

工 科 中 专 通 用

数学

北京教育出版社

学 习 指 导

第
一
册

北京市《数学学习》

组

工科中专通用
数学学习指导

第 一 册

北京市《数学学习指导》编写组

工科中专通用数学学习指导 第一册

Gongke Zhongzhuan Tong yong Shuxue Xuexi Zhidao Diyice

北京市《数学学习指导》编写组

*

北京教育出版社出版
(北京北三环中路6号)

新华书店北京发行所发行
香河县第二印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 7.625印张 166,000字

1991年6月第1版 1991年6月第1次印刷

印数 1—10,330

ISBN 7-5303-0213-2/G·192

定 价: 2.60 元

前 言

为推动中专数学教学改革的深入开展，提高教学质量，帮助学生适应中专数学的特点，较好地掌握基础知识和学习方法，逐步提高学习能力，并配合教师的教学需要，由北京市中专数学教研会组织编写了《数学学习指导》一、二、三册。本书与工科类专业通用中等专业学校试用教材《数学》（79年第1版、85年第2版）第一、二、三册配合使用。

各章由以下几部分组成：一、内容概述。二、学习要求：根据1983年教育部审定的《中等专业学校数学教学大纲》和北京市中专数学教研会制定的《中专数学教学基本要求（试行）》，指出每章各部分应掌握的程度。各章的学习要求由高到低按以下三级划分：概念与理论分为理解、了解、知道；计算与应用分为熟练掌握、掌握、会和能。三、学习指导：通过对各章主要概念、定义、性质、定理、公式等基本内容的分析，结合典型例题，帮助学生弄清基本概念，掌握解题思路，总结解题方法。四、练习题：由思考题、选择题、判断题、计算题和应用题等类型组成，用于加强基础知识和基本技能的训练，复习巩固所学的知识。五、本章小结。六、自测题：分A、B卷，A卷用于检查基础知识的掌握程度，B卷为提高题，用于检查灵活掌握知识的程度。

本书供中专学生学习和教师教学使用，亦可供职工中专、电视中专、技校的学生和教师使用。

参加本书编写的教师有贝虹、王玲、张明群、沈祖尧、辛述立、何秀玲、刘慧领、陈柏林、杜克明等。

编写本书是探索适应中专学生学习和教师教学两方面需要的尝试，由于我们经验不足，水平有限，编写时间仓促，难免有缺点和错误，恳切希望大家批评指正，以便总结经验，不断改进提高。

北京市《数学学习指导》编写组

1990年8月

目 录

第一章	集合与函数	1
第二章	幂函数、指数函数、对数函数	27
第三章	任意角的三角函数	52
第四章	三角函数的简化公式 三角函数的图像	77
第五章	加法定理及其推论 正弦型曲线	101
第六章	反三角函数与简单的三角方程	133
第七章	复数	165
第八章	排列、组合、二项式定理	189
练习题	自测题答案	219

第一章 集合与函数

一 内容概述

本章内容分为两大部分。首先讲述集合的基本概念及运算，主要介绍了集合的意义，集合的表示法及子集、并集、交集、差集、全集和补集的定义；讲解了并、交、差、补等集合的运算。集合的理论是现代数学的基础，集合的思想已被广泛应用于科技等许多领域，在小学和初中数学中曾出现过集合的简单实例，直到本章才正式引入集合的概念。本章所引进的术语、符号和运算方法，以后还要用到，所以中专学生学习一些集合的知识不仅有助于加深对初等数学某些内容的理解，也可为今后学习概率、统计等知识打好基础。

然后讲述函数。课本通过集合间元素的单值对应关系，给出了函数的定义、记号、定义域的区间表示，介绍了函数的图像；又在反对应关系单值的基础上建立了反函数的概念。函数是数学学科的一个极为重要的概念，它深刻反映了客观世界的运动和变量间的依赖关系；函数概念不仅与集合、数、代数式、方程有密切的联系，也是学习微积分学的必要准备，因此要十分重视函数知识的学习。

二 学习要求

1. 理解集合的概念及子集、并集、交集、全集、补集

的定义，了解差集的定义，正确使用集合的有关术语和符号；熟练掌握集合的表示方法、元素与集合的关系，掌握集合与集合的包含和相等关系；熟练掌握并、交、补集合运算，掌握差运算；知道平面点集的运算、文氏图的意义、集合的运算律。

2. 理解函数的概念、函数记号的含义，了解分段函数的意义；熟练掌握函数值和一些简单函数（解析式中含整式、分式、根式）的定义域的求法；正确运用区间或不等式表示函数定义域；会用集合表示函数定义域；熟练应用描点法作出简单函数（一次函数、二次函数、反比例函数）的图像，会画简单分段函数的图像。

3. 了解反函数的概念，掌握互为反函数的两个函数图像的作法，掌握某些简单函数反函数的求法。

三 学习指导

（一）集合的概念

1. 集合的意义

我们把具有某种特定性质的对象组成的总体叫做集合，简称集。把组成某一集合的各个对象叫做这个集合的元素。

集合是数学中许多原始概念之一，我们不能用其他更基本的概念定义它，只能对它做如上的描述性说明。要理解它，必须抓住描述性说明中“某种特定性质”和“总体”这两个关键。

“总体”是指满足“某种特定性质”的所有的对象，不得有遗漏；“某种特定性质”则可理解为“某种条件”、

“公共属性”等，这个“性质”必须有确切的含义，可用它来判断一个对象是否为该集合的元素。用它做判断依据时结

论或“是”或“否”，应是确定的，不能因人而异，不得模棱两可。若性质的含义不明确，就不能形成集合。如“某班身高超过1.70米的学生的全体”，其特定性质“某班身高超过1.70米的学生”意义明确，可形成集合，该班某甲身高1.73米必是此集合元素，该班某乙身高1.61米，另一班某丙身高1.87米，均非此集合元素；又如“某班高个子的全体”，其中“高个子”意义不明确，就不能形成集合。

通常，我们用 $A, B, C, \dots$ 表示集合，用 $a, b, c, \dots$ 表示元素。

2. 集合的两种表示法

集合的表示法通常有：

列举法： $\{a, b, c, \dots, x, y, \dots\}$ ；

描述法： $\{\text{具有} \times \times \text{条件的} *\}$

或 $\{ * \mid * \text{所具有的条件} \}$ 。

列举法的优点是直观具体，展现了集合的所有元素，常用来表示有限集合。使用列举法时，要强调所列举元素不要重复，不要遗漏，顺序可不考虑。有时元素太多也可用删节号，但应突出其变化规则。如小于16的偶数组成的集合，应写成 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ ，也可写成 $\{14, 12, 8, 4, 6, 2, 10\}$ ，或 $\{2, 4, 6, \dots, 14\}$ ，但不要写成 $\{2, \dots, 14\}$ 。

描述法的优点是集合元素的公共属性能被清楚地刻画出来，便于研究集合间的关系，而且不能用列举法表示的集合只能借助描述法表示。使用描述法时应注意把集合中元素所具有的特定性质正确表达出来。

两种表示法的目的都在于尽可能明确表达集合的元素和它的特定性质，选用时应以方便为准。但不论用哪种方法表

示集合，都应做到：能从已显示的方面分析出未显示的方面。应能从列举法表示的集合元素，观察出它们的公共属性；又能从描述法表示的集合性质，判定哪些对象是它的元素。

(二) 集合间的关系与运算

1. 子集，真子集，集合相等

(1) 子集、真子集。

对于两个集合 A 和 B ，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则集合 A 叫做集合 B 的子集，记为

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A$$

读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”。

如果集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A ，则称集合 A 是集合 B 的真子集，记为

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A.$$

学习子集概念时，一般不要把子集说成是原来集合的部分元素形成的集合，因为集合本身和空集 $\emptyset$ 都是原来集合的子集。除了上述两个集合外，其他集合间的包含关系，表达了集合的元素间的部分与全体的关系，但一般不说两个集合谁大谁小。

学习子集时还要会写出含 n 个元素的有限集合的所有子集，通常的方法是按子集所含元素个数由0至 n 逐个增添元素一一列举。若一个集合共有 n 个元素，则它应有 2^n 个不同子集， $2^n - 1$ 个真子集。

(2) 集合相等：对于两个集合 A 和 B ，如果 $A \subseteq B$ ，同时 $B \subseteq A$ ，则称集合 A 和集合 B 相等，记为

$$A = B$$

应当明确：相等的集合其元素完全相同。

2. 并集与并运算

A 和 B 两个集合的并集定义为:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

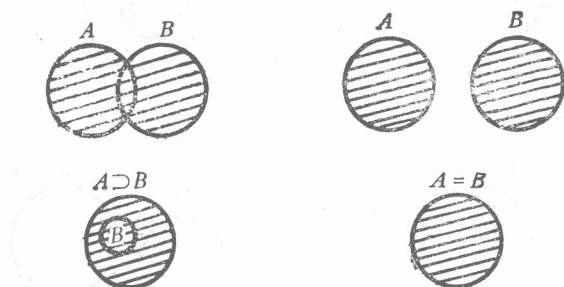


图1—1

图1—1中阴影部分表示了 $A \cup B$ 中元素 x 的几种情况。

按定义理解两个集合的并集是由两个集合的元素合并组成的, 因此并集中元素只须具备两个集合之一的特性即可, 描述时应强调定义式中的“或”字。结合图1—1可看出有下述关系式成立:

$$A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$$

$$A \cup B = B \cup A, A \cup A = A, A \cup \emptyset = A.$$

3. 交集与交运算

A 和 B 两个集合的交集定义为:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

图1—2中阴影部分表示 $A \cap B$ 中元素 x 的几种情况。

按定义理解两集合的交集是由两个集合的共同元素所组成, 因此交集的元素必须同时具有两集合的特定性质, 描述时应强调定义式中的“且”字。结合图1—2可看出有下述关系式成立:

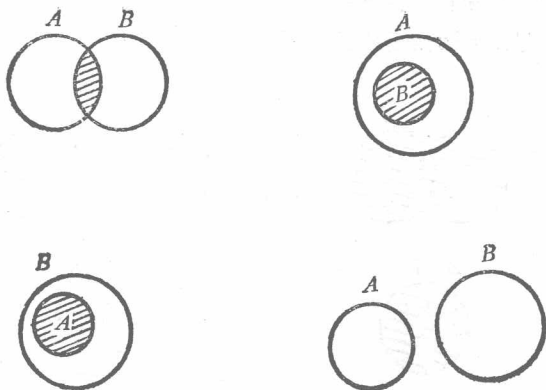


图1-2

$A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ 及

$A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

在实际进行两集合的并、交等运算时要特别注意两集合共同元素及非共同元素的去留。

例1 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x - 4 < 0\}$,

$B = \{x | 10 - 3x \geq 0\}$,

$C = \{x | -x^2 + 3x - 2 < 0\}$,

求 $(A \cap B) \cup C$

解 已知集合变形为:

$$A = \{x | x^2 - 5x - 4 < 0\} = \{x | 1 < x < 4\}$$

$$B = \{x | 10 - 3x \geq 0\} = \{x | x \leq \frac{10}{3}\}$$

$$C = \{x | -x^2 + 3x - 2 < 0\} = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$$

在数轴上表示如图1-3

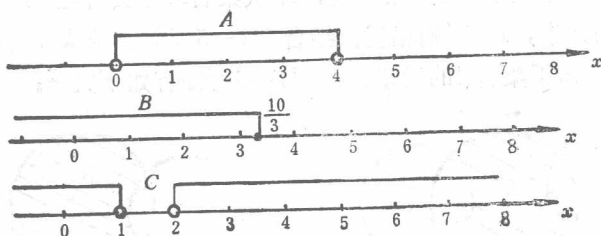


图1—3

可借助数轴进行图解求出其交集、并集如图1—4：

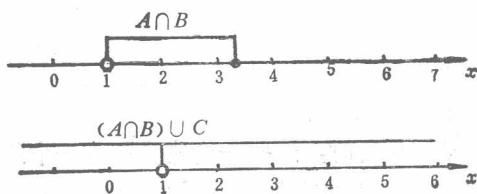


图1—4

其中：

$$A \cap B = \{x | 1 < x < 4\} \cap \{x | x \leq \frac{10}{3}\}$$

$$= \{x | 1 < x \leq \frac{10}{3}\};$$

$$(A \cap B) \cup C = \{x | 1 < x \leq \frac{10}{3}\} \cup \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$$

$$= \{x | x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq 1\}$$

4. 差集与差运算

通常我们把属于集合A而不属于集合B的所有元素组成的集合叫做A与B的差集。记为 $A - B$

这里要特别注意 $A-B$ 与 $B-A$ 的不同。按定义 $A-B$ 由属于 A 不属于 B 的元素组成，即从集合 A 中去掉也属于集合 B 的元素， $B-A$ 则相反。结合图1—5可知它是从集合 B 中去掉也属于集合 A 的元素。由图1—5可知有如下关系：

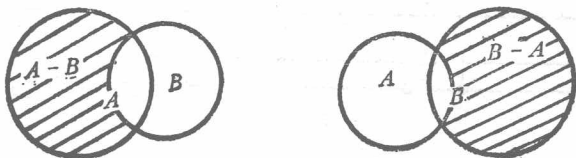


图1—5

$$A - A = \emptyset;$$

$$A - \emptyset = A;$$

$$A - B \neq B - A.$$

5. 全集、补集与补运算

在研究某些集合时，这些集合常常都是一个给定集合的子集，这个给定的集合叫做全集，记为 Ω 。也就是说，全集包含了我们此时所研究的集合的全部元素。

设 Ω 为全集， A 为 Ω 的子集，则差集 $\Omega - A$ 叫做集合 A 的补集，记作 $\overline{A}$ ，读作“ A 补”，即

$$\overline{A} = \Omega - A \text{ 或 } \overline{A} = \{x | x \in \Omega, x \notin A\}.$$

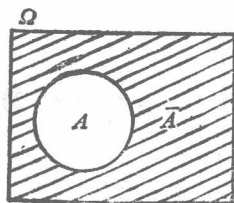


图1—6

图1—6中的阴影部分就表示 A 的补集 $\overline{A}$ 。

必须明确补集是相对全集而言的，离开全集则补集无从谈起。同一集合求补集，因全集不同求出的补集也不同。结合图1—6可看出有关系式：

$$A \cup \overline{A} = \Omega, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset \quad \text{及}$$

$\bar{\Omega} = \emptyset, \bar{\emptyset} = \Omega, (\bar{A}) = A$ 成立.

因此两集合 A, B 互为补集必须同时满足 $A \cup B = \Omega$ 和 $A \cap B = \emptyset$, 二者缺一不可, 这也是判断求补运算正确与否的一个依据.

例2 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$\bar{A} = \{1, 3, 4\}$$

$$\bar{B} = \{2, 4, 5\}$$

求 $A, B, A - B, A \cap B, A \cap \bar{B}, (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.

解 $A = \Omega - \bar{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{1, 3, 4\}$
 $= \{2, 5, 6\},$

$$B = \Omega - \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 4, 5\}$$

 $= \{1, 3, 6\}.$

$$A - B = \{2, 5, 6\} - \{1, 3, 6\} = \{2, 5\},$$

$$A \cap B = \{2, 5, 6\} \cap \{1, 3, 6\} = \{6\},$$

$$A \cap \bar{B} = \{2, 5, 6\} \cap \{2, 4, 5\} = \{2, 5\},$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \{6\} \cup \{2, 5\} = \{2, 5, 6\}.$$

此例中 $A - B$ 与 $A \cap \bar{B}$ 相等以及 $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$ 决非偶然, 有的书上列为公式, 为什么? 可结合图1—7思考.

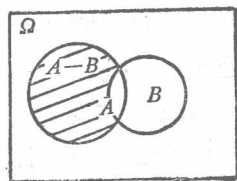


图1—7

例3 若 $\Omega = R, A = \{x | -5 < x \leq 4\}, B = \{x | 2 \leq x \leq 7\}$.

求 $A \cup B, A \cap B, A - B, \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cup B}$.

解 $A \cup B = \{x | -5 < x \leq 7\},$

$$A \cap B = \{x | 2 \leq x \leq 4\},$$

$$A - B = \{x | -5 < x < 2\},$$

$$\bar{A} = \{x | x \leq -5 \text{ 或 } x > 4\},$$

$$\bar{B} = \{x | x < 2 \text{ 或 } x > 7\},$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{x | x \leq -5 \text{ 或 } x > 7\},$$

$$\overline{A \cup B} = \{x | x \leq -5 \text{ 或 } x > 7\}.$$

其中 $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ ，不难验证。此外还有

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

有的书上也列为公式。

为什么？也可结合图1—7考虑。

6. 几点注意

(1) 符号“ $\in$ ”“ $\notin$ ”表示集合与元素关系，符号“ $\subseteq$ ”，“ $\subset$ ”，“ $\supseteq$ ”，“ $\supset$ ”表示集合与集合的关系，不可混淆。

(2) 0, a 是元素， $\{0\}$, $\{a\}$ 是集合， $\emptyset$ 是不含任何元素的空集。0, $\{0\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ 是不同的， a 和 $\{a\}$ 是不同的。

(3) 字母 N , Z , Q , R 在本章表示一些特定的集合，使用时不可再加 $\{ \}$ 。如 $\{N\}$ 不表示自然数集， $\{R\}$ 不表示实数集，而分别是以集合 N 和 R 为元素的新集合。集合 $\{\emptyset\}$ 不是空集 $\emptyset$ 也是这个道理。

(三) 函数

设 D 是一个数集。如果对于 D 上的每一个确定的数值 x ，按照某个对应关系， y 都有唯一确定的值和它对应，那末 y 就叫做定义在数集 D 上 x 的函数。记为 $y = f(x)$

其中 x 叫做自变量。数集 D 叫做函数的定义域。当 x 取遍 D 中的一切数值时，对应的函数值的集合叫做函数的值域。

1. 对应法则 f

(1) $y = f(x)$ 是语句“ y 是 x 的函数”的记号，决不意

意味着“ y 等于 f 乘以 x ”。其中 f 表示 x 与 y 间的对应法则（关系），即对自变量 x 的每一个确定的值对应唯一确定的函数值 y 。

(2) 函数记号 f 表示的法则是对 f 后括号里的整体实施的。例如 $f(x)=2x$ ，那末 $f(x^2+1)=2(x^2+1)$ 。反之，若已知 $f(x+1)=x^2-3x+4$ ，也可求出 $f(x)$ ，这由

$$\begin{aligned} f(x+1) &= x^2 - 3x + 4 = x^2 + 2x + 1 - 5x - 5 + 8 \\ &= (x+1)^2 - 5(x+1) + 8, \end{aligned}$$

可知 $f(x)=x^2-5x+8$ 。

在同一问题中，同一个字母表示相同的对应法则，不同的对应法则要使用不同的字母。

2. 函数值

$f(x_0)$ ($x_0 \in D$) 是一个具体的数，它表示当 $x=x_0$ 时经对应法则 f 得到的函数值 $y_0=f(x_0)$ 。 $f(x_0)$ 与 $f(x)$ 所表示的函数，意义完全不同。

求函数值 $y_0=f(x_0)$ 时应注意：

当函数关系以一个解析式给出时，可以将 $x=x_0$ 代入 $y=f(x)$ 计算求得函数值 $y_0=f(x_0)$ ；

当函数关系以图像形式给出时，函数值 $y_0=f(x_0)$ 就是图像上以 $x=x_0$ 为横坐标的点 $P(x_0, y_0)$ 的纵坐标 $y_0=f(x_0)$ 。寻找 $y_0=f(x_0)$ 的方法如图1—8所示：

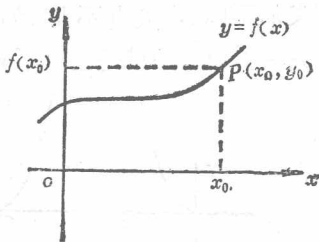


图1—8

若函数关系以分段形式给出，求函数值时必须代入相应的表达式。如分段函数