，$f^{(2)}(x)=f(f(x))$，…，$f^{(n+1)}(x)=f(f^{(n)}(x))$，$n\in\mathbf{N}^*$，则称函数 $f^{(n)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次迭代，并称 n 为 $f^{(n)}(x)$ 的迭代指数. 反函数记为 $f^{(-n)}(x)$.

一些简单函数的 n 次迭代如下：

(1) 若 $f(x)=x+c$，则 $f^{(n)}(x)=x+nc$；

(2) 若 $f(x)=ax$，则 $f^{(n)}(x)=a^nx$；

(3) 若 $f(x)=x^a$，则 $f^{(n)}(x)=x^{a^n}$；

(4) 若 $f(x)=\frac{x}{1+ax}$，则 $f^{(n)}(x)=\frac{x}{1+nax}$；

(5) 若 $f(x)=ax+b(a\neq1)$，则 $f^{(n)}(x)=a^nx+\frac{1-a^n}{1-a}b$.

$f^{(n)}(x)$ 的一般解法是先猜后证法：先迭代几次，观察规律并猜测表达式，证明时常用数学归纳法.

1. 求迭代后的函数值.

例 1　已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f^{(10)}(x)=1024x+1023$，求 $f(x)$ 的解析式.

解：设 $f(x)=ax+b$，则

$$f^{(10)}(x)=a^{10}\left(x-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a}.$$

故 $a^{10}\left(x-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a}=1024x+1023$.

比较上式两边系数，得

$$\begin{cases}a^{10}=1024,\\ -\frac{a^{10}b}{1-a}+\frac{b}{1-a}=1023.\end{cases}$$

解方程组得

$a_1=2,b_1=1$；$a_2=-2,b_2=-3$.

因此，所求的一次函数为 $f(x)=2x+1$ 或 $f(x)=-2x-3$.

例 2　自然数 k 的各位数字和的平方记为 $f_1(k)$，且 $f_n(k)=f_1[f_{n-1}(k)]$，则 $f_n(11)(n\in\mathbf{N}^*)$ 的值域为　(　　)

A. $\mathbf{N}^*$

B. 5

C. $\{4,16,49,169,256\}$

D. $\{2,4,7,13,16\}$

解:由条件可知:

$f_1(11)=(1+1)^2=4$;$f_2(11)=f_1(4)=4^2=16$;

$f_3(11)=f_1(16)=(1+6)^2=49$;$f_4(11)=f_1(49)=(4+9)^2=169$;

$f_5(11)=f_1(169)=(1+6+9)^2=256$;$f_6(11)=f_1(256)=(2+5+6)^2=169$;$\cdots$

所以 $f_n(11)(n\in\mathbf{N}^*)$的值域为$\{4,16,49,169,256\}$.

例3 设 $f_1(x)=\dfrac{2}{x+1}$,而 $f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)]$,$n\in\mathbf{N}^*$. 记 $a_n=\dfrac{f_n(2)-1}{f_n(2)+2}$,则 $a_{99}=$________.

解:因为 $f_1(2)=\dfrac{2}{3}$,所以 $a_1=-\dfrac{1}{8}$,而

$$f_n(2)=\frac{2}{f_{n-1}(2)+1},$$

所以$\dfrac{f_n(2)-1}{f_n(2)+2}=\dfrac{\dfrac{2}{f_{n-1}(2)+1}-1}{\dfrac{2}{f_{n-1}(2)+1}+2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f_{n-1}(2)-1}{f_{n-1}(2)+2}$. 即 $a_n=-\dfrac{1}{2}a_{n-1}$,

故 $a_{99}=-\dfrac{1}{8}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{98}=-\dfrac{1}{2^{101}}$.

例 4 求解函数方程:$f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)+f\left(-\dfrac{1}{x}\right)+f\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\cos x(x\neq0,\pm1)$

解:设 $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$,则 $g^{(4)}(x)=g(g(g(g(x))))=x$ 并且 $g^{(2)}x=g(g(x))=-\dfrac{1}{x}$,

$g^{(3)}x=g(g(g(x)))=\dfrac{1+x}{1-x}$,于是原方程变为:$f[g(x)]+f[g^{(2)}x]+f[g^{(3)}(x)]=\cos x$. ①

令 $x=g(x)$得:$f[g^{(2)}(x)]+f[g^{(3)}(x)]+f(x)=\cos g(x)$. ②

令 $x=g^{(2)}(x)$得:$f[g^{(3)}(x)]+f(x)+f[g(x)]=\cos g^{(2)}(x)$. ③

令 $x=g^{(3)}(x)$得:$f(x)+f[g(x)]+f[g^{(2)}(x)]=\cos g^{(3)}(x)$. ④

由①②③④得:$3f(x)=\cos g(x)+\cos g^{(2)}(x)+\cos g^{(3)}(x)-2\cos x$,$\therefore$ $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{x-1}{x+1}+\cos\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1+x}{1-x}-2\cos x\right)$.

2. 不动点法.

一般的,若 $f(x)=ax+b$,则把它写成

$$f(x)=a\left(x-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a},$$

因而 $f^{(2)}(x)=a^2\left(x-\dfrac{b}{1-a}\right)+\dfrac{b}{1-a}$,

$$f^{(3)}(x)=a^3\left(x-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a},$$

……

$$f^{(n)}(x)=a^n\left(x-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a}.$$

这里的$\dfrac{b}{1-a}$就是方程 $ax+b=x$ 的根. 一般地,方程 $f(x)=x$ 的根称为函数 $f(x)$的不动点.

如果 x_0 是函数 $f(x)$的不动点,则 x_0 也是 $f^{(n)}(x)$的不动点. 可用数学归纳法证明. 利用不动点能较快地求得函数 $f(x)$的 n 次迭代式.

例 5 若 $f(x)=\sqrt{19x^2+93}$,求 $f^{(n)}(x)$.

解:先求 $f(x)$的不动点. 由

$\sqrt{19x^2+93}=x$,得 $x^2=-\dfrac{31}{6}$. 所以

$$f(x)=\sqrt{19\left(x^2+\frac{31}{6}\right)-\frac{31}{6}},$$

$$f^{(2)}(x)=\sqrt{19^2\left(x^2+\frac{31}{6}\right)-\frac{31}{6}},$$

……

由归纳法,得 $f^{(n)}(x)=\sqrt{19^n\left(x^2+\dfrac{31}{6}\right)-\dfrac{31}{6}}$.

例 6 设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq0,ad\neq bc)$,求 $f^{(n)}(x)$.

解:分两种情况.

(1) 若 $f(x)=x$ 有两个不相等的不动点 x_1,x_2,则取 $g(x)=\dfrac{a-cx_1}{a-cx_2}x$,$\varphi(x)=\dfrac{x-x_1}{x-x_2}$,于是 $f(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$.

(2) 若 $f(x)=x$ 有唯一的不动点 x_0,则取

$g(x)=x+\frac{2c}{a+d},\varphi(x)=\frac{1}{x-x_0}$.

同样有 $f(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$.

下面给出(1)、(2)的证明.

对于(1),由$\frac{ax+b}{cx+d}=x$,得

$cx^2+(d-a)x-b=0$.

故 $x_1+x_2=\frac{a-d}{c},x_1x_2=-\frac{b}{c}$.

又 $\varphi(x)=\frac{x-x_1}{x-x_2}$,所以 $\varphi^{-1}(x)=\frac{x_1-x_2x}{1-x}$,

于是 $\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))=\varphi^{-1}\left(g\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)\right)$

$=\varphi^{-1}\left(\frac{a-cx_1}{a-cx_2}\cdot\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)$

$=\dfrac{x_1-\frac{a-cx_1}{a-cx_2}\cdot\frac{x-x_1}{x-x_2}\cdot x_2}{1-\frac{a-cx_1}{a-cx_2}\cdot\frac{x-x_1}{x-x_2}}$

$=\frac{ax-x_1x_2c}{cx+a-c(x_1+x_2)}$

$=\frac{ax+b}{cx+d}=f(x)$.

对于(2),$x_0=\frac{a-d}{2c}$,且 $d^2+a^2-2da+4bc=0$.

$\because\ \varphi(x)=\frac{1}{x-x_0}$,$\therefore\ \varphi^{-1}(x)=\frac{1}{x}+x_0$.

于是 $\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))=\varphi^{-1}\left(g\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)=\varphi^{-1}\left(\frac{1}{x-x_0}+\frac{2c}{a+d}\right)=\frac{(a+d)(x-x_0)}{a+d+2c(x-x_0)}+x_0=\frac{ax+b}{cx+d}=f(x)$.

3. 相似法.

若存在一个函数 $\varphi(x)$ 以及它的反函数 $\varphi^{-1}(x)$,使得 $f(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$,我们称 $f(x)$通过 $\varphi(x)$和 $g(x)$相似,简称 $f(x)$和$g(x)$相似,其中 $\varphi(x)$称为桥函数.

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相似,即 $f(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$,则有:$f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$.

例 6 若 $f(x)=2x^2-1$,求 $f^{(n)}(x)$.

解:令 $g(x)=2x,\varphi(x)=\arccos x$,

则 $\varphi^{-1}(x)=\cos x$.

$f(x)=2x^2-1=2\cos^2(\arccos x)-1$

$=\cos2(\arccos x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$.

所以 $f^{\varphi}\sim g$. 而 $g^{(n)}(x)=2^nx$,因此

$f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$

$=\cos(2^n\arccos x)$.

例 7 设 $p(x)=x^2-2$,试证对任意正整数 n,方程 $p^{(n)}(x)=x$ 的根全是相异实根.

证:先看 $p^{(n)}(x)=x$ 且 $x\in[-2,2]$时的情形.

当 $x\in[-2,2]$时,令 $x=2\cos t,t=\arccos\frac{x}{2}$. 设 $g(x)=2x,t=p(x)=\arccos\frac{x}{2}$,则 $\varphi^{-1}(x)=2\cos x$,于是

$\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))=\varphi^{-1}\left(g\left(\arccos\frac{x}{2}\right)\right)$

$=\varphi^{-1}\left(2\arccos\frac{x}{2}\right)=2\cos\left(2\arccos\frac{x}{2}\right)$

$=2\left(2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2-1\right)=x^2-2=p(x)$.

所以 $p(x)\sim g(x)$. 于是

$p^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$

$=2\cos\left(2^n\arccos\frac{x}{2}\right)$.

于是方程 $p^{(n)}(x)=x\quad(x\in[-2,2])$变为 $2\cos\left(2^n\arccos\frac{x}{2}\right)=x,2\cos(2^nt)=2\cos t$,$(t\in[0,\pi])$. $\cos(2^nt)=\cos t$.

解方程,得 $t=\frac{2l\pi}{2^n-1}$或 $t=\frac{2m\pi}{2^n+1}$ $(m,l\in\mathbf{Z})$.

所以方程 $p^{(n)}(x)=x$ 在$[-2,2]$中有 2^n 个不同的实根 $x=2\cos\frac{2l\pi}{2^n-1},l=1,2,\cdots,2^{n-1}-1,x=2\cos\frac{2m\pi}{2^n+1},m=1,2,\cdots,2^{n-1}$.

$p^{(n)}(x)$是 2^n 次多项式,$p^{(n)}(x)=x$ 至多有 2^n 个实根,故知方程 $p^{(n)}(x)=x$ 的所有根都是实数且各不相同.

二、函数方程的一般解法

函数方程的变化多,求解技巧性很强,往往涉及不同领域的数学知识,特别是附加了条件的函数,更是五花八门,各有巧妙. 迭代只是其中的一种方法,在高中数学各级竞赛中,都有可能会遇到函数方程的问题,还有可能会用到观察法、代换法、柯西法、赋值法(特殊值法)

等几种典型的求解函数的方法. 如:

1. 代换法.

例 8 (2007 年越南数学奥林匹克)设 b 是一个正实数,试求所有函数 f: R→R,使得 $f(x+y)=f(x)\cdot 3^{b^y+f(y)-1}+b^x(3^{b^y+f(y)-1})-b^{x+y}$ 对任意实数 x、y 均成立.

解:将原方程变形为: $f(x+y)+b^{x+y}=(f(x)+b^x)\cdot 3^{b^y+f(y)-1}\quad(x,y\in\mathbf{R})$, ①

令 $g(x)=f(x)+b^x$,则①等价于 $g(x+y)=g(x)\cdot 3^{g(y)-1}\quad(x,y\in\mathbf{R})$, ②

在②中令 $y=0$ 得 $g(x)=g(x)\cdot 3^{g(0)-1}$ $(x\in\mathbf{R})$,这表明 $g(x)=0$ 或 $g(0)=1$.

(1) 若 $g(x)=0$ $(x\in\mathbf{R})$,则 $f(x)=-b^x$.

(2) 若 $g(0)=1$,在②式中令 $x=0$ 得: $g(y)=g(0)\cdot 3^{g(y)-1}=3^{g(y)-1}$,

即 $3^{g(y)-1}-g(y)=0$ $(y\in\mathbf{R})$. ③

考虑函数 $h(t)=3^{t-1}-t$,它的导函数 $h'(t)=3^{t-1}\ln 3-1$,

则 $h'(t)=0\Leftrightarrow t=\log_3(\log_3 e)+1<1$,

于是可知 $h(t)=0$ 有两根 $t_1=1$ 和 $t_2=c$ $(0<c<1)$.

于是③式等价于 $g(y)=1$ 或 c $(y\in\mathbf{R}$, c 为满足 $0<c<1$ 的常量).

假设存在 $y_0\in\mathbf{R}$ 使 $g(y_0)=c$,则 $1=g(0)=g(y_0-y_0)=g(y_0)\cdot 3^{g(-y_0)-1}=c\cdot g(-y_0)$,

$\therefore g(-y_0)=-\dfrac{1}{c}\neq c$ 或 1,

$\therefore g(y_0)=c$ 矛盾,因此 $g(y)=1$ $(y\in\mathbf{R})$,

$\therefore f(x)=1-b^x$.

综上知: $f(x)=-b^x$ 和 $f(x)=1-b^x$.

说明:代换法是解函数方程最基本方法,很多函数方程中所特有的性质是通过代换法去发现的. 本题也是通过代换法打开了解题的思路.

2. 柯西法.

例 9 设 $f(x)$ 为定义在实数集 R 上的单调连续函数,试解函数方程 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$.

解:由 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$ 用归纳法得: $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=f(x_1+x_2+\cdots x_n)$,

当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时,

有 $[f(x)]^n=f(nx)$. ①

若 $x=1$, $f(n)=[f(1)]^n$,令 $f(1)=a$,得 $f(n)=a^n$.

在①式中令 $x=\dfrac{1}{n}$ 得: $\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=f(1)$.

因 $f(x)$ 定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上, n 是偶数时,必有 $f(1)\geqslant 0$,这样 $a\geqslant 0$, $\therefore f\left(\dfrac{1}{n}\right)=a^{\frac{1}{n}}$.

若 m 为正整数,利用上式得:

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m=(a^{\frac{1}{n}})^m=a^{\frac{m}{n}}.$$

在原方程中,令 $y=0$ 有: $f(x)\cdot f(0)=f(x)$,因 $f(x)$ 单调且 $f(x)$ 不恒为 0,

$\therefore f(0)=1=a^0$.

在原方程中,令 $y=-x$,有 $y=-x=-\dfrac{m}{n}$ $(n,m\in\mathbf{N})$,则有 $f\left(-\dfrac{m}{n}\right)\cdot f\left(\dfrac{m}{n}\right)=f(0)$,即 $f\left(-\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{m}{n}\right)}=(a^{\frac{m}{n}})^{-1}=a^{-\frac{m}{n}}$(又因为 $f\left(-\dfrac{m}{n}\right)$ 有意义, $\therefore a>0$).

这样,我们便在有理数集内求得了函数方程 $f(x)=a^x(a>0)$,

又因 $f(x)$ 单调,不能恒为 1,则 $f(x)=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 为指数函数.

当 $a=\alpha$ 为无理数,设 $a_i<\alpha<b_i$ 且 a_i, b_i 为无限接近于 α 的有理数,

则由 $f(x)$ 单调知 $f(\alpha)=a^\alpha$, $\therefore$ 原方程的解为 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

说明:柯西法是由解柯西方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 而归纳出来的方法.

3. 特殊值法.

例 10 (2008 年 IMO 第 4 题)求所有的函数 f: $(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足对所有的正实数 ω,x,y,z, $\omega x=yz$ 都有: $\dfrac{(f(\omega))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\dfrac{\omega^2+x^2}{y^2+z^2}$.

解:令 $\omega=x=y=z=1$ 得: $(f(1))^2=f(1)\Rightarrow f(1)=1$.

对任意 $t>0$，令 $\omega=t,x=1,y=z=\sqrt{t}$ 得：$\frac{(f(t))^2+1}{2f(t)}=\frac{t^2+1}{2t}$，

去分母整理：$(tf(t)-1)(f(t)-t)=0$，所以对每个 $t>0$ 有 $f(t)=t$ 或者 $f(t)=\frac{1}{t}$. ①

若存在 $b,c\in(0,+\infty)$，使得 $f(b)\neq b$，$f(c)\neq\frac{1}{c}$，则由①知，b,c 都不等于 1，且 $f(b)=\frac{1}{b}$，$f(c)=c$. 令 $\omega=b,x=c,y=z=\sqrt{bc}$，则

$$\frac{\frac{1}{b^2}+c^2}{2f(bc)}=\frac{b^2+c^2}{2bc}，所以\ f(bc)=\frac{c+b^2c^3}{b(b^2+c^2)}.$$

又因 $f(bc)=bc$ 或者 $f(bc)=\frac{1}{bc}$，若 $f(bc)=bc$，则 $bc=\frac{c+b^2c^3}{b(b^2+c^2)}\Rightarrow b^4c=c\Rightarrow b=1$ 矛盾；

若 $f(bc)=\frac{1}{bc}$，则 $\frac{1}{bc}=\frac{c+b^2c^3}{b(b^2+c^2)}\Rightarrow b^2c^4=b^2\Rightarrow c=1$ 矛盾.

所以 $f(x)=x(x\in(0,+\infty))$ 或者 $f(x)=\frac{1}{x}(x\in(0,+\infty))$ 经检验满足.

4. 观察函数特有的性质并利用其解题.

函数的性质包括单调性、奇偶性、周期性及所具有的特殊形式，在解题的过程中需要对其进行观察判断并利用其解决问题.

例 11 （2007 年日本数学奥林匹克决赛）求定义域为正实数集，值域为实数集的函数 f，满足：$f(x)+f(y)\leqslant\frac{f(x+y)}{2}$，$\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}\geqslant\frac{f(x+y)}{x+y}$，其中 x、y 为任意实数.

解：令 $x=y=t(t>0)$，$\therefore 4f(t)\leqslant f(2t)$ 及 $4f(t)\geqslant f(2t)$，$\therefore f(2t)=4f(t)(t>0)$.

重复应用这个等式 m 次得：$f(2^mt)=2^{2m}f(t)$.

再令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，下面证明对任意的正整数 n 和任意的正实数 t，有 $g(nt)=ng(t)$.

显然当 $n=2^m$ 时，命题成立. 又因为题中第二个不等式等价于 $g(x)+g(y)\geqslant g(x+y)$，

所以，对任意的 n、t 有 $g(nt)\leqslant g(t)+\cdots+g(t)=ng(t)$，若取 $m(m\in\mathbf{N}_+)$，满足 $2^m>n$，

则：$g(2^mt)\leqslant g(nt)+g((2^m-n)t)\leqslant ng(t)+(2^m-n)g(t)=2^mg(t)$

另一方面，有 $g(2^mt)=2^mg(t)$，故上式中不等式号均为等号，即 $g(nt)+g((2^m-n)t)=ng(t)+(2^m-n)g(t)$，

因此必有 $g(nt)=ng(t)$. ①

再证明 g 为单调不增函数.

对于正实数 t，有 $f(t)+f(2t)\leqslant\frac{f(t+2t)}{2}$，

由于 $f(t)=tg(t)\Rightarrow f(2t)=2tg(2t)=4tg(t)$，

$f(3t)=3tg(3t)=9tg(t)$，则 $5tg(t)\leqslant\frac{9}{2}tg(t)\Rightarrow g(t)\leqslant 0$.

故对于所有的 x,y $(0<x<y)$，有 $g(x)\geqslant g(x)+g(y-x)\geqslant g(y)$，

故 g 为单调不增函数. ②

设 $g(1)=a\leqslant 0$，接下来证明 $g(t)=at$ $(t>0)$.

反设对正实数 t 有 $g(t)<at$，则存在一个有理数 $\frac{p}{q}$ $(p,q\in\mathbf{N}_+)$ 满足 $\frac{p}{q}>t$ 及 $g(t)<\frac{p}{q}a$；另一方面：由 $g\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}g(p)=\frac{p}{q}g(1)=\frac{p}{q}a$，有 $g(t)<g\left(\frac{p}{q}\right)$ 与 $\frac{p}{q}>t$ 及 g 的单调不增矛盾，同理若 $g(t)>at$，也得到矛盾，因此，对于正实数 t，有 $g(t)=at$.

从而，$f(x)=xg(x)=ax^2(a\leqslant 0)$，对于这样的 f，有 $f(x)+f(y)-\frac{f(x+y)}{2}=\frac{a}{2}(x-y)^2\leqslant 0$，$\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}-\frac{f(x+y)}{x+y}=0$ 均满足.

$\therefore f(x)=ax^2$ 为所求.

说明：该题关键是抓住函数具有①②两个特有特征而对此进行解答. 抓住函数特征和性质来求解函数方程问题，是最常用的方法.

本讲从 5 个角度来讨论了求解函数方程的方法，在解答函数方程的问题时，这几个方法用的较为平凡，希望大家在平时学习中注意总结与归纳，函数方程问题在国内外各级竞赛中要求都比较高，望引起大家重视.

2. 数列与递推

江苏省盐城中学 徐 瑢

一、知识要点

1. 等差数列.

(1) 定义：$a_{n+1}-a_n=d$(常量)或 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$.

(2) 通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$.

(3) 前 n 项和公式：$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

(4) 任意两项 a_n,a_m 有 $a_n=a_m+(n-m)d$.

(5) 对于任意正整数 m,n,k,l，若 $m+n=k+l$，则 $a_m+a_n=a_k+a_l$. 反之不行.

(6) 若 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均是等差数列，则 $\{ca_n+db_n\}$ 也是等差数列. $(c,d\in\mathbf{R})$

2. 等比数列.

(1) 定义：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(常量)或 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(2) 通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$.

(3) 前 n 项和公式：

$$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq1)\end{cases}.$$

(4) 任意两项 a_n,a_m 有 $a_n=a_mq^{n-m}$.

(5) 对于任意正整数 m,n,k,l，若 $m+n=k+l$，则 $a_na_m=a_ka_l$.

(6) 无穷递缩等比数列所有项和公式：

$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}(0<|q|<1)$.

3. 数列求和.

方法主要有裂项求和、错位相减、倒序相加、分组求和等.

4. 一些常用递归数列的通项.

(1) 形如 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 的一阶递归式，其通项求法为

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k).$$

(累加法)

(2) 形如 $a_{n+1}=f(n)a_n$ 的递归式，其通项求法为

$$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=a_1\cdot f(1)f(2)f(3)\cdots f(n-1)(n\geqslant2).$$

(累积法)

(3) 形如 $a_{n+1}=pa_n+q(p\neq1)$ 的递归式，

法一： 由 $a_{n+1}=pa_n+q$ 及 $a_n=pa_{n-1}+q$，两式相减得 $a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1})$，

有 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首项为 a_2-a_1 且公比为 p 的等比数列，先求出 $a_{n+1}-a_n$，再求出 a_n.

法二： 若 $p=1$，则显然是以 a_1 为首项，q 为公差的等差数列；

若 $p\neq1$，则两边同时加上 $\frac{q}{p-1}$，变为 $a_{n+1}+\frac{q}{p-1}=p\left(a_n+\frac{q}{p-1}\right)$，

显然是以 $a_1+\frac{q}{p-1}$ 为首项，p 为公比的等比数列，此法叫做特征根法.

(4) 形如 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 的递归式，其中 $f(n)$ 不是常数，

若 $p=1$，则显然 $a_n=a_1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}f(i)$，$n\geqslant2$；

若 $p\neq1$，则两边同时除以 p^{n+1}，变形为 $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{f(n)}{p^{n+1}}$，令 $b_n=\frac{a_n}{p^n}$，得 $b_{n+1}=b_n+\frac{f(n)}{p^{n+1}}$，求 b_n，再求 a_n.

即利用累加法易得 $\frac{a_n}{p^n}=\frac{a_1}{p}+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{f(i)}{p^{i+1}}$，从

而 $a_n=p^{n-1}\left[a_1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{f(i)}{p^i}\right]$.

(5) 形如 $a_{n+1}=pa_n^q(p>0,a_n>0)$ 的递归式，两边取对数有 $\lg a_{n+1}=q\lg a_n+\lg p$，

令 $b_n=\lg a_n$，则 $b_{n+1}=qb_n+\lg p$，仿(3)得 b_n，再求 a_n.

(6) 特征根法：

① $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$，特征方程为 $x^2=px+q$，令其两根为 x_1,x_2，则其通项公式为 $a_n=A\cdot x_1^n+B\cdot x_2^n$，$A,B$ 用待定系数法求得.

② $a_{n+3}=pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n$，特征方程为 $x^3=px^2+qx+r$，令其三根为 x_1,x_2,x_3，

则其通项公式为 $a_n=A\cdot x_1^n+B\cdot x_2^n+C\cdot x_3^n$，$A,B,C$ 用待定系数法求得.

(7) 不动点法：

当 $f(x)=x$ 时，x 的取值称为不动点，不动点是我们在竞赛中解决递推式的基本方法.

典型例子：$a_{n+1}=\frac{a\cdot a_n+b}{c\cdot a_n+d}$，令 $x=\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$，即 $cx^2+(d-a)x-b=0$，令此方程的两个根为 x_1,x_2，若 $x_1=x_2$，则有 $\frac{1}{a_{n+1}-x_1}=\frac{1}{a_n-x_1}+p$，其中 p 可以用待定系数法求解为 $p=\frac{2c}{a+d}$，然后利用等差数列通项公式求解.

若 $x_1\neq x_2$，则有 $\frac{a_{n+1}-x_1}{a_{n+1}-x_2}=q\cdot\frac{a_n-x_1}{a_n-x_2}$，其中 q 可以用待定系数法求解为 $q=\frac{a-cx_1}{a-cx_2}$，然后利用等比数列通项公式求解.

二、范例选讲

(一) 递推数列

例 1 (2004 年四川预赛)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_n=2a_{n-1}+n-2(n\geqslant 2)$，求通项 a_n.

解：由已知可得：$a_n+n=2(a_{n-1}+n-1)(n\geqslant 2)$，令 $b_n=a_n+n$，则 $b_1=a_1+1=2$ 且 $b_n=2b_{n-1}(n\geqslant 2)$.

于是 $b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，即 $a_n+n=2^n$，故 $a_n=2^n-n(n\geqslant 2)$，

因为 $a_1=1$ 也适合上述式子，所以 $a_n=2^n-n(n\geqslant 1)$.

例 2 (2004 年江苏夏令营)已知函数 $f(n)=k$，k 是循环小数 $0.\dot{9}1827364\dot{5}$ 的小数点后的第 n 位数字，则 $\underbrace{f\{f\cdots f[f(1)]\}}_{2004\text{个}f}$ 的值为 ( )

A. 9 B. 8 C. 7 D. 3

解：易得 $f_{9s+t}(1)=f_t(1),s,t\in\mathbf{N}^*$，

$f_{2004}(1)=f_6(1)=8$，选(B).

例 3 (2004 年全联赛)已知数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足关系式 $(3-a_{n+1})(6+a_n)=18$ 且 $a_0=3$，则 $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}$ 的值是________.

解：设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，$n=0,1,2,\cdots$，则

$\left(3-\frac{1}{b_{n+1}}\right)\left(6+\frac{1}{b_n}\right)=18$，

即 $3b_{n+1}-6b_n-1=0$.

$\therefore b_{n+1}=2b_n+\frac{1}{3},b_{n+1}+\frac{1}{3}=2\left(b_n+\frac{1}{3}\right)$，

故数列 $\left\{b_n+\frac{1}{3}\right\}$ 是公比为 2 的等比数列，

$b_n+\frac{1}{3}=2^n\left(b_0+\frac{1}{3}\right)=2^n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\times 2^{n+1}$，$\therefore b_n=\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)$.

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=\sum_{i=0}^{n}b_i=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{3}(2^{i+1}-1)=\frac{1}{3}\left[\frac{2(2^{n+1}-1)}{2-1}-(n+1)\right]=\frac{1}{3}(2^{n+2}-n-3).$$

例 4 (第 22 届 IMO 预选)数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_{n+1}=\frac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$. 求 a_n.

解：构建新数列 $\{b_n\}$，使 $b_n=\sqrt{1+24a_n}>0$，则 $b_1=5,b_n^2=1+24a_n$，即 $a_n=\frac{b_n^2-1}{24}$.

$\therefore \frac{b_{n+1}^2-1}{24}=\frac{1}{16}\left(1+4\times\frac{b_n^2-1}{24}+b_n\right)$，化简

得$(2b_{n+1})^2=(b_n+3)^2$，$\therefore 2b_{n+1}=b_n+3$，

即$b_{n+1}-3=\frac{1}{2}(b_n-3)$，则数列$\{b_n-3\}$是以2为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

$b_n-3=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{2-n}$，即$b_n=2^{2-n}+3$，$\therefore a_n=\frac{b_n^2-1}{24}=\frac{2^{2n-1}+3\times 2^{n-1}+1}{3\times 2^{2n-1}}$.

点评：本题的难点是已知递推关系式中的$\sqrt{1+24a_n}$较难处理，可构建新数列$\{b_n\}$，令$b_n=\sqrt{1+24a_n}$，这样就巧妙地去掉了根式，便于化简变形.

例5 (2005年江苏冬令营)设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_0=1,b_0=0$，

且$\begin{cases}a_{n+1}=7a_n+6b_n-3, & ①\\ b_{n+1}=8a_n+7b_n-4. & ②\end{cases}$ $n=0,1,2,\cdots$

试求a_n.

解：由$a_0=1,b_0=0$，得$a_1=4,b_1=4,a_2=49$.

①×7：$7a_{n+1}=49a_n+42b_n-21$，

②×6：$6b_{n+1}=48a_n+42b_n-24$.

两式相减得$6b_{n+1}-7a_{n+1}=-a_n-3$，

即$6b_n=7a_n-a_{n-1}-3$.

代入①：$a_{n+1}=14a_n-a_{n-1}-6$.

故$a_{n+1}-\frac{1}{2}=14\left(a_n-\frac{1}{2}\right)-\left(a_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$.

其特征方程为$x^2-14x+1=0$，特征方程的解为$x=7\pm4\sqrt{3}$.

故$a_n=\alpha(7+4\sqrt{3})^n+\beta(7-4\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}$，

现$a_0=1,a_1=4,a_2=49$.解得$\alpha=\beta=\frac{1}{4}$.

得$a_n=\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n+\frac{1}{4}(7-4\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})^{2n}+\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})^{2n}+\frac{1}{2}=\left[\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n\right]^2$.

(二) 周期数列

例6 (1999年河南数学竞赛试题)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_2=2,a_na_{n+1}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，且$a_{n+1}a_{n+2}\neq1$.求$\sum\limits_{i=1}^{2006}a_i$.

解：$a_3=\frac{a_1+a_2}{a_1a_2-1}=3,a_4=\frac{a_2+a_3}{a_2a_3-1}=1$，

$a_5=\frac{a_3+a_4}{a_3a_4-1}=2$，而$a_na_{n+1}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，相减得$a_{n+3}-a_n=a_{n+1}a_{n+2}(a_{n+3}-a_n)$，即$(a_{n+3}-a_n)(a_{n+1}a_{n+2}-1)=0$.

因为$a_{n+1}a_{n+2}\neq1$，所以$a_{n+3}-a_n=0$，即$a_{n+3}=a_n$，所以$\{a_n\}$是以3为周期的周期数列.因为$a_1+a_2+a_3=6$，$2006\equiv2(\mathrm{mod}3)$，故$\sum\limits_{i=1}^{2006}a_i=6\times668+1+2=4011$.

例7 (2006年北京高考压轴题)在数列$\{a_n\}$中，若a_1,a_2是正整数，且$a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$，$n=3,4,5,\cdots$，则称$\{a_n\}$为“绝对差数列”.

(1) 举出一个前五项不为零的“绝对差数列”(只要求写出前十项)；

(2) 若“绝对差数列”$\{a_n\}$中，$a_{20}=3,a_{21}=0$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，$n=1,2,3,\cdots$，分别判断当$n\to\infty$时，a_n与b_n的极限是否存在，如果存在，求出其极限值；

(3) 证明：任何“绝对差数列”中总含有无穷多个为零的项.

解：(1) $a_1=3,a_2=1,a_3=2,a_4=1,a_5=1,a_6=0,a_7=1,a_8=1,a_9=0,a_{10}=1$.(答案不唯一.)

(2) 因为绝对差数列$\{a_n\}$中，$a_{20}=3,a_{21}=0$，所以自第20项开始，该数列是$a_{20}=3,a_{21}=0,a_{22}=3,a_{23}=3,a_{24}=0,a_{25}=3,a_{26}=3,a_{27}=0,\cdots$.

即自第20项开始，每三个相邻的项周期地取值3,0,3，所以当$n\to\infty$时，a_n的极限不存在.

当$n\geqslant20$时，$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=6$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=6$.

(3) 证明：根据定义，数列$\{a_n\}$必在有限项后出现零项，证明如下：

假设$\{a_n\}$中没有零项，由于$a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$，所以对于任意的n，都有$a_n\geqslant 1$，从而

当$a_{n-1}\geqslant a_{n-2}$时，$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}\leqslant a_{n-1}-1$ $(n\geqslant 3)$；

当$a_{n-1}<a_{n-2}$时，$a_n=a_{n-2}-a_{n-1}\leqslant a_{n-2}-1$ $(n\geqslant 3)$.

即a_n的值要么比a_{n-1}至少小1，要么比a_{n-2}至少小1.（即a_n比a_{n-1}和a_{n-2}中较大的那个至少小1，即数列$\{a_n\}$成递减趋势.）

令 $c_n=\begin{cases}a_{2n-1}(a_{2n-1}>a_{2n}),\\ a_{2n}(a_{2n-1}<a_{2n}),\end{cases}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，则$0<c_n\leqslant c_{n-1}-1(n=2,3,4,\cdots)$. 由于$c_1$是确定的正整数，这样减少下去，必然存在某项$c_i<0$，这与$c_n>0(n=1,2,3,\cdots)$矛盾，从而$\{a_n\}$必有零项.

若第一次出现的零项为第n项，即$a_n=0$，记$a_{n-1}=A(A\neq 0)$，则$a_{n+1}=A,a_{n+2}=0,\cdots$，故自第$n$项开始，每三个相邻的项周期地取值0，$A$，$A$，即$\begin{cases}a_{n+3k}=0,\\ a_{n+3k+1}=A,\\ a_{n+3k+2}=A\end{cases}$ $k=0,1,2,3,\cdots$，所以绝对差数列$\{a_n\}$中有无穷多个零的项.

（三）数列不等式的证明

例8 （2004年江苏夏令营）记$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2004}}$，求$S$的整数部分.

解：对$a>0,b>0$，

易证：$\frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$，

从而$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$，

$S<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots+\frac{1}{\sqrt{2003}}+\frac{1}{\sqrt{2004}}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2004}}\right)=\frac{1}{2}(-\sqrt{0}+\sqrt{1}-\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots-\sqrt{2003}+\sqrt{2004})=\frac{1}{2}\sqrt{2004}=\sqrt{501}$，$\therefore S<\sqrt{501}$；

另一方面，记$S'=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2002}+\sqrt{2003}}$，则$S'<S$，且$S'=-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{5}+\cdots-\sqrt{2002}+\sqrt{2003}$，

$S=-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots-\sqrt{2003}+\sqrt{2004}$，

$\therefore S+S'=\sqrt{2004}-1$，又$S'<S$，

$\therefore S>\frac{1}{2}(\sqrt{2004}-1)=\sqrt{501}-0.5$，

从而$\therefore \sqrt{501}-0.5<S<\sqrt{501}$，

$\therefore 22-0.5<S<23$，因此S的整数部分为22.

例9 （1990年匈牙利数学奥林匹克试题）设$a_0=1,a_n=\frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}$ $(n\in\mathbf{N})$，

求证：$a_n>\frac{\pi}{2^{n+2}}$.

证明：易知$a_n>0$，构建新数列$\{\alpha_n\}$，使$a_n=\tan\alpha_n,\alpha_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$则$a_n=\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha_{n-1}}-1}{\tan\alpha_{n-1}}=\frac{1-\cos\alpha_{n-1}}{\sin\alpha_{n-1}}=\tan\frac{\alpha_{n-1}}{2}$，

$\therefore \tan\alpha_n=\tan\frac{\alpha_{n-1}}{2},\alpha_n=\frac{\alpha_{n-1}}{2}$.

又$a_0=1,a_1=\sqrt{2}-1=\tan\frac{\pi}{8}$，

从而$\alpha_1=\frac{\pi}{8}$，

因此，新数列$\{\alpha_n\}$是以$\frac{\pi}{8}$为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，则$\alpha_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2^{n+2}}$，

考虑到当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，有$\tan x>x$.

所以，$a_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}>\frac{\pi}{2^{n+2}}$.

点评：利用待证的不等式中含有π及递推关系式中含有$\sqrt{1+a_{n-1}^2}$这两个信息，考虑进行三角代换，构建新数列$\{\alpha_n\}$，使$a_n=\tan\alpha_n$，化简

递推关系式. 对型如 $\sqrt{1\pm a_n^2}$，$\sqrt{1\pm a_n}$，$\frac{a_{n+1}\pm a_n}{1\pm a_na_{n+1}}$ 都可采用三角代换.

(四) 综合问题

例 10 (2004 年天津初赛)已知$\{a_n\}$是等差数列,d 为公差且不等于 0,a_1 和 d 均为实数,它的前 n 项和记作 S_n，设集合 $A=\left\{\left(a_n,\frac{S_n}{n}\right)|n\in\mathbf{N}^*\right\}$,$B=\left\{(x,y)|\frac{1}{4}x^2-y^2=1,x,y\in\mathbf{R}\right\}$,试问下列结论是否正确,如果正确,请给予证明;如果不正确,请举例说明.

(1) 若以集合 A 中的元素作为点的坐标,则这些点都在一条直线上;

(2) $A\cap B$ 至多有一个元素;

(3) 当 $a_1\neq0$ 时,一定有 $A\cap B\neq\varnothing$.

解:(1) 正确. 因为,在等差数列$\{a_n\}$中,$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$,所以,$\frac{S_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}$.

这表明点$\left(a_n,\frac{S_n}{n}\right)$的坐标适合方程 $y=\frac{1}{2}(x+a_1)$. 所以,点$\left(a_n,\frac{S_n}{n}\right)$均在直线 $y=\frac{1}{2}(x+a_1)$ 上.

(2) 正确. 设$(x,y)\in A\cap B$,则(x,y)坐标中的 x、y 应是方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a_1,\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1\end{cases}$ 的解.

解这个方程组,消去 y,得 $2a_1x+a_1^2=-4$.(∗)

当 $a_1=0$ 时,方程(∗)无解,此时 $A\cap B=\varnothing$.

当 $a_1\neq0$ 时,方程(∗)只有一个解 $x=\frac{-4-a_1^2}{2a_1}$,此时方程组也只有一个解,

即 $\begin{cases}x=\frac{-4-a_1^2}{2a_1},\\ y=\frac{a_1^2-4}{4a_1}.\end{cases}$ 故上述方程组至多有一解,所以 $A\cap B$ 至多有一个元素.

(3) 不正确. 取 $a_1=1$,$d=1$,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,有 $a_n=a_1+(n-1)d=n>0$,$\frac{S_n}{n}>0$.

这时集合 A 中的元素的点的横、纵坐标均为正.

另外,由于 $a_1=1\neq0$,如果 $A\cap B\neq\varnothing$,那么根据(2)的结论,$A\cap B$ 至多有一个元素(x_0,y_0),而 $x_0=\frac{-4-a_1^2}{2a_1}=-\frac{5}{2}<0$,$y_0=\frac{a_1^2-4}{4a_1}=-\frac{3}{4}<0$.

这样的$(x_0,y_0)\notin A$,产生矛盾. 所以,$a_1=1$,$d=1$ 时,$A\cap B=\varnothing$,

故 $a_1\neq0$ 时,一定有 $A\cap B=\varnothing$是不正确的.

例 11 (2005 年全国联赛)数列$\{a_n\}$满足:$a_0=1$,$a_{n+1}=\frac{7a_n+\sqrt{45a_n^2-36}}{2}$,$n\in\mathbf{N}$.

证明:(1) 对任意 $n\in\mathbf{N}$,a_n 为正整数;

(2) 对任意 $n\in\mathbf{N}$,$a_na_{n+1}-1$ 为完全平方数.

证明:(1) 由题设得 $a_1=5$ 且$\{a_n\}$严格单调递增. 将条件式变形得 $2a_{n+1}-7a_n=\sqrt{45a_n^2-36}$,两边平方整理得 $a_{n+1}^2-7a_na_{n+1}+a_n^2+9=0$. ①

∴ $a_n^2-7a_{n-1}a_n+a_{n-1}^2+9=0$. ②

①－②得$(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n)=0$,∵ $a_{n+1}>a_n$,∴ $a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n=0\Rightarrow a_{n+1}=7a_n-a_{n-1}$. ③

由③式及 $a_0=1$,$a_1=5$ 可知,对任意 $n\in\mathbf{N}$,a_n 为正整数.

(2) 将①两边配方,得$(a_{n+1}+a_n)^2=9(a_na_{n+1}-1)$,∴ $a_na_{n+1}-1=\left(\frac{a_{n+1}+a_n}{3}\right)^2$. ④

由③$a_{n+1}+a_n=9a_n-(a_{n-1}+a_n)\equiv-(a_n+a_{n-1})\pmod 3$,

∴ $a_{n+1}+a_n\equiv(-1)^n(a_1+a_0)\equiv0\pmod 3$,

∴ $\frac{a_{n+1}+a_n}{3}$为正整数④式成立.

∴ $a_na_{n+1}-1$ 是完全平方数.

例 12 (1990 年巴尔干地区数学奥林匹克试题)设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$a_2=3$,对一切 $n\in\mathbf{N}$,有 $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$,求所