21世纪高等学校本专科规划课改教材

高等数学

下

熊德之
柳翠华 主编
伍建华

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等学校本专科规划课改教材

高等数学

下册

熊德之　柳翠华　伍建华　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的《工科类数学基础课程教学基本要求》编写而成，分上、下两册.下册内容为空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数.附录附有二阶和三阶行列式简介、几种常用的曲面等内容.本书语言通俗、例题较多，便于自学，并吸收国内外同类教材的优点，以帮助学生提高数学素养，培养学生创新意识和运用数学工具去分析和解决实际问题的能力.

本书可作为高等学校工科类各专业高等数学课程的教材，也可作为相近学科或经济、管理类专业的数学教材和教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/熊德之，柳翠华，伍建华主编.—北京：科学出版社，2009
21世纪高等学校本专科规划课改教材
ISBN 978-7-03-024949-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①熊…②柳…③伍… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第112734号

责任编辑：王雨舸 曾 莉／责任校对：李磊东
责任印制：彭 超／封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年7月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009年7月第一次印刷 印张：16 3/4
印数：1—4 000 字数：324 000

定价：28.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

进入21世纪，科学技术飞速发展，知识更替日新月异，这是一个催人奋进的时代.我国的高等教育已迈入大众化的发展轨道，独立学院、高职高专学生占了大学生总数的“半壁江山”.在新的形势下，高等数学的课时却还在减少，这对高等数学的教学提出了更高的要求，同时，出版新的应用型高等数学教材，以满足高等教育改革和发展的需要，就显得更加紧迫.

本书是高等学校本专科规划课改教材，主要面向独立学院等应用型本专科的高等数学课程.在编写过程中，我们着力加强基本概念，突出素质培养，注重实际应用.对基本概念、基本理论的叙述，力求准确、简明，便于理解和掌握.对知识的深度和难度，以必需、够用为原则，重视数学思想方法的传授，避免烦琐理论推导，力求通俗好懂，易教易学.对于书中标有“*”号的内容，专科层次的教学可以不作要求，本科层次的教学可根据需要选用.

本书由熊德之负责制定编写大纲，并分上、下两册出版.全书分为11章，第1章、第7章由伍建华编写；第2章、第3章由柳翠华编写；第4章、第5章由熊德之编写；第6章、第10章由阮正顺编写；第8章、第9章由杨雪帆编写；第11章由陈君编写.全书由熊德之、柳翠华、伍建华统稿、定稿.

由于作者水平所限，加上成书时间又很仓促，书中的不足之处实属难免.恳请各位老师和读者对书中的疏漏和不足不吝赐教，以便今后再版时予以修订.

编　者

2009年5月

目　录

第 7 章　空间解析几何与向量代数

在中学，我们曾学过平面解析几何. 先建立一个平面直角坐标系，将平面上的点与一个有序数组对应起来；将平面上的一条直线或曲线，与一个代数方程对应起来，这样就可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的，它是通过空间直角坐标系建立起空间的点与三元有序数组，几何图形(曲面、空间曲线)与解析表达式之间的对应关系，从而使得对几何图形性质的研究转化为对相应代数方程的研究.

我们看到，在学习一元函数的微积分时，利用了许多平面解析几何的知识，同样在学习多元函数的微积分时，我们必须先掌握空间解析几何的有关知识，因此它是学习多元函数微积分的基础. 本章首先介绍应用极为广泛的向量的概念、向量的运算，然后建立空间直角坐标系，并以向量为工具讨论空间的平面与直线，最后介绍一些重要的曲面和空间曲线.

§7.1　向量及其线性运算

一、向量概念

在日常生活中我们常遇到许多量，如预报某地天气时要说温度如何、风向如何. 温度是一个可用一个实数就能确定了的量，这种取定单位大小后用一个实数便可以确定的量称为**数量**或**标量**，像长度、面积、时间等都是数量；但描述风的量不是数量，你必须说明风力(即大小)、风向(即方向)，像这种不仅需要大小，而且必须由一个方向才能被描述的量在物理学中比比皆是，如位移、速度、力等. 数学上把这种既有大小，又有方向的量称为**向量**或**矢量**.

在数学上，往往用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记为$\overrightarrow{M_1M_2}$(图 7－1)，有时也用上面加箭头的字母来表示向量. 例如，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$ 或$\vec{a}$，$\vec{i}$，$\vec{v}$，$\vec{F}$等.

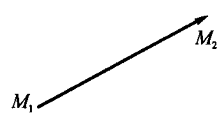

图 7－1

向量的大小称为向量的**模**或**长度**. 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\vec{a}$，$\boldsymbol{a}$ 的模依次记为$|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$|\vec{a}|$，$|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**，模为 0 的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$ 或$\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合，它的方向可以是任意，或者说是不确定的.

在直角坐标系中,以坐标原点 O 为始点,M 为终点的向量$\overrightarrow{OM}$,称为点 M 对点 O 的**向径**,用 $\boldsymbol{r}$ 表示.

若向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同、长度相等,则向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 称为**相等向量**,或称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 也可以说:如果两个向量经过平行移动后能够完全重合,就称为两个向量相等.

由向量相等的定义可看出,两个向量的相等仅与它们的模和方向有关,与它们的起点和终点位置没有关系. 在实际问题中,有的向量与始点有关(如物理学中的力,两个大小与方向相同的力,如果作用点不同,其效果是不同的),而有的与始点无关. 与始点无关的向量,称为**自由向量**,简称**向量**. 在这里只研究自由向量,它可以在空间中任意平移,平移后仍表示原来的向量. 这使得我们可以根据所研究问题的需要来选取起点,从而简化讨论问题的过程.

若向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 长度相等,方向相反,就称它们互为**负向量**,用 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或者 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$ 表示;若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 方向相同或者相反,则称 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为平行向量,记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以是任意的,因此可以认为零向量与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共的起点在一条直线上,因此,两向量平行又称两向量**共线**. 所以平行的向量是共线的.

类似还有共面的概念. 设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果 k 个终点和公共起点在一个平面上,就称这 k 个向量**共面**.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

在研究物体受力时,作用于一个质点的两个力可以视为两个向量. 而它的合力就是以这个力作为边的平行四边形的对角线上的向量. 我们现在讨论向量的加法就是对合力这个概念在数学上的抽象和概括.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形,从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种作出两向量之和的方法称为向量加法的**平行四边形法则**. 即作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 以 AB, AD 为边作一平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC(图 7-2),显然向量$\overrightarrow{AC}$即等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

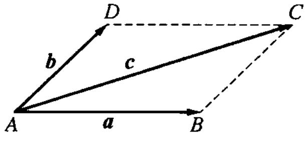

图 7-2

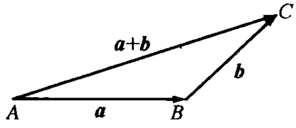

图 7-3

向量的加法还有三角形法则：设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种作出两向量之和的方法称为向量加法的**三角形法则**（图 7－3）.

注意　当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时，规定这两个向量的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 为：$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的模等于 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中模大者同向，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的模等于 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$.

向量的加法符合下列运算规律.

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ $(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 7－4 所示，有

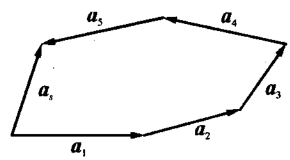

图 7－4

$$\boldsymbol{a}_s=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$.

2. 向量的减法

我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}),$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$［图 7－5(a)］.

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

显然，任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$［图 7－5(b)］.

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

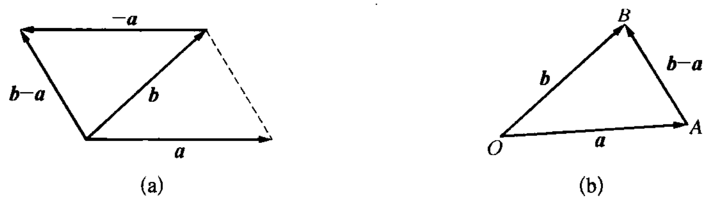

图 7 - 5

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad \text{及} \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

其中等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立. 上式称为三角不等式.

3. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

特别地，当 $\lambda=\pm 1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, \qquad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

设 λ，μ 为常数，向量的数乘运算具有以下性质.

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

上述向量加法和数乘运算合称**线性运算**.

例 7.1.1　化简 $5(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-2(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解　$5(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-2(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$

从几何上看，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，即 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\lambda\boldsymbol{a}$. 于是有下面的定理.

定理 7.1.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{a}$，取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值，即 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证明数 λ 的唯一性，设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}, \quad \text{即} \quad |\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

若 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，则 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，且

$$\left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right|=\left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\right|\cdot|\boldsymbol{a}|=1,$$

$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，即 $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，记为 $\boldsymbol{a}^0$，即 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$. 显然，与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量还有一个：$-\boldsymbol{a}^0$，它与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

例 7.1.2　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点(图 7-6).

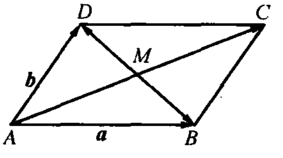

图 7-6

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MA}.$$

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\qquad \overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

因为 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\qquad \overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

习　题　7-1

1. 设有正六边形 $ABCDEF$(顶点字母顺序按逆时针方向排列)，记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{CF}$.
2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.
3. 已知△ABC，求证：$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{0}$.
4. 已知△ABC 两边的向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$，求 BC 边上的中线向量 $\overrightarrow{AA'}$.
5. 以从一点出发的 3 个不共面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱作一平行六面体，求这平行六面体的对角线向量.
6. 已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 交于点 E，O 是任意点，证明：
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OE}.$$
7. 在△ABC 中，点 D，E 分别在边 BC 与 CA 上，且 $BD=\frac{1}{3}BC$，$CE=\frac{1}{3}CA$，AD 与 BE 交于点 R. 证明：$RD=\frac{1}{7}AD$，$RE=\frac{4}{7}BE$.

§7.2　空间直角坐标系与向量的坐标

一、空间点的直角坐标

为了研究空间图形与函数的关系，我们需要建立空间的点与有序数组之间的联系. 这种联系通常是用类似于平面解析几何的方法通过引进空间直角坐标系来实现的.

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位，这三条轴分别称为 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)，z 轴(竖轴)，统称**坐标轴**. 它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 7-7 所示，图中箭头的指向表示 x 轴，y 轴，z 轴的正向. 这样的三条坐标轴就组成了一个**空间直角坐标系**. 点 O 称为**坐标原点**或**原点**.

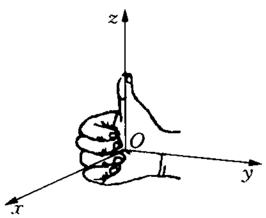

图 7-7

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为**坐标面**. x 轴及 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别称为 yOz 面及 zOx 面.

三个坐标面把空间分成八个部分，每一个部分称为**卦限**. 含有 x 轴，y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限称为第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限，在 xOy 面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII 表示(图 7-8).

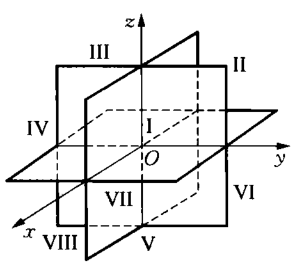

图 7-8

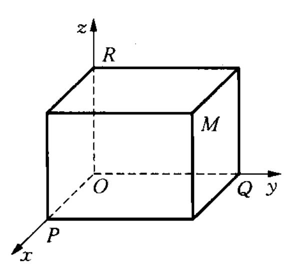

图 7-9

设 M 为空间一已知点，我们过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴，它们与 x 轴，y 轴，z 轴的交点依次为 P, Q, R(图 7-9)，这三点在 x 轴，y 轴，z

轴上的坐标依次为 x, y, z. 于是空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x, y, z;反过来,已知一个有序数组 x, y, z,我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取坐标为 z 的点 R,然后通过 P, Q 与 R 分别作 x 轴,y 轴和 z 轴的垂直平面,这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 x, y, z 所确定的唯一的点. 这样,就建立了空间的点 M 和有序数组 x, y, z 之间的一一对应关系. 这组数 x, y, z 就称为点 M 的**坐标**,并依次称 x, y 和 z 为点 M 的**横坐标**,**纵坐标**和**竖坐标**. 坐标为 x, y, z 的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$.

坐标面上和坐标轴上的点,其坐标各有一定的特征,例如,如果点在 yOz 面,坐标为 $(0, y, z)$;同样,在 zOx 面上点的坐标是 $(x, 0, z)$;在 xOy 面上点的坐标是 $(x, y, 0)$. 如果点 M 在 x 轴上,则点 M 的坐标是 $(x, 0, 0)$;同样,在 y 轴上点的坐标是 $(0, y, 0)$;在 z 轴上点的坐标是 $(0, 0, z)$. 原点 O 的坐标是 $(0, 0, 0)$.

二、向量的坐标与分解

1. 数轴上的向量坐标表示

给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox,对于轴上任一点 M,对应一个向量 $\overrightarrow{OM}$(图 7-10),由 $\overrightarrow{OM} \parallel \boldsymbol{i}$,根据上节的定理,必有唯一的实数 x,使 $\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i}$(实数 x 称为轴上有向线段 $\overrightarrow{OM}$ 的值),并知 $\overrightarrow{OM}$ 与实数 x 一一对应. 于是

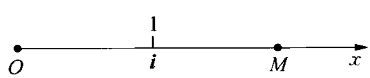

图 7-10

$$\text{点 } M \longleftrightarrow \text{向量} \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} \longleftrightarrow \text{实数 } x$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此,定义实数 x 为轴上点 M 的坐标.

由此可知,轴上点 M 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i}.$$

2. 平面上的向量坐标表示

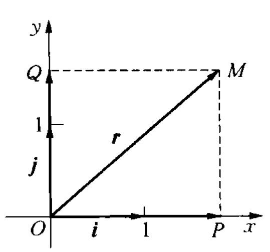

图 7-11

在平面上,设 x 轴上的单位向量为 $\boldsymbol{i}$,y 轴上的单位向量为 $\boldsymbol{j}$. 设 M 为平面上一点,我们过点 M 作两条直线分别垂直于 x 轴和 y 轴,它们与 x 轴和 y 轴的交点依次为 P, Q(图 7-11),这两点在 x 轴和 y 轴上的坐标依次为 x, y. 作向量 $\boldsymbol{r}$,对应有点 M,使 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 则由向量的加法运算有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}.$$

由上面的数轴上的向量表示方法有：$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$ 两个分向量，进而确定了 x，y 两个有序数；反之，给定两个有序数 x，y 也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M. 于是点 M，向量 $\boldsymbol{r}$ 与两个有序数 x，y 之间有一一对应的关系

$$M\longleftrightarrow \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}\longleftrightarrow(x,\ y).$$

3. 空间上的向量坐标表示

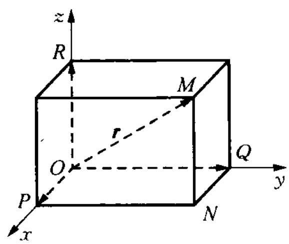

图 7－12

在空间上，设 x，y，z 轴上的单位向量分别为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，它们也称为坐标系的**基本单位向量**. 空间上任给向量 $\boldsymbol{r}$，对应有点 $M(x,\ y,\ z)$，使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体(图 7－12)，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

由前面的讨论可知：$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解式**，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$ 三个分向量，进而确定了 x，y，z 三个有序数；反之，给定三个有序数 x，y，z 也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M. 于是点 M，向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x，y，z 之间有一一对应的关系

$$M\longleftrightarrow \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\longleftrightarrow(x,\ y,\ z).$$

据此，定义有序数 x，y，z 为向量 $\boldsymbol{r}$(在坐标系 $Oxyz$)中的坐标，记为 $\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z)$；有序数 x，y，z 也称为点 M(在坐标系 $Oxyz$)的坐标，记为 $M(x,\ y,\ z)$.

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的**向径**. 上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 $(x,\ y,\ z)$ 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

注意 (1) 向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标有本质的区别，向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标 x，y，z 是三个有序数，而向量在坐标轴上的分向量是三个向量 $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$；

(2) 空间点 M 的坐标，记为 $M(x,\ y,\ z)$，而以点 M 为终点的向径 $\boldsymbol{r}$ 的坐标表示，记为 $\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z)$.

三、利用坐标作向量的线性运算

利用向量的坐标，可得向量的加法、减法及向量与数的乘法的运算如下：