机械优化设计

王国强　赵凯军　崔国华　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

机械优化设计

王国强　赵凯军　崔国华　编著

机械工业出版社

本书介绍了机械优化设计的基本理论和方法、优化设计工具软件及工程应用，同时还介绍了优化设计学科的前沿知识。主要内容有：优化设计概述、优化方法的数学基础、一维搜索方法、基于导数的优化方法、非导数优化方法、线性规划方法、优化设计实用技术、机械优化设计常用软件及优化设计应用实例。本书将优化设计基础理论、国际大型通用优化设计工具软件与工程应用实例密切结合，通过机械工程应用实例使读者掌握优化设计方法的实质内容及工程应用技巧。

本书可作为高等院校高年级本科生或研究生学习优化设计的教材，也可供企业或研究机构的科技工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

机械优化设计/王国强等编著．—北京：机械工业出版社，2009.8
ISBN 978-7-111-27959-4

Ⅰ．机…　Ⅱ．王…　Ⅲ．机械设计：最优设计　Ⅳ．TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 135256 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：刘本明　责任编辑：刘本明　版式设计：张世琴
责任校对：李秋荣　封面设计：姚　毅　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（兴文装订厂装订）
2009 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 13.25 印张 · 255 千字
0 001—4 000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-27959-4
定价：38.00 元

前　　言

机械优化设计将最优化原理和计算机技术应用于设计领域，为机械设计提供一套科学、系统、可靠、高效的理论和方法。利用这种设计方法，并借助于计算机的帮助，人们可以从众多的设计方案中寻找出最佳设计方案，从而大大提高设计效率和质量，设计出既经济又可靠的机械产品。目前，机械优化设计已成为提高设计效率和设计质量，提升企业自主创新能力的有效途径与方法。

本书介绍了机械优化设计的基本理论和方法、优化设计工具软件及工程应用，同时还介绍了优化设计学科的前沿知识。全书共分9章：第1章介绍了机械优化设计的基本概念与发展趋势；第2章介绍了优化方法的数学基础，包括矩阵运算和微积分的基础知识，凸集、凸函数与凸规划的基本理论，具有等式约束和不等式约束优化问题的极值条件等；第3章至第6章阐述了常用的优化设计方法，介绍了一维搜索方法、基于导数的优化方法和非导数优化方法等，包括遗传算法和模拟退火算法等智能优化算法；第7章论述了约束优化问题的处理、多目标优化方法、离散变量优化方法、多学科优化设计方法，以及优化设计结果的灵敏度分析等优化设计实用技术；第8章介绍了MATLAB与ANSYS在机械优化设计中的应用；第9章介绍了线性规划问题、机构优化问题、结构优化问题和机械系统优化问题的实例，提供了基于工具软件求解的源程序或命令流。

本书将优化设计基础理论、国际大型通用优化设计工具软件和工程应用实例密切结合，通过机械工程应用实例使读者掌握优化设计方法的实质内容及工程应用技巧。本书可作为高等院校高年级本科生或研究生学习优化设计的教材或教学参考书，也可作为企业或研究机构科技工作者学习优化技术的参考书。

本书由吉林大学王国强教授、北方重工集团赵凯军研究员和河北工程大学崔国华副教授编写。吉林大学的侯晓婷、李媛华、胡际勇、李学飞、张玉新，太原科技大学的赵春江也参与了部分编校工作。全书由王国强教授统稿。

本书的编写得到了吉林大学高水平研究生课程体系建设项目的支持，在编写过程中参考了国内外学者公开出版的相关教材和专著，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中缺点、错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2008年12月于长春

目　　录

第1章 绪 论

自然界是按照最优化的原则决定其存在形态与演化方式的。在金属和合金中，原子占据能量最小的位置以形成晶胞，这些晶胞决定了材料的晶体结构；在零重力条件下，一滴液体的形状是一个完美球体，因为在体积一定的条件下，球的表面积最小；蜜蜂是最优秀的建筑师，蜂巢结构是最紧凑的包装排列方式之一；而生物的遗传和变异则是自然界优化过程的又一实例。和自然界一样，无论是工程设计、生产经营、投资决策、经济运行、人才管理还是社会结构都在追求最优化状态。在长期的生产实践中，产生了诸如进化优化、直觉优化、试验优化、图解和数学分析优化等一些优化策略与方法。到了20世纪70年代初期，在最优化理论和计算机技术发展的基础上逐渐形成了优化设计方法，为工程设计人员提供了一种易于实现最优设计的手段。在解决一些复杂问题时，设计人员能从众多的设计方案中找出尽可能完善或最好的设计方案。优化设计方法对于提高产品性能、改进产品质量、提高设计效率具有重要作用。

机械优化设计是在满足一定约束的前提下，寻找一组设计参数，使机械产品单项或多项设计指标达到最优的过程。首先要根据实际的设计问题建立相应的数学模型，即用数学形式来描述实际设计问题。在建立数学模型时需要应用专业知识确定设计的限制条件和所追求的目标，确定设计变量之间的相互关系等。数学模型一旦建立，优化设计问题就变成了一个数学求解问题。根据数学模型的特点，应用优化理论，设计优化程序，以计算机作为工具得到最优设计参数。

1.1 机械优化设计概况

机械优化设计方法包括解析方法、数值计算方法及图解法。利用微分学和变分学的解析方法，可追溯到牛顿、拉格朗日等人对微积分的贡献，以及伯努利、欧拉、拉格朗日和 Weirstass 等人奠定的变分学基础理论。包含待定乘子的约束问题的优化方法是由拉格朗日创立，并以其名字命名为拉格朗日乘子法。柯西最早应用最速下降法来求解无约束极小化问题。这些经典的优化方法只能解决小型和简单的问题，对于大多数工程实际问题无能为力。

数值计算方法是利用已知的信息，通过迭代计算来逼近最优化问题的解。这种方法由于其运算量大，直至计算机出现后才成为现实。20 世纪 50 年代，在

应用数学领域形成了以线性规划和非线性规划为主要内容的数学规划理念，并用于解决工程设计问题，形成了工程设计的优化设计理论和方法。Dantzig 提出了求解线性规划问题的单纯形法，Bellman 对动态规划问题提出了最优化原理，这两方面的研究为约束优化方法的发展铺平了道路。Kuhn 和 Tucker 关于规划问题最优解的必要条件和充分条件的研究工作，为以后在非线性规划领域内的大量研究奠定了基础。20 世纪 60 年代是研究拟牛顿法的活跃时期，同时对共轭梯度法也有较好的研究。1970 年，由 Broyden、Fletcher 和 Goldfarb 等人从不同角度共同提出的 BFGS（Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno）方法是应用较广的拟牛顿方法。

20 世纪 60 年代以来，以计算机为工具、数学规划论为理论基础的优化设计方法逐渐形成，它将最优化原理与计算机技术应用于工程领域，在机械、航空航天、电机、石油、化工、建筑、造船、轻工等各个行业得到广泛的应用，获得显著的技术与经济效益。例如，起重机主梁及塔架、雷达接收天线结构、机床多轴箱方案、建筑结构等，利用优化设计，可使重量减轻 15% 以上。美国贝尔（Bell）飞机公司采用优化方法解决了具有 450 个设计变量的结构优化问题，使一个飞机机翼的重量减轻了 25%。美国波音公司对 747 飞机机身进行优化设计，取得了减轻重量、增加载员、缩短生产周期和降低成本的效果。

机构优化设计是机械优化设计中开展较早的领域之一，在平面连杆机构、空间连杆机构、凸轮机构及组合机构的优化设计等方面有很多成功的实例。国内外对机械零部件优化设计均进行了深入的研究，例如，液体静动压轴承的优化设计，具有最佳承载能力的非渐开线齿轮副的设计，减速器的优化设计，通用机床变速箱优化设计，离合器和制动器的优化设计，齿轮泵和电动机的优化设计等成果均在生产实践中得到应用。

机械优化设计在机构综合、机械的通用零部件设计以及各种专用机械设计和工艺设计方面均得到广泛应用的原因，一方面是由于生产和工程设计中确实存在着大量的优化设计问题亟待解决；另一方面是由于计算机技术的发展和科学计算软件的普及，为采用优化技术提供了有效的工具。

美国 MathWorks 公司在 1994 年推出了科学计算软件 MATLAB。它具有强大的科学计算、图形处理、数据可视化功能和开放式可扩展环境，特别是所附带的优化工具箱（Optimization Toolbox）中包含一系列优化算法和模块，可以用于求解约束线性最小二乘优化、约束非线性或无约束非线性极小值问题，以及非线性最小二乘逼近和曲线拟合、非线性系统方程和复杂结构的大规模优化问题。此外，国际通用大型有限元软件 ANSYS 和数字化功能样机软件 ADAMS 中都有优化设计模块。这些软件的推广应用，为工程技术人员解决优化设计问题提供了很好的平台。

1.2　优化设计的基本概念

1.2.1　优化设计的数学模型

下面通过三个优化设计实例，说明优化设计数学模型的一般形式及有关概念。

例 1-1　如图 1-1 所示，在对称人字架顶端作用一个 $F = 294300\text{N}$ 的静载荷，人字架跨度 $B = 1520\text{mm}$，人字架杆件为壁厚 $T = 2.5\text{mm}$ 的空心圆管，材料的杨氏模量 $E = 2.119\times10^5\text{MPa}$，许用压应力 $\sigma_y = 690\text{MPa}$。设计要求满足强度条件和稳定性条件，在 20 ~ 140mm 范围内确定圆管平均直径，在 200 ~ 1200mm 范围内确定人字架高度，使人字架用料最省。

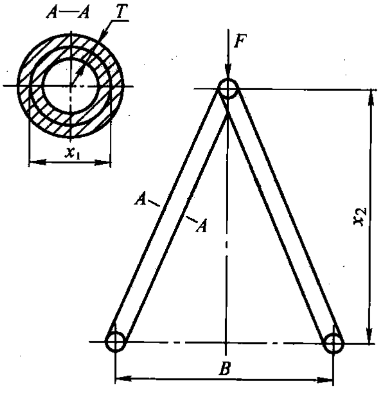

图 1-1　对称人字架结构图

解　由图 1-1 可见，人字架总体积取决于圆管平均直径和人字架高度。设圆管平均直径为 x_1，人字架高度为 x_2，则人字架总体积（mm^3）为

$$V = 2\pi x_1 T\sqrt{(B/2)^2 + x_2^2}$$

$$= 15.708x_1\sqrt{577600 + x_2^2}$$

由静力平衡和材料力学有关公式可得：

圆管截面上的压应力（MPa）为

$$\sigma = \frac{(F/2)\sqrt{(B/2)^2 + x_2^2}}{\pi x_1 T x_2}$$

$$= 18735.68\frac{\sqrt{577600 + x_2^2}}{x_1 x_2}$$

压杆稳定临界应力（MPa）为

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E(x_1^2 + T^2)}{8[(B/2)^2 + x_2^2]} = \frac{2.614\times10^5(x_1^2 + 6.25)}{577600 + x_2^2}$$

设计要求满足的强度条件、稳定性条件以及结构尺寸条件可分别具体化为

1）圆管中压应力 σ 不超过许用压应力 σ_y，即

$$690 - 18735.68\frac{\sqrt{577600 + x_2^2}}{x_1 x_2} \geqslant 0$$

2）圆管中压应力 σ 不超过压杆稳定临界应力 σ_e，即

$$\frac{2.614\times10^5(x_1^2 + 6.25)}{577600 + x_2^2} - 18735.68\frac{\sqrt{577600 + x_2^2}}{x_1 x_2} \geqslant 0$$

3）圆管平均直径 x_1 和人字架高度 x_2 不超过给定的范围，即

$$20\text{mm} \leqslant x_1 \leqslant 140\text{mm}$$

$$200\text{mm} \leqslant x_2 \leqslant 1200\text{mm}$$

优化设计目标是满足上述条件下人字架用料最省，即体积 V 最小。

例 1-2 现用薄钢板制造一体积为 5m^3，长度不小于 4m 的无上盖的立方体货箱。要求该货箱的钢板耗费量最少，试确定货箱的长、宽和高的尺寸。

解 钢板的耗费量与货箱的表面积成正比。设货箱的长、宽、高分别为 x_1、x_2、x_3，货箱的表面积为 S，则该问题的物理表述为

1）货箱的钢板耗费量（即货箱的表面积用料）最少。

$$S = x_1x_2 + 2(x_1x_3 + x_2x_3) \rightarrow \min$$

可见货箱的表面积取决于货箱的长度 x_1、宽度 x_2 和高度 x_3。

2）满足的条件：

$$x_1 \geqslant 4, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0$$

按优化数学模型的规范形式，可归纳为如下数学模型：

设计变量

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$$

目标函数的极小化

$$\min f(\boldsymbol{x}) = S = x_1x_2 + 2(x_1x_3 + x_2x_3)$$

约束条件

$$g_1(\boldsymbol{x}) = 4 - x_1 \leqslant 0$$

$$g_2(\boldsymbol{x}) = -x_2 \leqslant 0$$

$$g_3(\boldsymbol{x}) = -x_3 \leqslant 0$$

$$h(\boldsymbol{x}) = 5 - x_1x_2x_3 = 0$$

由等式约束条件可知，三个设计变量中只有两个是独立变量，即 $x_3 = \dfrac{5}{x_1x_2}$。所以，该问题的优化数学模型应写为

设计变量

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$$

目标函数的极小化

$$\min f(\boldsymbol{x}) = x_1x_2 + 2(x_1x_3 + x_2x_3) = x_1x_2 + 10\left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}\right)$$

约束条件

$$g_1(\boldsymbol{x}) = 4 - x_1 \leqslant 0$$

$$g_2(\boldsymbol{x}) = -x_2 \leqslant 0$$

例 1-3 某车间生产甲、乙两种产品。生产甲种产品每件需使用 9kg 材料、3

个工时、4kW · h 电能，可获利润 60 元。生产乙种产品每件需用 4kg 材料、10 个工时、5kW · h 电能，可获利 120 元。若每天能供应 360kg 材料、300 个工时、200kW · h 电能，试确定两种产品每天的产量，以使每天可能获得的利润最大。

解　这是一个生产计划问题，可归结为既满足各项生产条件，又使每天所能获得的利润达到最大的优化设计问题。

设每天生产的甲、乙两种产品件数分别为 x_1，x_2，每天获得的利润可用函数 $f(x_1, x_2)$ 表示，即

$$f(x_1,x_2) = 60x_1 + 120x_2 \rightarrow \max$$

每天实际消耗的材料、工时和电能可分别用以下约束函数表示：

$$g_1(\boldsymbol{x}) = 9x_1 + 4x_2 - 360 \leqslant 0 \quad （材料约束）$$

$$g_2(\boldsymbol{x}) = 3x_1 + 10x_2 - 300 \leqslant 0 \quad （工时约束）$$

$$g_3(\boldsymbol{x}) = 4x_1 + 5x_2 - 200 \leqslant 0 \quad （电能约束）$$

$$g_4(\boldsymbol{x}) = -x_1 \leqslant 0$$

$$g_5(\boldsymbol{x}) = -x_2 \leqslant 0$$

于是上述生产计划问题的优化数学模型应写为

设计变量

$$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$$

目标函数的极小化

$$\min f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,x_2) = -60x_1 - 120x_2$$

约束条件

$$g_1(\boldsymbol{x}) = 9x_1 + 4x_2 - 360 \leqslant 0$$

$$g_2(\boldsymbol{x}) = 3x_1 + 10x_2 - 300 \leqslant 0$$

$$g_3(\boldsymbol{x}) = 4x_1 + 5x_2 - 200 \leqslant 0$$

$$g_4(\boldsymbol{x}) = -x_1 \leqslant 0$$

$$g_5(\boldsymbol{x}) = -x_2 \leqslant 0$$

由于目标函数和所有约束函数均为设计变量的线性函数，故此问题属线性约束优化问题。

从以上三个实例可以看出，优化设计的数学模型需要用设计变量、目标函数和约束条件等基本概念才能给出完整的描述，可以写成以下统一形式：

求设计变量

$$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \tag{1-1}$$

使极小化函数

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1-2}$$

满足约束条件

$$g_j(\boldsymbol{x}) \leqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,m)$$

$$h_k(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,l)$$

式中，$g_j(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$ 称为不等式约束条件；$h_k(\boldsymbol{x}) = 0$ 称为等式约束条件。

用向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示设计变量，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 属于 n 维实欧氏空间，用 min、max 表示极小化和极大化，s. t.（subjected to 的缩写）表示“满足于”，m、l 分别表示不等式约束和等式约束的个数。优化数学模型可以写成以下向量形式：

$$\begin{aligned} &\min f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \\ &\text{s. t. } g_j(\boldsymbol{x}) \leqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,m) \\ &\quad\; h_k(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,l) \end{aligned} \tag{1-3}$$

式（1-3）就是优化数学模型的一般表达式。这一优化数学模型称为约束优化设计问题。若式（1-3）所列数学模型内 $m = l = 0$，则成为

$$\min f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \tag{1-4}$$

这一优化问题不受任何约束，称为无约束优化设计问题。式（1-4）即无约束优化问题的数学模型表达式。

当涉及问题要求极大化 $f(\boldsymbol{x})$ 目标函数时，只要将式中目标函数改写为 $-f(\boldsymbol{x})$ 即可，因为 $\max f(\boldsymbol{x})$ 和 $\min[-f(\boldsymbol{x})]$ 具有相同的解。同样，当不等式约束为“$\geqslant 0$”时，只要将不等式两端同乘以“-1”，即可得到“$\leqslant$”的一般形式。

1.2.2 优化设计的基本术语

一个完整的规格化的优化数学模型应包含三部分内容：设计变量 $\boldsymbol{x}$、目标函数 $f(\boldsymbol{x})$、约束条件 $g_j(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$ 和 $h_k(\boldsymbol{x}) = 0$。它们又称为优化数学模型的三要素。

优化数学模型在计算机上求得的解称为优化问题的最优解，它包括：

最优方案

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots x_n^*)^{\mathrm{T}}$$

最优目标函数值

$$f(\boldsymbol{x}^*)$$

即优化问题的最优解由最优设计方案 $\boldsymbol{x}^*$（或称最优点）和最优目标函数值 $f(\boldsymbol{x}^*)$ 两部分组成。最优目标函数值 $f(\boldsymbol{x}^*)$ 是最优点 $\boldsymbol{x}^*$ 代入目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 所求得的最优函数值，它是评价设计方案优劣程度的一个标量值。

1. 设计变量

在优化设计过程中需要调整和优选的参数，称为设计变量。如在产品设计中，一个零部件或一台机器的设计方案，常用一组基本参数来表示。概括起来参数可分为两类：一类是按照具体设计要求事先给定，且在设计过程中保持不

变的参数，称为设计常量；另一类是在设计过程中须经不断调整，以确定其最优值的参数，称为设计变量。也就是说，设计变量是优化设计要优选的量。优化设计的任务，就是确定设计变量的最优值以得到最优设计方案。

由于设计对象不同，选取的设计变量也不同。它可以是几何参数，如零件外形尺寸、截面尺寸、机构的运动尺寸等；也可以是某些物理量，如零部件的重量、体积、力与力矩、惯性矩等；还可以是代表工作性能的导出量，如应力、变形等。总之，设计变量必须是对该项设计性能指标优劣有影响的参数。

设计变量是一组相互独立的基本参数，一般用向量 $\boldsymbol{x}$ 来表示。设计变量的每个分量都是相互独立的。以 n 个设计变量为坐标轴所构成的实数空间称为设计空间，用 $\mathbf{R}^n$ 表示。当 $n=2$ 时，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$ 是二维设计向量；当 $n=3$ 时，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 为三维设计向量，设计变量 x_1，x_2，x_3 组成一个三维空间；当 $n>3$ 时，设计空间是一个超越空间，或称 n 维实欧式空间。其中二维和三维设计空间如图 1-2 所示。

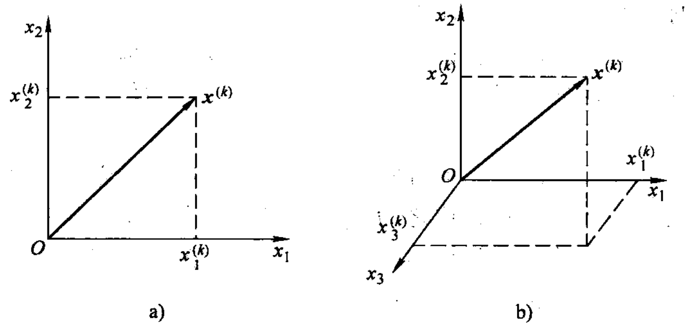

图 1-2　设计空间

a）二维设计空间　b）三维设计空间

设计空间是所有设计方案的集合，用符号 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 表示。任何一个设计方案，都可以看做是从设计空间原点出发的一个设计向量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$，该向量端点的坐标值就是这一组设计变量 $\boldsymbol{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \cdots,\ x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$。因此，一组设计变量表示一个设计方案，它与一个向量的端点相对应，也称设计点。设计点的集合即构成设计空间。

根据设计变量的多少，一般将优化设计问题分为三种类型：设计变量数目 $n<10$ 的称为小型优化问题；$n=10\sim50$ 的称为中型优化问题；$n>50$ 的称为大型优化问题。

在机械优化设计中，根据设计要求，设计变量常有连续量和离散量之分。大多数情况下，设计变量是有界连续变化型量，称为连续设计变量。但在一些情况下，有些设计变量是离散型量，则称离散设计变量，如齿轮的齿数和模数、

钢管的直径、钢板的厚度等。对于离散设计变量，在优化设计过程中先把它视为连续量，在求得连续量的优化结果后再进行圆整或标准化，以求得一个实用的最优设计方案。

2. 目标函数

目标函数又称评价函数，是用来评价设计方案优劣的标准。任何一项机械设计方案的好坏，总可以用一些设计指标来衡量。这些设计指标可表示为设计变量的函数，该函数称为优化设计的目标函数。n 维设计变量优化问题的目标函数记为 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。它代表设计中某项最重要的特征，如机械零件设计中的重量、体积、效率、可靠性、承载能力，机械设计中的运动误差、动力特性，产品设计中的成本、寿命等。

目标函数是一个标量函数。目标函数值的大小，是评价设计质量优劣的标准。优化设计就是要寻求一个最优设计方案，即最优点 $\boldsymbol{x}^*$，从而使目标函数达到最优值 $f(\boldsymbol{x}^*)$。在优化设计中，一般取最优值为目标函数的最小值。

确定目标函数，是优化设计中最重要的决策之一。因为这不仅直接影响优化方案的质量，而且还影响到优化过程。目标函数可以根据工程问题的要求从不同角度来建立，例如：成本、重量、几何尺寸、运动轨迹、功率、应力、动力特性等。

一个优化问题，可以用一个目标函数来衡量，称之为单目标优化问题；也可以用多个目标函数来衡量，称之为多目标优化问题。单目标优化问题由于指标单一，易于衡量设计方案的优劣，求解过程比较简单明确；而多目标优化问题求解比较复杂，但可获得更佳的最优设计方案。

目标函数可以通过等值线（面）在设计空间中表现出来。所谓目标函数的等值线（面），就是当目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的值依次为一系列常数 c_i $(i=1, 2, \cdots)$ 时，设计变量 $\boldsymbol{x}$ 取得一系列值的集合。现以二维优化问题为例，来说明目标函数的等值线（面）的几何意义。如图 1-3 所示，二维变量的目标函数 $f(x_1, x_2)$ 图形可以用三维空间描述出来。令目标函数 $f(x_1, x_2)$ 的值分别等于 $c_1, c_2, \cdots$，则对应这些设计点的集合是在 x_1Ox_2 坐标平面内的一族曲线，所以这些曲线称为目标函数的等值线。由图可见，等值线族反映了目标函数值的变化规律，等值线越向里面，目标函数值越小。对于有中心的

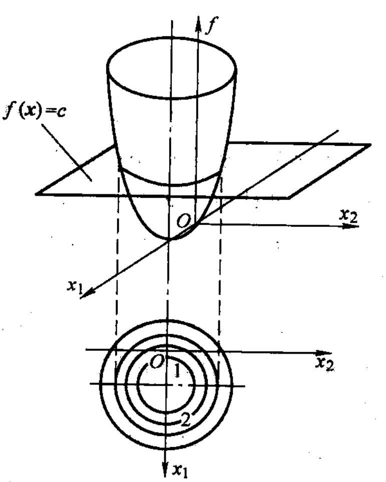

图 1-3 二维目标函数等值线

曲线族来说，等值线族的共同中心就是目标函数的无约束极小点 x^*。故从几何意义上来说，求目标函数无约束极小点也就是求其等值线族的共同中心。

以上二维目标函数等值线的讨论，可以推广到多维问题的分析中去。三维问题在设计空间中是等值面问题；高于三维问题在设计空间中是超等值面问题。

3. 约束条件

设计空间是一切设计方案的集合，只要在设计空间确定一个点，就确定了一个设计方案。但是，实际上并不是任何一个设计方案都可行，因为设计变量的取值范围有限制或必须满足一定的条件。在优化设计中，这种对设计变量取值时的限制条件，称为约束条件（或称设计约束）。

按照约束条件的形式不同，约束有不等式约束和等式约束两类，一般表达式为

$$g_j(\boldsymbol{x}) \leqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,m)$$
$$h_k(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,l)$$

式中，g_j（$\boldsymbol{x}$）和 h_k（$\boldsymbol{x}$）都是设计变量的函数；m 为不等式约束的数目；l 为等式约束的数目，而且等式约束的个数必须小于设计变量的个数 n（因为一个等式约束可以消去一个设计变量，当 $l=n$ 时，即可由 l 个方程组解得唯一的一组设计变量 x_1，x_2，…，x_n。这样，只有唯一确定的方案，无优化可言）。

当不等式约束条件要求为 $g_j(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$ 时，可以用 $-g_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 的等价形式来代替。

按照设计约束的性质不同，约束有性能约束和边界约束两类。性能约束是根据设计性能或指标要求而确定的一种约束条件，例如零件的工作应力、变形的限制条件以及对运动学参数如位移、速度、加速度值的限制条件均属性能约束。边界约束则是对设计变量取值范围的限制，例如对齿轮的模数，齿数的上、下限的限制以及对构件长度尺寸的限制都是边界约束。

任何一个不等式约束条件，若将不等号换成等号，即形成一个约束方程式。该方程的图形将设计空间划分为两部分：一部分满足约束，即 $g_j(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$；另一部分则不满足约束，即 $g_j(\boldsymbol{x}) > 0$。故将该分界线或分界面称为约束边界（或约束面）。等式约束本身也是约束边界，不过此时只有约束边界上的点满足约束，而边界两边的所有部分都不满足约束。以二维问题为例，如图 1-4 所示，其中阴影方向部分表示不满足约束的区域。

约束的几何意义是它将设计空间一分为二，形成了可行域和非可行域。每一个不等式约束或等式约束都将设计空间分为两部分，满足所有约束的部分形成一个交集，该交集称为此约束问题的可行域，记做 D，如图 1-5 所示。不满足约束条件的设计点构成该优化问题的不可行域。可行域可看做满足所有约束条件的设计点的集合，因此，可用集合表示如下：

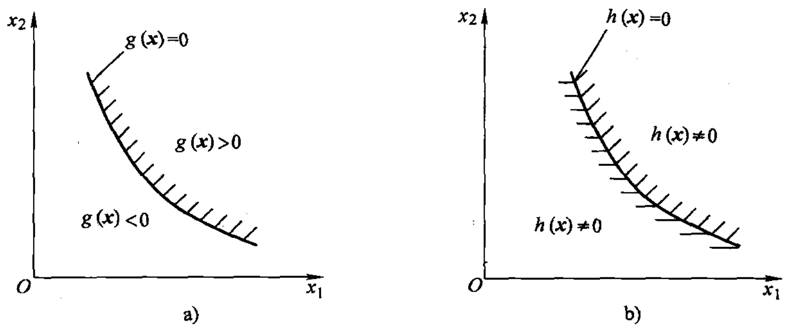

图 1-4 约束边界

$$D = \{x \mid g_j(x) \leqslant 0, h_k(x) = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,m; k = 1,2,\cdots,l)\} \tag{1-5}$$

根据是否满足约束条件可以把设计点分为可行点（或称内点）和非可行点（或称外点）。处于不等式约束边界上（即不等式约束的极值条件 $g_j(x)=0$）的设计点，称为边界设计点。边界设计点也是可行点，不过它是一个为该项约束所允许的极限设计方案，所以又称极限设计点。非可行点即不允许采用的非可行设计方案。当优化设计问题除有 m 个不等式约束条件外，还应满足 l 个等式约束条件时，即对设计变量的选择又增加了限制。如图 1-5 所示，当有一个等式约束条件 $h(x_1, x_2)=0$ 时，这时的可行点（可行设计方案）只允许在 D 内的等式约束函数曲线的 AB 段上选择。

根据设计点是否在约束边界上，又可将约束条件分为起作用约束和不起作用约束。所谓起作用约束就是对某个设计点特别敏感的约束，即该约束的微小变化可能使设计点由边界点变成可行域的内点，也可能由边界点变成可行域的外点。如图 1-5 所示，其中点 $x^{(1)}$ 位于约束边界 $g_1(x)=0$ 上，故 $g_1(x)\leqslant 0$ 是 $x^{(1)}$ 的起作用约束。点 $x^{(2)}$ 位于两个约束边界 $g_1(x)=0$ 和 $g_2(x)=0$ 的交点上，因此，点 $x^{(2)}$ 的起作用约束有两个，它们是 $g_1(x)\leqslant 0$ 和 $g_2(x)\leqslant 0$。

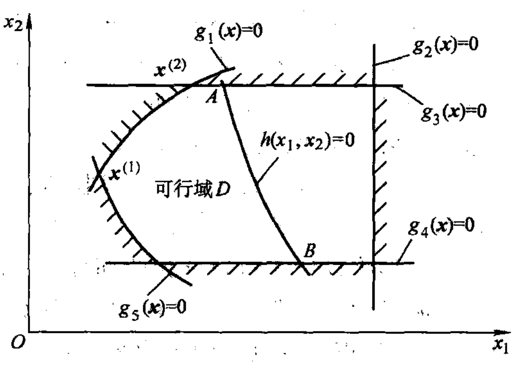

图 1-5 二维问题的可行域

点 $x^{(k)}$ 的起作用约束的个数可以用集合的形式表示如下：

$$I_k = \{u \mid g_j(x^{(k)}) = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,m)\}$$

综上所述，优化数学模型是对实际问题的数学描述和概括，是进行优化设

计的基础。因此，根据设计问题的具体要求和条件建立正确的优化设计数学模型是关系优化设计成败的关键，这是因为优化问题的计算求解完全是围绕数学模型进行的。也就是说，优化计算所得的最优解实际上只是数学模型的最优解。此解是否满足实际问题的要求，是否就是实际问题的最优解，取决于数学模型和实际问题的符合程度。

因此，建立数学模型是一项重要而复杂的工作：一方面希望建立一个尽可能完善的数学模型，以求精确地表达实际问题，得到满意的结果；另一方面又力求使所建立的数学模型尽可能简单，以方便计算求解。

1.2.3　优化问题的分类

机械优化设计可以分为两个层次：总体方案优化和设计参数优化。这两者之间有着密切的联系，又存在着实质性的区别。前者是指总体布局、结构或系统的类型以及几何形式的优化设计；后者是在总体方案选定后，对具体设计参数（几何参数、性能参数等）的优化设计。总体方案设计是一种创造性活动，必须依靠思考与推理，综合运用多学科的专门知识和丰富的实践经验，才能获得正确、合理的设计。因此，总体方案优化的大量工作是依据知识和经验进行演绎和推理，人工智能方法（特别是专家系统技术）适宜于求解这类问题。设计参数优化是择优确定具体的设计参数，属于数值计算型工作，易得出可供数值计算用的数学模型，因而一般采用数学规划方法来求解。

根据优化问题的数学模型是否含有设计约束，可将优化问题分为约束优化问题和无约束优化问题，它们的数学模型见式（1-3）和式（1-4）。优化设计问题中绝大多数问题都是约束优化问题。

无约束优化问题的目标函数如果是一元函数，则称之为一维无约束优化问题；如果是二元或二元以上函数，则称之为多维无约束优化问题。

对于约束优化问题，可按其目标函数与约束函数的特性，分为线性规划问题和非线性规划问题。如果目标函数和所有的约束函数都是线性函数，则称之为线性规划问题（见例 1-3）；否则，则称之为非线性规划问题。对于目标函数是二次函数而约束函数都是线性函数的问题，一般称之为二次规划问题。如果目标函数和所有的约束函数都是凸函数，则称为凸规划问题。凸规划的一个重要的性质就是，凸规划的任何局部极小解一定是全局最优解。

线性规划和非线性规划是数学规划中的两个重要分支，在机械优化设计问题中均得到了广泛应用。

1.2.4　优化设计的迭代算法

对于优化问题数学模型的求解，目前可采用的求解方法有三种：数学解析