初中数学
实用解题方法与技巧

王向东　贾士代主编

上

上海科学技术文献出版社

初中数学实用解题方法与技巧

（上 册）

王向东 贾士代 主编

上海科学技术文献出版社

初中数学实用解题方法与技巧

（上　册）

王向东　贾士代　主编

*

上海科学技术文献出版社出版发行

（上海市武康路2号）

邮政编码：200031

新　华　书　店　经　销

宜兴市第二印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 13　字数 314,000

1989年11月第1版　1989年11月第1次印刷

印数：1—12,200

ISBN 7-80513-425-1/O·38

定价：4.70元

《科技新书目》199-316

序　言

近年来，国内关于初中数学解题方法与技巧的书业已汗牛充栋。虽然其中一部分对初中数学教学起到过一定的积极作用，但是，它们大多过于简略，不能真正满足广大师生的需要，其共同缺陷是针对性、实用性差，对解决某一类型题，方法与技巧不全面、不详细、不深刻、不系统。这样，读者读完之后，对于某些问题仍然感到束手无策，一筹莫展。本书的编写目的就是试图弥补这一缺陷的。

本书共分上、下两册，上册八章为代数部分，下册六章为几何部分。全书各章自成体系，每一章针对某一问题的所有解决方法，都尽量给出详尽的论述，其中每一方法都通过例题和小结去揭示解题思想和规律。同时，每章末还精选了一定数量的习题，以供参考。无论从内容上或是从方法上，本书选材均以国家教委最新颁布的“初中数学教学大纲”为依据，以培养学生能力、发展智力为原则，源于教材，但深度和广度都稍有提高，意在温故知新，开阔思路，扩大眼界，活跃思想。

本书是为广大中学师生编写的，也适合于师范院校数学系师生参考。同时，对广大自学者，数学爱好者也有一定的指导作用，更是中考复习和初中数学竞赛的指南。亦可作为数学解题方法与技巧的工具书使用。

本书是由集体编写而成的，参加编写者都是国内一些重点中学多年从事教学、实践经验丰富的业务骨干，主要有（依姓氏笔画为序）：王方汉（武汉市二十三中）、王守庆（河北遵化县教育局）、刘子芳（西安市八十九中）、刘伯萱（广州市广雅中学）、吴永深（深圳市翠园中学）、房崇和（宝鸡市教育局）、芮彭年（上海市山西中学）、胡道煊（四川达县六中）、侯书清（湖北洪湖市教研室）、杨作展（广东潮州市教育局）、脱新祥（南京市金陵中学）、许汝递（上海市嘉定县教研室）、邵迎超（郾城高中）、董书证（遂平一中）。另外，参加本书编写的还有章枚、李志敏、王淑桢、蔡志雷、赵仁安、李民安、王保国、张三星等同志。

编者虽然为本书的理想效果做了不少努力，但因时间仓促，加之学识所限，书中谬误、片面之处一定不少，热诚欢迎广大读者批评指正。

王向东

1988年5月于北京

目　录

第一章　因式分解的方法与技巧……………………………… 1
§1　基本理论 …………………………………………………… 1
§2　方法与例题分析………………………………………………… 2
习题精选 ……………………………………………………………50
习题答案或提示 ……………………………………………………54
第二章　绝对值、算术根及根式化简…………………………60
§1　基本理论 ……………………………………………………60
§2　方法与例题分析 ……………………………………………63
习题精选 ………………………………………………………… 108
习题答案或提示 ………………………………………………… 116
第三章　指数、对数中的方法与技巧……………………… 120
§1　基本理论 ………………………………………………… 120
§2　方法与例题分析 ………………………………………… 123
习题精选 ………………………………………………………… 140
习题答案或提示 ………………………………………………… 143
第四章　解方程(组)的方法与技巧………………………… 145
§1　基本理论 ………………………………………………… 145
§2　方法与例题分析 ………………………………………… 148
习题精选 ………………………………………………………… 224
习题答案或提示 ………………………………………………… 230
第五章　不等式(组)中的方法与技巧……………………… 238
§1　基本理论 ………………………………………………… 238
§2　方法与例题分析 ………………………………………… 242
习题精选 ………………………………………………………… 276

习题答案或提示 …………………………………………………… 278
第六章 函数及其应用…………………………………………… 280
§1 基本理论 ………………………………………………… 280
§2 方法与例题分析 ………………………………………… 284
习题精选 ……………………………………………………… 308
习题答案或提示 ……………………………………………… 311
第七章 三角函数与解三角形的方法与技巧……………… 318
§1 基本理论 ………………………………………………… 318
§2 方法与例题分析 ………………………………………… 323
习题精选 ……………………………………………………… 350
习题答案或提示 ……………………………………………… 353
第八章 应用题的类型与解法………………………………… 357
§1 基本理论与基本方法…………………………………… 357
§2 常见类型与解法 ………………………………………… 365
习题精选 ……………………………………………………… 399
习题答案或提示 ……………………………………………… 402

第一章　因式分解的方法与技巧

§1　基本理论

(一)合数的质数分解

大家知道,1, 2, 3, …, n, …这些数叫正整数, -1, -2, -3, …, $-n$, …这些数叫负整数,我们把正整数、负整数和零统称为整数。

如果 a, b 是非零整数,并且存在整数 c,使得 $a=bc$,那么 a 叫做 b 的倍数, b 叫做 a 的约数或因数。也可以说, b 能整除 a 或 a 能被 b 整除。

正整数中有这样一类数: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …, 它们只能被1和它本身整除,这样的数叫质数或素数。如果一个正整数,除了能被1和它本身整除以外,还能被其它的正整数整除,这样的数叫合数。1既不是质数也不是合数。

如果 b 是 a 的约数,并且 b 是质数,那么 b 叫做 a 的质因数。

把一个合数写成它的质因数的连乘积的形式,叫做把这个合数质因数分解。

(二)多项式的质因式分解

下面,我们把合数的质因数分解推广到多项式的情形。

对代数式进行分类,有如下的系统表:

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

从这个系统表，可以清楚地看出多项式在代数式系统中的地位。

如果对于整式 $f(x)$ 和 $g(x)$，存在整式 $\phi(x)$，使得 $f(x)=g(x)\phi(x)$，那么 $f(x)$ 叫做 $g(x)$ 的倍式，$g(x)$ 叫做 $f(x)$ 的因式。也可以说，$g(x)$ 能整除 $f(x)$ 或 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除。

系数在某一指定的范围内，如果一个多项式只能被 1 和它本身整除，那么这个多项式叫做系数在指定范围内的质式，也叫做不可约多项式或既约多项式。

我们在判断一个多项式是不是质式时，要特别注意"系数在某一指定的范围内"这个前提条件，例如，多项式 x^2-2 在有理数范围内是质式，而在实数范围内不是质式。

系数在某一指定的范围内，整式 $g(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的因式，并且 $g(x)$ 是质式，那么 $g(x)$ 叫做 $f(x)$ 的质因式。

现在，我们可以谈多项式的因式分解的意义了：

系数在某一指定的范围内，把一个多项式写成它的质因式的连乘积的形式，叫做这个多项式的因式分解，或者叫做把这个多项式分解的因式。

因此，把一个多项式分解因式时，必须明确系数是在什么范围内进行。但是，在没有特别指明的情况下，一般是指在有理数范围内进行。

§2 方法与例题分析

(一)提取公因式法

一个多项式各项都有的相同的因式，叫做这个多项式各项的公因式。如果一个多项式的各项有公因式，那么我们就把它提出来，作为这个多项式的因式。这种因式分解的方法，叫做提取公因式法。

提取公因式法的理论根据是乘法分配律的相反过程，即

$$ma+mb=m(a+b)。$$

例 1 分解因式 $ma+mb+m$。

解 原式 $=m(a+b+1)$。

小结 提取公因式后，括号内的多项式的项数，应该与原多项式的项数相同。不要出现这样的错误：$ma+mb+m=m(a+b)$。

例 2 分解因式 $6x^4y^3z^2-12x^2y^4z^2+8x^3y^2$。

解 原式 $=2x^2y^2(3x^2yz^2-6y^2z^2+4x)$。

例 3 分解因式 $\left(-\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2\right)+\left(\frac{16}{3}x+3\right)$。

解 原式 $=-\frac{1}{12}x^2(16x+9)+\frac{1}{3}(16x+9)$

$$=-\frac{1}{12}(16x+9)(x^2-4)。$$

小结 提取公因式时，对各项的系数部分和字母部分都要考虑。字母部分，要提出相同字母的最低次幂。系数部分，当系数是整数时，要提出其最大公因数；当系数中出现有分数时，则把各项系数的公分母作分母，把分子的最大公因数作分子的分数作为公因数提出来。

例 4 分解因式 $4x^{2n+1}-14x^{n-1}$（n 是自然数）。

解 原式 $=4x^{(n-1)+(n+2)}-14x^{n-1}=4x^{n-1}\cdot x^{n+2}-14x^{n-1}$

$$=2x^{n-1}(2x^{n+2}-7)。$$

小结 多项式的项中，如果有含字母的指数幂，在提取公因

式时，要对相同字母的指数作加法分析，把指数较大的幂分成两个同底数幂相乘，再提出相同字母的最低次幂。

例5 分解因式

(1) $5(x-y)^2-10(y-x)^3$； (2) $5(x-y)^3-10(y-x)^2$。

解 (1) 原式 $=5(x-y)^2+10(x-y)^3$

$=5(x-y)^2[1+2(x-y)]$

$=5(x-y)^2(2x-2y+1)$。

(2) 原式 $=5(x-y)^3-10(x-y)^2$

$=5(x-y)^2[(x-y)-2]$

$=5(x-y)^2(x-y-2)$。

小结 提取的公因式不一定就是单项式，当然也可以是多项式。这时要注意符号变形的规则，记住：$(y-x)^{2n}=(x-y)^{2n}$，$(y-x)^{2n+1}=-(x-y)^{2n+1}$（$n$是自然数）。

（二）利用乘法公式法

常用的乘法公式有：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \tag{1}$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2 \tag{2}$$

$$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3 \tag{3}$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2) \tag{4}$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2 \tag{5}$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \tag{6}$$

上面的公式，反映了等号两端数学式子的结构规律。利用这些公式把多项式分解因式的方法叫做利用乘法公式法因式分解。

例1 分解因式 $(ab+1)^2-(a+b)^2$。

解

原式$=[(ab+1)+(a+b)][(ab+1)-(a+b)]$ [公式(1)]

$=[(ab+a)+(b+1)][(ab-a)-(b-1)]$

$=[a(b+1)+(b+1)][a(b-1)-(b-1)]$

$=(b+1)(a+1)(b-1)(a-1)$。

例2 分解因式 $x^3-8y^3-24xy-64$。

解 原式$=x^3+(-2y)^3+(-4)^3-3x(-2y)(-4)$

$=[x+(-2y)+(-4)][x^2+(-2y)^2+(-4)^2$

$-x(-2y)-(-2y)(-4)-(-4)x]$ [公式(6)]

$=(x-2y-4)(x^2+4y^2+2xy+4x-8y+16)$。

例3 分解因式 $x^2+9y^2+4z^2-6xy+4xz-12yz$。

解

原式$=x^2+(-3y)^2+(2z)^2+2x(-3y)+2(-3y)(2z)$

$+2(2z)x$

$=(x-3y+2z)^2$。 [公式(5)]

小结 准备直接套用公式时，要仔细审查多项式的每一项，看字母和系数这两个方面是否都符合公式的结构要求。

例4 分解因式 $(a^2+ab+b^2)^2+4ab(a+b)^2$。

解 原式$=(a^2+ab+b^2)^2+4ab[(a^2+ab+b^2)+ab]$

$=(a^2+ab+b^2)^2+4ab(a^2+ab+b^2)+4a^2b^2$

$=[(a^2+ab+b^2)+2ab]^2$ [公式(2)]

$=(a^2+3ab+b^2)^2$。

例5 分解因式 $(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$。

解 原式$=[(a+b)-2ab][(a+b)-2]+(1-ab)^2$

$=(a+b)^2-2(ab+1)(a+b)+(1+ab)^2$

$=[(a+b)-(1+ab)]^2$

$=(a-1)^2(b-1)^2$。

小结 运用公式法进行因式分解的关键是熟练掌握各乘法

公式。有的多项式看起来似乎不符合公式的结构要求，但是经过适当的变形，就可以套用公式了。

（三）分组分解法

我们看一个例子，分解因式 $ax+by+ay+bx$。

解 原式 $=(ax+bx)+(ay+by)=x(a+b)+y(a+b)$

$=(a+b)(x+y)$。

这种用添括号的手段把多项式分成几组后，逐步达到因式分解目的的方法，叫做分组分解法。

例 1 分解因式 $ax+ay-a+bx+by-b$。

解法一 （以字母 a, b 为线索）

$$\begin{aligned}原式&=(ax+ay-a)+(bx+by-b)\\&=a(x+y-1)+b(x+y-1)\\&=(x+y-1)(a+b)。\end{aligned}$$

解法二 （以字母 x, y 为线索）

$$\begin{aligned}原式&=(ax+bx)+(ay+by)-(a+b)\\&=x(a+b)+y(a+b)-(a+b)\\&=(a+b)(x+y-1)。\end{aligned}$$

小结 分组时要掌握一个"线索"。上例中，以不同的字母为线索，得出不同的分解方法，但殊途同归。

例 2 分解因式 $2a^2b+4ab^2-a^2c+ac^2-4b^2c+2bc^2-4abc$。

分析 这个多项式中，有三项系数为 4 或 -4，两项的系数为 2，两项的系数为 -1，共有七项。因此有必要把系数为 4 或 -4 的某项拆成两项。

解

$$\begin{aligned}原式&=2a^2b+4ab^2-a^2c+ac^2-4b^2c+2bc^2-2abc-2abc\\&=(2a^2b-2abc)+(4ab^2-4b^2c)-(a^2c-ac^2)\\&\quad+(2bc^2-2abc)\end{aligned}$$

$$=2ab(a-c)+4b^2(a-c)-ac(a-c)+2bc(c-a)$$
$$=(a-c)(2ab+4b^2-ac-2bc)$$
$$=(a-c)[(2ab+4b^2)-(ac+2bc)]$$
$$=(a-c)[2b(a+2b)-c(a+2b)]$$
$$=(a-c)(a+2b)(2b-c)。$$

小结 有时我们还可以用系数作为线索，对多项式进行分组，下面再看一例。

例3 $x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$ 因式分解后的结果是(　　)。

(A) $(y-z)(x+y)(x-z)$; (B) $(y-z)(x-y)(x+z)$;

(C) $(y+z)(x-y)(x+z)$; (D) $(y+z)(x+y)(x-z)$。

答 (A)

理由：

$$原式=(x^2y-x^2z)-(y^2z-z^2y)+(xz^2-xyz)+(y^2x-xyz)$$
$$=x^2(y-z)-yz(y-z)-xz(y-z)+xy(y-z)$$
$$=(y-z)[(x^2+xy)-(yz+xz)]$$
$$=(y-z)[x(x+y)-z(x+y)]$$
$$=(y-z)(x+y)(x-z)。$$

例4 分解因式

(1) $2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a^2-b^2)^2$; (2) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+8$。

解 (1)

$$原式=2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a+b)^2(a-b)^2$$
$$=(a+b)^2[2(a^2+b^2)-(a-b)^2]$$
$$=(a+b)^2(a^2+2ab+b^2)=(a+b)^4。$$

(2) $$原式=(x-y)^3+8$$
$$=(x-y+2)[(x-y)^2-2(x-y)+4]$$

$$=(x-y+2)(x^2-2xy+y^2-2x+2y+4)。$$

小结 适当分组，为利用乘法公式法或提取公因式法因式分解铺平了道路。

例 5 分解因式 $(x+y)^3+(z-x)^3-(y+z)^3$。

解法一 （前面两个括号项分在一组）

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=[(x+y)+(z-x)][(x+y)^2-(x+y)(z-x)\\
&\quad+(z-x)^2]-(y+z)^3\\
&=(y+z)[(x+y)^2-(x+y)(z-x)\\
&\quad+(z-x)^2-(y+z)^2]\\
&=(y+z)[(x+y)(x+y-z+x)\\
&\quad+(z-x+y+z)(z-x-y-z)]\\
&=(y+z)[(x+y)(2x+y-z)\\
&\quad-(x+y)(-x+y+2z)]\\
&=(y+z)(x+y)(2x+y-z+x-y-2z)\\
&=3(y+z)(x+y)(x-z)。
\end{aligned}$$

解法二 （后两个括号分在一组）

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=(x+y)^3+[(z-x)-(y+z)][(z-x)^2\\
&\quad+(z-x)(y+z)+(y+z)^2]\\
&=(x+y)^3-(x+y)[(z-x)^2+(z-x)(y+z)\\
&\quad+(y+z)^2]\\
&=(x+y)[(x+y)^2-(z-x)^2-(z-x)(y+z)\\
&\quad-(y+z)^2]\\
&=(x+y)[(x+y+z-x)(x+y-z+x)\\
&\quad-(y+z)(z-x+y+z)]\\
&=(x+y)(y+z)(2x+y-z+x-y-2z)\\
&=3(x+y)(y+z)(x-z)。
\end{aligned}$$

解法三 （先去括号再分组）

$$
\begin{aligned}
\text{原式}=&(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+(z^3-3xz^2+3x^2z-x^3)\\
&-(y^3+3y^2z+3yz^2+z^3)\\
=&3(x^2y+xy^2+x^2z-xz^2-y^2z-yz^2)\\
=&3[(x^2y+xy^2+x^2z+xyz)\\
&-(xyz+y^2z+xz^2+yz^2)]\\
=&3[x(xy+y^2+xz+yz)-z(xy+y^2+xz+yz)]\\
=&3(xy+y^2+xz+yz)(x-z)\\
=&3[y(x+y)+z(x+y)](x-z)\\
=&3(x+y)(y+z)(x-z)。
\end{aligned}
$$

小结 从上述例子可以看出，分组分解法是比较灵活的，但方法有优有劣，上面三种解法中解法三走了一点弯路。这种解法中有这样一个步骤：

$$
\begin{aligned}
\cdots=&3(x^2y+xy^2+x^2z-xz^2-y^2z-yz^2)\\
=&3[(x^2y+xy^2+x^2z+xyz)-(xyz+xz^2+y^2z+yz^2)]\\
=&\cdots
\end{aligned}
$$

这里添了两项 xyz 和 $-xyz$。在本节例 2 中，又采用了把某一项拆成两项的方法。这种通过添项或者拆项再分组分解的方法，叫做添拆项法。利用添拆项分组分解，这是常用的一种技巧。下面再举几例。

例 6 分解因式 $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$。

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式}=&(x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2z^2x^2+2y^2z^2)-4y^2z^2\\
=&(x^2-y^2-z^2)^2-(2yz)^2\\
=&(x^2-y^2-z^2+2yz)(x^2-y^2-z^2-2yz)\\
=&[x^2-(y-z)^2][x^2-(y+z)^2]\\
=&(x+y-z)(x-y+z)(x+y+z)(x-y-z)。
\end{aligned}
$$

例 7 分解因式 $a^4+b^4+(a+b)^4$。

解 原式 $=(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2+(a+b)^4-a^2b^2$

$$=[(a^2+b^2)^2-(ab)^2]+[(a+b)^4-(ab)^2]$$
$$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$
$$+(a^2+3ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$$
$$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2+a^2+3ab+b^2)$$
$$=2(a^2+ab+b^2)^2。$$

例 8 分解因式 $x^{16}+x^8y^8+y^{16}$。

解 原式 $=(x^{16}+2x^8y^8+y^{16})-x^8y^8$

$$=(x^8+y^8)^2-(x^4y^4)^2$$
$$=(x^8+x^4y^4+y^8)(x^8-x^4y^4+y^8)$$
$$=[(x^4+y^4)^2-(x^2y^2)^2](x^8-x^4y^4+y^8)$$
$$=(x^4+x^2y^2+y^4)(x^4-x^2y^2+y^4)$$
$$(x^8-x^4y^4+y^8)$$
$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$$
$$(x^8-x^4y^4+y^8)。$$

例 9 分解因式 $x^8+98x^4y^4+y^8$。

解 原式 $=(x^4+y^4)^2+96x^4y^4$

$$=[(x^4+y^4)^2+16x^2y^2(x^4+y^4)+64x^4y^4]$$
$$+[32x^4y^4-16x^2y^2(x^4+y^4)]$$
$$=(x^4+y^4+8x^2y^2)^2-16x^2y^2(x^4+y^4-2x^2y^2)$$
$$=(x^4+y^4+8x^2y^2)^2-[4xy(x^2-y^2)]^2$$
$$=(x^4+4x^3y+8x^2y^2-4xy^3+y^4)$$
$$(x^4-4x^3y+8x^2y^2+4xy^3+y^4)。$$

小结 有些比较复杂的情形，要反复运用添拆项法。另外必须指出，分组分解法不是孤立的分解法，它只能是为别的方法（如提取公因式法，公式法）创造条件，以达到把多项式分解因式的目的。掌握分组分解法需要有一定的观察分析能力，能够预见到分组后的情况，才能有目的地进行分组。