

周培岭 主编

高中数学

重难点剖析 及标准化训练

宋 殊 毛 云
常新蕴 白立砚

编著



华语教学出版社

高中数学重难点剖析 及标准化训练

宋 殊 毛 云 编著
常新蕴 白立砚

华语教学出版社

PDG

(京)新登字 134 号

高中数学重难点剖析及标准化训练

宋 殊 毛 云 常新蕴 等编著

*

华语教学出版社出版

(中国北京百万庄路 24 号)

邮政编码 100037

秦皇岛市卢龙印刷厂印刷

全国新华书店经销

1993 年(32 开)第一版

1994 年第二次印刷

(汉)

印张 8.5 170 千字 印数 3000

ISBN 7-80052-278-4 / H · 276

定价:5.90 元

前 言

本书共十二部分，第一至第五部分是代数，第六至第八部分是三角，第九部分是立体几何的直线与平面，第十部分是解析几何中的曲线与方程，以上都是数学的重点或难点内容，为使读者加深理解，我们对这些内容都分别进行了一定程度的剖析，力图揭示一般性的思维方法，从而有助于提高读者的数学能力，第十一部分安排了三份模拟自测题。最后第十二部分是 1992 年普通高等学校招生全国统一数学试题以及参考答案和评分标准，共有三份，一份是理工农医类，一份是文史类，第三份是专为湖南、云南、海南三省使用的试题，这份试题不分文理科，三份高考试题都有这样一个突出的特点，除了注重对基本知识的考查以外，更重视对基本方法的考查。因为这两个方面的结合是能力的主要体现。

外
乎
知
解

PDG

编 委 会

主 编	周培岭		
副主编	孟 刚	刘 瑛	
编 委	(按姓氏笔画为序)		
方世珪	王滑翔	包宗义	叶九成
由 岭	刘 瑛	李洪炎	李春美
李蕴华	孟 刚	周培岭	周慧玲
周长生	陈家骏	陈 明	杨守善
段玉兰	赵 瑞	高恩全	郭 杰
童恒珞	熊东先	缪志浩	

目 录

第一部分 映射与函数

- (一) 重点、难点剖析..... (1)
- (二) 巩固练习..... (4)
- (三) 参考答案..... (12)

第二部分 数列、极限、数学归纳法

- (一) 重点、难点剖析..... (15)
- (二) 巩固练习..... (18)
- (三) 参考答案..... (26)

第三部分 不 等 式

- (一) 重点、难点剖析..... (30)
- (二) 巩固练习..... (34)
- (三) 参考答案..... (38)

第四部分 复 数

- (一) 重点、难点剖析..... (40)
- (二) 巩固练习..... (43)
- (三) 参考答案..... (48)

第五部分 排列组合、二项式定理

- (一) 重点、难点剖析..... (51)
- (二) 巩固练习..... (54)
- (三) 参考答案..... (59)

第六部分 任意角的三角函数

(一) 重点、难点剖析·····	(6 3)
(二) 巩固练习·····	(8 3)
(三) 参考答案·····	(8 9)
第七部分 三角函数的恒等变形	
(一) 重点、难点剖析·····	(9 3)
(二) 巩固练习·····	(105)
(三) 参考答案·····	(109)
第八部分 反三角函数和三角方程	
(一) 重点、难点剖析·····	(111)
(二) 巩固练习·····	(115)
(三) 参考答案·····	(119)
第九部分 直线和平面	
(一) 重点、难点剖析·····	(121)
(二) 巩固练习·····	(159)
(三) 参考答案·····	(176)
第十部分 曲线和方程	
(一) 重点、难点剖析·····	(178)
(二) 巩固练习·····	(185)
(三) 参考答案·····	(201)
第十一部分 模拟题自测	
第一份模拟题·····	(212)
第二份模拟题·····	(218)
第三份模拟题·····	(222)
第一份模拟题参考答案·····	(227)
第二份模拟题参考答案·····	(233)
第三份模拟题参考答案·····	(237)

**第十二部分 附录 1992 年普通高等学校招生全国统一考试
数学试题三份：**

第一份	理工农医类数学试题	(244)
	参考答案及评分标准	(251)
第二份	文史类数学试题	(260)
	参考答案及评分标准	(266)
第三份	三南（湖南、云南、海南）数学试题	
	参考答案及评分标准	(272)

第一部分 映射与函数

函数是中学数学中最重要的基本概念之一，这部分内容是在映射的基础上提出函数的概念，系统讨论一些初等函数的概念，性质和图象，并且提出研究函数性质和绘制图象的基本方法和技能。重点是映射、函数与反函数的概念，以及幂数、指数函数和对数函数的概念、图象与性质。难点是映射的概念、函数与反函数的概念。

(一) 重点、难点剖析

1. 用集合对应观点，从实例出发，引入映射概念，再用映射概念来刻画函数概念，切实理解函数是由定义域值域和对应法则三部分组成的一类特殊映射。

2. 通过图解直观地掌握一一映射和逆映射的概念，进而引出反函数的意义，分析至为反函数的函数图象间的关系，明确互为反函数的两个函数间的内在联系。

3. 函数的图象是研究函数性质的直观工具，便于学生记忆函数的性质和变化规律，以及求某些方程的解与不等式的解，这种利用函数图象解决问题的思想方法，其本质是数、形之间的转换，使代数问题得到几何的解释，体现思维的灵活性。

例 1. 已知 f 是集合 R 到集合 R 的对应 $f: x \rightarrow y = 2x +$

1 ($x \in R$). 求证

f 是一一映射, 并求 f^{-1} .

分析: 要证 f 是一一映射, 要证明三点: ① A 中的任一元素, B 中都有唯一的元素与之对应. ② A 中不同的元素在 B 中都有不同的象. ③ 对于 B 中的每一个元素在 A 中都有原象.

证明: ① $f: x \rightarrow y = 2x + 1$ 是映射. $\because$ 对任意元素 $a \in R$, 都有唯一确定的元素 $2a + 1 \in R$.

② 设 $x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2$

$$\text{则 } y_1 = 2x_1 + 1, y_2 = 2x_2 + 1, y_1, y_2 \in R$$

$$y_1 - y_2 = 2(x_1 - x_2) \neq 0 \quad \therefore y_1 \neq y_2$$

③ 设 $y_3 \in R$, 且 $y_3 = 2x_3 + 1$

$$\text{则 } x_3 = \frac{1}{2}(y_3 - 1) \in R$$

$\therefore f$ 是一一映射.

$$f^{-1}: y \rightarrow x = \frac{1}{2}(y - 1).$$

例 2. 求下列函数的定义域和值域

$$(1) y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$(2) y = x + \sqrt{1 - 2x}.$$

$$\text{解: } (1) y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$\therefore$ 定义域是 $x \neq 1, x \neq 2$.

又利用判别式求值域

$$yx^2 - 3xy + 2y - 1 = 0$$

$$\Delta = 9y^2 - 4y(2y - 1) \geq 0, y(y + 4) \geq 0$$

即 $y > 0$ 或 $y \leq -4$. $\therefore$ 值域是 $y > 0$ 或 $y \leq -4$.

$$(2) 1-2x \geq 0 \quad x \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{定义域是 } x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{设 } \sqrt{1-2x}=u, 1-2x=u^2, x=-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} y &= x + \sqrt{1-2x} \\ &= -\frac{1}{2}(u^2-1) + u \\ &= -\frac{1}{2}(u-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore y \leq 1$$

$\therefore$ 值域是 $y \leq 1$ 的一切实数.

例 3. 求 $y = \frac{(x+1)(x-3)}{2x^2+2x+1}$ 的最大值和最小值.

解: 去分母得 $2yx^2+2yx+y=x^2-2x-3$

整理得 $(2y-1)x^2+2(y+1)x+y+3=0$

$\because y$ 有最值, x 必须为实数, 判别式就大于等于 0.

$$\Delta = 4(y+1)^2 - 4(2y-1)(y+3) \geq 0$$

$$\text{即 } y^2+3y-4 \leq 0$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$\therefore y_{\text{最大值}} = 1, y_{\text{最小值}} = -4.$$

例 4. 已知函数 $y = x^2 - 4x + 3$. ($x \in [3, 5]$) 求它的反函数, 并画出图象.

$$\text{解: } x^2 - 4x + 3 - y = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{1+y}$$

$$\text{反函数 } y = f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{1+x}$$

定义域 $[0, 8]$

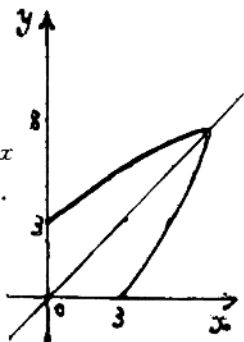


图 1

例 5. 如果 $x, y \in R$, 等式 $(x-2)^2 + y^2 = 3$, 求 $\frac{y}{x}$ 的最大值.

解: 利用图象解法, 方程 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 的图象是以 $O'(2, 0)$ 为圆心, $\sqrt{3}$ 为半径的圆. 令 $\frac{y}{x} = K$, 得 $y = Kx$. 在直线 $y = Kx$ 与圆相交的条件下找出斜率 K 的最大值. 直线与圆相切时, K 有最大值, 设切点为 Q . 算出 $\tan \angle POQ = \sqrt{3}$. 即 $\frac{y}{x}$ 的最大值 $\sqrt{3}$.

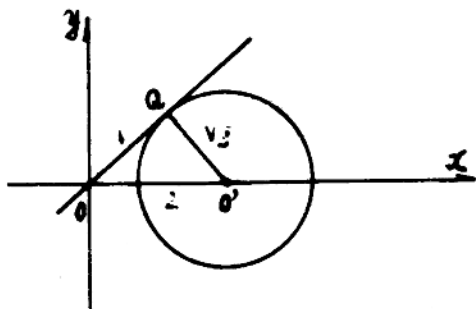


图 2

(二) 巩固练习

(1) 选择题

- 看集合 $M = \{x | x \leq 0\}$, 则下列关系正确的是 ()
(A) $C \subset M$, (B) $\{0\} \in M$, (C) $\{0\} \subset M$, (D) $\emptyset \in M$
- 满足 $\{a, b\} \subseteq A \subseteq \{a, b, c, d, e\}$ 的集合 A 的个数是 ()

(A) 3 个, (B) 5 个, (C) 8 个, (D) 都不对

3. 已知数集 $A = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{y | y = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$, 那么 A 与 B 的关系是 ()

(A) $A \supseteq B$, (B) $A = B$, (C) $B \supseteq A$, (D) $A \supset B$

4. 设 $M = \{(x, y) | y = x\}$, $N = \{(x, y) | \frac{y}{x} = 1\}$ 则 ()

(A) $M = N$, (B) $M \supset N$, (C) $M \subset N$, (D) M, N 无关

5. 已知全集 $I = \{\text{实数对 } (x, y)\}$, $A = \{(x, y) | \frac{y-4}{x-2} = 3, x \neq 2, x, y \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x, y) | y = 3x - 2, x, y \in \mathbb{R}\}$ 则 $\overline{A} \cap B$ 是 ()

(A) $\{2, 4\}$, (B) $\{2, 4\}$, (C) $\emptyset$, (D) 以上都不对

6. 由几个元素构成的集合 $A = \{a_1 a_2 \cdots a_n\}$ 的一切子集的总数是 ()

(A) 2^{n-1} , (B) $2^n + 1$, (C) 2^n , (D) 2^{n+1}

7. 已知 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 < 0\}$, $B = \{x | x - a < 0\}$ 若 $A \cap B = \emptyset$, 那么 a 的取值范围是 ()

(A) $a \in (-\infty, -2)$, (B) $a \in (-\infty, -2]$

(C) $a \in (4, \infty)$, (D) $a \in [4, \infty)$

8. 已知集合 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, 那么集合 $\{2, 7, 8\}$ 是 ()

9. 集合 x 与集合 y 能建立一一映射的是 ()

(A) $x = \{\text{有理数}\}$, $y = \{\text{数轴上的点}\}$

(B) $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $y = \{2, 4, 6, 8\}$

(C) $x = \{\text{奇数}\}$, $y = \{\text{偶数}\}$

(D) $x = \{\text{三角形}\}$, $y = \{\text{圆}\}$

10. 下列各式哪一个是正确的 ()
- (A) $y=2x$ ($x \in \mathbb{R}$) 和 $y=2x$ ($x \leq 5$) 是同²一函数
- (B) $y=\sqrt{(x-1)^2}$ 和 $y=x-1$ 是同一函数
- (C) $y=\frac{(x)}{x}$ 和 $y=\begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$ 是同一函数
- (D) $y=\frac{a}{x}$ 和 $xy=a$ 是同一函数
11. 已知函数 $f(x) = \lg(x^2 - 3x + 2)$ 的定义域为 F , 函数 $g(x) = \lg(x-1) + \lg(x-2)$ 的定义域为 G , 那么 ()
- (A) $F \cap G = \emptyset$, (B) $G \subset F$, (C) $F = G$, (D) $F \subset G$
12. 已知 $f(x)$ 定义域是 $[0, 1]$, 那么 $\varphi(x) = f(x+1)$ 的定义域是 ()
- (A) $-1 < x < 0$, (B) $-1 \leq x \leq 0$
- (C) $0 < x < 1$, (D) $-1 < x \leq 0$
13. 函数 $y = \sqrt{1-2x} + x$ 的值域是 ()
- (A) $y \geq \frac{1}{2}$, (B) $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$, (C) $y \leq 1$, (D) $0 \leq y \leq 1$
14. 已知 $f(x+1) = x^2 - 2x - 15$, 那么 $f(x)$ 是 ()
- (A) $f(x) = x^2 - 4x - 12$, (B) $f(x) = x^2 + 4x + 12$
- (C) $f(x) = x^2 - 4x + 12$, (D) $f(x) = x^2 + 4x - 12$
15. 判别函数 $f(x) = \frac{x}{a^x - 1}$ 的奇偶性 ()
- (A) 奇函数, (B) $a > 1$ 时是奇函数
- (C) 偶函数, (D) 非奇非偶函数.
16. $y = \sqrt{x^2 - 3} + \frac{1}{1 + |x|}$ 是 ()

- (A) 奇函数, (B) 偶函数
(C) 是奇函数又是偶函数, (D) 非奇非偶函数.

17. $\lg (\cos x-1)^2$ 与下式哪个相等 ()

- (A) $[\lg (\cos x-1)]^2$, (B) $2 \lg (\cos x-1)$

- (C) $4 \lg \left| \sin \frac{x}{2} \right| + 2 \lg 2$, (D) $2 \cos (\lg x)$

18. 已知 $f(x) = (2k+1)x+b$ 在 $x \in R$ 上是减函数, 那么 K 值范围 ()

- (A) $K > \frac{1}{2}$, (B) $K < \frac{1}{2}$, (C) $K < -\frac{1}{2}$, (D) $K > -\frac{1}{2}$

19. 如果 $f(x)$ 是奇函数, 当 $x > 0$ 时 $f(x) = x(1-x)$, 那么, 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 的表达式是 ()

- (A) $f(x) = x(x-1)$, (B) $f(x) = x(1+x)$

- (C) $f(x) = -x(x-1)$, (D) $f(x) = -x(1+x)$

20. 函数 $y = -2x^2 - 8x + 7$, ($x \in [-5, 5]$) 的值域 ()

- (A) $y \in [-83, 15]$, (B) $y \in (-83, 15]$

- (C) $y \in [-3, 15]$, (D) 以上都不对

21. 函数 $y = e^{3x} + 1$, ($x \in R$) 的反函数 ()

- (A) $y = \frac{1}{3} \ln x - 1$, ($x > 0$)

- (B) $y = \frac{1}{3} \ln x + 1$ ($x > 0$)

- (C) $y = \frac{1}{3} \ln (x-1)$ ($x > 1$)

- (D) $y = \frac{1}{3} \ln (x+1)$ ($x > -1$)

22. 如果 $a > 1$, $b > 1$, $P = \frac{\log_b (\log_a a)}{\log_b a}$ 那么 a^P 是

()

(A) 1, (B) b , (C) $\log_a b$, (D) $\log_b a$.

23. 设 $f(x) = |x-2| + |x-4| - |2x-6|$ 其中 $2 \leq x \leq 8$, 即求 $f(x)$ 的最大值与最小值的和是 ()

(A) 1, (B) 2, (C) 4, (D) 6

24. $3^{2x+2} - 3^{x+3} - 3^x + 3 = 0$ 的解是 ()

(A) 0, (B) 1 或 2, (C) -2 或 1, (D) 3

25. 若 $\log_7 [\log_3 (\log_2 x)] = 0$, 那么 $x^{-\frac{1}{2}}$ 的值是 ()

(A) $\frac{1}{3}$, (B) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, (C) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, (D) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$

26. 方程 $x^{\lg x} = 10$, 所有实根的积是 ()

(A) 1, (B) -1, (C) 10, (D) 10^{-1} .

27. 如果 $b > 1$, $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, 并且 $\log_b \sin x = a$, 那么, $\log_b \cos x$ 等于 ()

(A) $2\log_b (1-b^{\frac{a}{2}})$, (B) $\frac{1}{2}\log_b (1-b^{2a})$,

(C) $\sqrt{1-a^2}$, (D) b^{a^2}

28. 方程 $\log_5 (x+17) - \log_{\frac{1}{5}} (x-3) = 1$ 的解是 ()

(A) 2, (B) 4, (C) 6, (D) 10

29. 下列各组函数中表示同一函数的是 ()

(A) $f(x) = x$ 与 $g(x) = (x^{\frac{1}{2}})^2$

(B) $f(x) = |x|$ 与 $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$

(C) $f(x) = 10^{-2\lg x}$ 与 $g(x) = (\lg 10^x)^{-2}$

(D) $f(x) = |\lg (\frac{1}{2})^x|$ 与 $g(x) = |x| \lg 2$

30. 如果 $\log_a 9 < \log_b 9 < 0$, 则 a, b 满足 ()

(A) $a > b > 1$, (B) $b > a > 1$

(C) $0 < b < a < 1$, (D) $0 < a < b < 1$

31. 已知 $f(x) = \log_2 |x+1|$ 在区间 $(-1, 0)$ 上有 $f(x) > 0$, 那么 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上是 ()

(A) 增函数, (B) 减函数

(C) 增减性决定于 a , (D) 以上都不对

32. 若 $f(x)$ 为定义在区间 $[-6, 6]$ 上的偶函数, 且 $f(3) > f(1)$, 下列各式中一定成立的是 ()

(A) $f(-1) < f(3)$, (B) $f(0) < f(6)$

(C) $f(3) > f(2)$, (D) $f(2) > f(0)$

2. 填空题

1. 若两个非空集合 A, B , 且 $A \neq B$, 用适当的符号 ($\subseteq, \supseteq, =, \subset, \supset$) 填空

$A \cap B$ _____ A , $A \cap B$ _____ $B \cap A$, B _____ $A \cup B$, $A \cup B$ _____ $A \cap B$, $\emptyset$ _____ $A \cap B$.

2. 设 $I = \mathbb{R}$, $A = \{x | x < 3\}$, $B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $C = \{x | |x| < 2\}$, 则 $\bar{A} \cap C =$ _____, $B \cap \bar{C} =$ _____

3. 已知 $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | 3 < x < 5\}$, $A = \{x | 3 < x < 10\}$. 那么 $A \cap B =$ _____, $\bar{B} =$ _____ $A \cup B =$ _____

4. 若 $A = \{x | 1 < x < 3\}$, $B = \{x | x > 2\}$, 那么 $A \cap B =$ _____.

5. 220 个学生中, 175 个学生爱踢足球, 140 个学生爱打篮球, 20 个学生两样都不喜欢, 那么只爱踢足球的 _____ 人, 两样都喜欢的有 _____ 人.

6. 若 $f(x - \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 那么 $f(x+1) =$ _____.

7. 已知 $f(e^x) = x$, 那么 $f(1) =$ _____.