

“十一五”国家重点图书出版规划项目

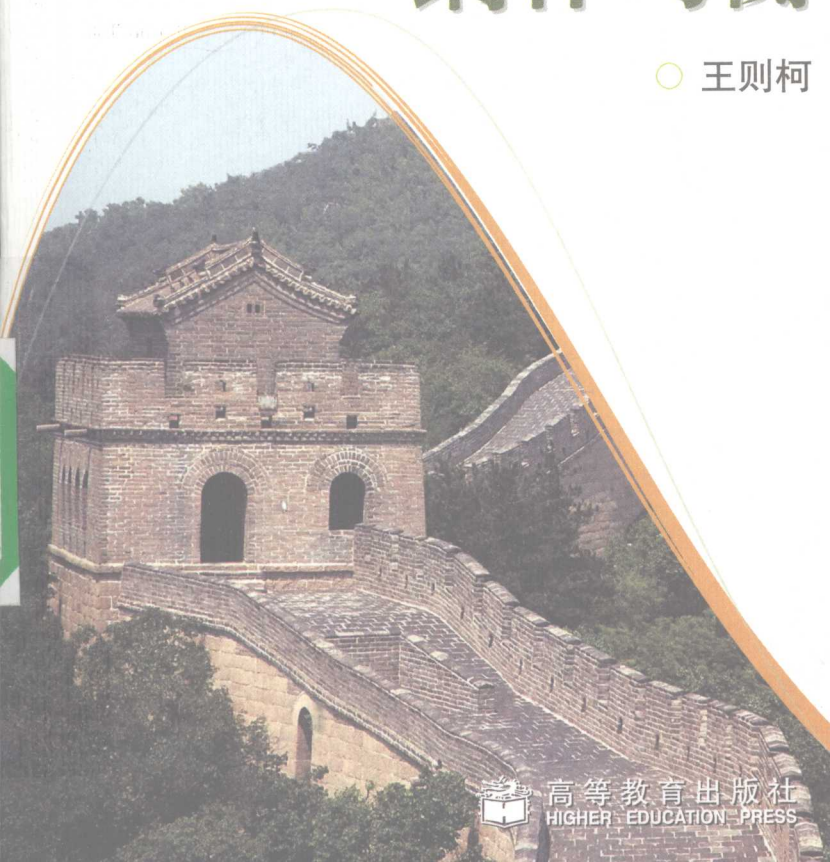
1

□ 数学文化小丛书

李大潜 主编

认识博弈的 纳什均衡

○ 王则柯



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“十一五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

认识博弈的 纳什均衡

高等教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

认识博弈的纳什均衡 / 王则柯. —北京: 高等教育出版社, 2009. 12

(数学文化小丛书/李大潜主编)

ISBN 978 - 7 - 04 - 024714 - 5

I. 认… II. 王… III. 对策论 - 应用 - 经济 - 普及读物 IV. F224.32 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 047396 号

策划编辑 李蕊 责任编辑 张耀明
封面设计 张楠 责任绘图 黄建英
版式设计 张岚 责任校对 杨雪莲
责任印制 毛斯璐

出版发行社	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100120	网址	http://www.hep.edu.cn
总机	010 - 58581000	网上订购	http://www.hep.com.cn
经销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com
印刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.landaco.com.cn
			http://www.widedu.com
开本	787 × 960 1/32	版次	2009年12月第1版
印张	3.875	印次	2009年12月第1次印刷
字数	70 000	定价	10.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24714 - 00

数学文化小丛书编委会

顾 问：谷超豪（复旦大学）
项武义（美国加州大学伯克利分校）
姜伯驹（北京大学）
齐民友（武汉大学）
王梓坤（北京师范大学）

主 编：李大潜（复旦大学）

副主编：王培甫（河北师范大学）

周明儒（徐州师范大学）

李文林（中国科学院数学与系统科学
学研究院）

编辑工作室成员：赵秀恒（河北经贸大学）

王彦英（河北师范大学）

张惠英（石家庄市教育科
学研究所）

杨桂华（河北经贸大学）

周春莲（复旦大学）

本书责任编辑：赵秀恒

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔,抓住主要的线索和本质的内容,由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长,并相对独立,以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则,有的专题单独成册,有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书,走近数学、品味数学和理解数学,充分感受数学文化的魅力和作用,进一步打开视野、启迪心智,在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

目 录

一、博弈三要素与劣势策略消去法	1
二、纳什均衡和相对优势策略下划线法	11
三、混合策略与反应函数交叉法	28
四、纳什均衡的筛选	46
五、零和博弈与最小最大方法	71
六、零和博弈的线性规划解法	89
怡情测试	110
后记	112

一、博弈三要素与劣势策略

消去法

经典意义上的经济学，以经济主体人的自利行为以及相应的市场反应作为研究的出发点。无论是消费者还是生产者，也无论是竞争形势还是垄断形势，基本上经济主体人面对市场作出自己的最优决策。形势严峻也好宽松也好，行为的结果是主体人自己决策的结果。

拿同质商品的市场来说吧，像垄断 (monopoly) 那样没有对手的决策是比较简单的，“计算”生产和供应多少东西到市场上去可以实现最大利润就可以了。这时候，所论商品的市场价格由市场的需求和垄断企业的供给共同决定，因此说垄断企业是价格的决定者 (price maker)。当然还有另外“一个”价格决定者，那就是市场的需求，但是因为这个市场需求是千千万万消费者的消费意愿和消费能力的总和，所以它已经不再具有人格化的面貌。另一方面，像完全竞争 (perfect competition) 那样对手很多的情况

下的决策也比较简单, 因为对手多了, 他们的意愿、能力、特别是他们的决策相互汇合, 其中也包括相互抵消, 结果“全体对手的决策”和市场需求合在一起, 呈现可以预见的规律, 从而可以把对手们的整体反应归结为主体人面对的“一个”不再具有人格化面貌的市场. 因为占有市场份额很小的每个竞争企业, 不能影响所论商品的市场价格, 所以我们说竞争企业是价格的接受者 (price taker). 这时候, 给定商品的市场价格, 竞争企业要做的, 就是“计算”应该生产和供应多少商品到市场上去, 才可以实现最大利润.

现代经济活动早已超出上述模式. 特别是当主体人面对少数几个作为对手的主体人的时候, 主体人决策的后果, 要由他自己的决策和他的对手的决策共同决定. 前面说了, 垄断和完全竞争这两种极端情形的决策, 都是“计算型”决策. 最困难和最不确定的是只有少数几个对手的情形, 即所谓寡头经济 (oligopoly), 每一方的市场份额都很大, 每一个主体人的行为后果, 受对手的行为的影响都很大. 可口可乐公司和百事可乐公司, 几乎垄断了美国碳酸饮料的市场, 它们之间的争斗, 就可以看作是这个样子的争斗.

这种竞争, 是相当人格化的竞争. 每个主体人的行为, 对对手的利益影响很大, 每个主体人的利益, 又受到对手的行为的很大影响. 博弈论 (game theory) 就是研究利益关联 (包括利益冲突) 的主体人的策略对局的理论.

纳什均衡,是整个博弈论最核心最基础的概念,纳什均衡指的是任何参与人单独改变策略选择都不会增加自己的博弈所得的这样一种策略对局.

让我们从博弈论最深刻的模型囚徒困境 (Prisoner's Dilemma) 说起.

一次严重的纵火案发生后,警察在现场抓到甲乙两个犯罪嫌疑人.事实上正是他们为了报复而一起放火烧了这个仓库,但是警方没有掌握足够的证据.于是,警方把他们隔离囚禁起来,要求坦白交代.如果他们都承认纵火,每人将入狱三年;如果他们都不坦白,由于证据不充分,他们每人将只入狱一年;如果一个抵赖而另一个坦白并且愿意作证,那么抵赖者将入狱五年,而坦白者将得到宽大释放,免于刑事处罚.这样,两个犯罪嫌疑人面临的博弈格局如表 1.1 所示,每个格子中左下角的数字是甲的博弈所得,右上角的数字是乙的博弈所得.注意,现在这些数字都不是正数.

表 1.1 囚徒困境

		乙	
		坦白	抵赖
甲	坦白	-3, -3	-5, 0
	抵赖	0, -5	-1, -1

表述一个博弈 (game) 的基本要素有三个:

- 一, 参与人或者局中人 (players);
- 二, 他们可选择的**行动** (actions) 或**策略** (strategies);

三, 所有可能的对局的博弈结果, 用参与人在相对应局下的博弈所得来表示, 这个博弈所得, 叫做**支付** (payoffs). 这里注意, “支付”要理解为因为他们参与博弈所得到的支付, 而不是他们付出的支付.

在囚徒困境博弈中, 博弈的两个参与人是犯罪嫌疑人甲和犯罪嫌疑人乙; 他们可以选择的策略都是同样的两个, 即坦白和抵赖; 甲在各种对局下之博弈所得, 是相应格子里面左下角的数字, 乙在各种对局下之博弈所得, 是相应格子里面右上角的数字.

这种用矩阵形式的表格表示两个参与者的博弈所得的做法, 来自博弈理论的一位先驱学者**托马斯·谢林** (Thomas C. Schelling). 我们从代数中早已熟悉的矩阵, 每个位置一个数, 一般用两条弧线或者方括号括住. 现在这种博弈矩阵, 每个格子位置有行参与人的支付和列参与人的支付这样两个数字, 一般写成表格, 叫做**双矩阵** (bi-matrix).

美国普林斯顿大学经济学系的**迪克西特** (Avinash K. Dixit) 教授和耶鲁大学经济学和管理学教授**奈尔伯夫** (Barry J. Nalebuff) 在他们的博弈论普及读物《策略思维》^① 中告诉我们, 谢林教授曾经说过: “假如真有人问我有没有对博弈论做出一点贡献, 我会回答有的. 若问是什么, 我会说我发明了用一个矩阵反映双方得失的做法……我不认为这

① 可以参看中国人民大学出版社出版的中译本.

个发明可以申请专利，所以我免费奉送，不过，除了我的学生，几乎没有人愿意利用这个便利。现在，我也供给各位免费使用我发明的矩阵。”

谢林教授这么说，实在是太谦虚了。要知道，他在 1960 年出版的著作《对抗的策略》，迄今是博弈论方面很有影响的文献。他的其他论著，有《抉择与后果》、《军备与势力范围》、《策略分析与社会问题》等。他对博弈论有非常大的贡献。虽然谢林教授的博弈论写作以著作为主，与其他博弈论学者以论文为主很不相同，并且谢林的写作以语言描述为主，很少采用更加时髦的数学形式的推导，但是他对于博弈论的巨大的和启发性的贡献，最终还是得到国际学界的承认。喜欢语言描述的谢林教授和非常数学化的奥曼 (Robert Aumann) 教授，因为对于博弈论的巨大贡献，一起获得 2005 年度的经济学诺贝尔奖。

在囚徒困境中，如果两个嫌疑犯都是只为自己利益打算的所谓**理性主体人** (rational agent)，两位犯罪嫌疑人博弈可能的结果会怎样呢？要是乙抵赖，那么如果甲坦白，甲就可以得到宽大释放，但是如果甲抵赖的话甲要坐一年牢；要是乙坦白，那么如果甲也坦白的話甲要坐三年牢，但是如果甲抵赖的话甲可要坐五年牢。可见对于甲来说，不管乙采取什么策略，他坦白自己总是比较有利的。所以两相比较，坦白是他的全面的严格的优势策略。

全面，指的是不论对方采取哪个策略，当事人的这个策略比他别的策略总是显示优势：对方坦白，我

坦白比抵赖好；对方抵赖，我也是坦白比抵赖好。严格，指的是这个优势策略给当事人带来的支付确实要好一些：对方坦白，我坦白得 -3 确实比抵赖得 -5 好；对方抵赖，我坦白得 0 也确实比抵赖得 -1 好。这里，严格是说： -3 不仅仅是不差于 -5 ，而且是严格好于 -5 ； 0 不仅仅是不差于 -1 ，而且是严格好于 -1 。“全面的严格的优势策略”说起来拗口，我们约定以后可以就简称为**严格优势策略** (strictly dominant strategy)。优势劣势是比较而言的。在这个博弈中，既然坦白是严格优势策略，那么严格劣于它的抵赖策略就是相应的**严格劣势策略** (strictly dominated strategy)。

同样道理，坦白也是犯罪嫌疑人乙的全面的严格的优势策略，抵赖是相应的严格劣势策略。

理性的主体人，不会采用对自己明显不利的严格劣势策略。所以在分析博弈可能的结局的时候，如果我们发现一个参与人可以选择的某个策略是他的严格劣势策略的时候，我们应该把参与人的严格劣势策略删去。下面图中一横一竖的两条粗实线，就代表我们把两个参与人各自的严格劣势策略删去。

这个博弈非常简单，每个参与人只有两个可选择的策略。当博弈双方的严格劣势策略都删去以后，就只剩下左上角一个策略对局了。于是我们得到“坦白，坦白”得 $(-3, -3)$ 这个严格优势策略均衡。注意，在 $(-3, -3)$ 这样的写法中，第一个数字是表格左方博弈参与人之所得，第二个数字是表格上方博弈参与人之所得 (表 1.2)。

表 1.2 劣势策略消去法

乙

		坦白	抵赖
		-3	-5
甲	坦白	-3	0
	抵赖	0	-1
		5	1

经济学习惯把市场力量对峙的稳定结局, 叫做市场均衡 (equilibrium). 比方说水果市场, 供不应求将驱使价格上升, 供大于求将迫使价格下降, 供求力量对峙的结果, 会在某个价格水平达到市场供求的均衡, 即需求量和供给量相等. 但是像上面这样用删去劣势策略的方法得到的由双方的严格优势策略组成的对局, 作为这个博弈的均衡, 叫做**严格优势策略均衡** (equilibrium of strictly dominant strategies). 这种通过把严格劣势策略删去以寻求对局结果的方法, 叫做**严格劣势策略消去法**. 如果甲乙都有三四个甚至更多的策略选择, 通常需要一次又一次把严格劣势策略删去, 才能最后得到一个严格优势策略均衡. 一次又一次把严格劣势策略删去以寻求对局结果的方法, 叫做**严格劣势策略逐次消去法** (iterated elimination of strictly dominated strategies).

“囚徒困境”固然是博弈论专家设计的例子, 但是囚徒困境博弈模型可以用来描述两个企业的“价格大战”等许多经济学现象.

经济学特别地把两个企业合起来垄断或几乎垄断了某种商品的市场，称为**双寡头经济** (duopoly)。双寡头经济是前面提到过的寡头经济的一种。寡头经济可以有好几个企业，双寡头只限于两个企业。两个企业互相竞争，都想打垮对手，争取更大的利润。可口可乐公司和百事可乐公司，几乎垄断了美国碳酸饮料的市场，它们之间的争斗，可以看作是这个样子的争斗。

争斗的目的，最后当然是增加自己企业的利润。可能有些读者会想，要增加利润，那就要提高商品的价格。东西卖得贵了，钱不就赚得多了吗？的确，如果只有你一家企业垄断了整个市场，有时候提高价格可能增加你的利润。但是现在存在两家相互竞争的企业，消费者可以在两家之间选择。这时候，提价的结果不仅不能增加利润，反而可能会使自己企业的利润下降。这里，要紧的因素是市场份额。如果你提价，对方没有提价，你的商品贵了，消费者就不买你的商品而买你的对手的商品。这样，你的市场份额会下降很多，利润也就急剧下降。这是历经市场经济洗礼的读者都明白的道理。你提价了，而对方的价格没有提高，他的生意会比原来好得多，利润就可能大幅度上升。但是如果两个企业都采取比较高的价格，消费者没有别的选择，贵也只好买，两个企业的利润都会上升。

假定两个企业都采取比较低的价格，可以各得利润 3 亿美元；都采取比较高的价格，各得 5 亿美元利润；而如果一家采取较高的价格而另一家采取

较低的价格, 那么价格高的企业利润为 1 亿美元, 价格低的企业因为多销利润将上升到 6 亿美元. 这时候, 究竟是采用较高的价格好还是采用较低的价格好, 两个企业面临的博弈或对策, 可以在下面的表 1.3 表示出来, 单位是亿美元, 现在都是正数.

表 1.3 价格大战

百事可乐

		低价	高价
可口可乐	低价	3	6
	高价	6	5

很明显, 对于两个企业, 高价都是他们的严格劣势策略, 所以, 根据严格劣势策略消去法, 双方价格大战的结果, 是左上方那个格子代表的对局, 即双方都采取低价策略进行价格大战, 各赚 3 亿美元的情况.

比较囚徒困境的博弈和价格大战的博弈, 对数字敏感的读者马上发现, 要是把囚徒困境博弈的矩阵表示中的每个数字都加上 6, 正好就变成了现在价格大战博弈的矩阵表示. 如果你一开始就发现了这一点, 你马上可以肯定博弈的结果是左上方的格子, 那么价格大战的结果就不需要重新用严格劣势策略消去法来做了. 事实上, 每个数目都加大 6, 那

么优势的仍然优势,劣势的仍然劣势,对局形势并没有任何实质性的变化。

将来我们还会进一步看到,许多商战的对策形势,都可以像价格大战博弈那样,归结为囚徒困境博弈。这也是为什么博弈论的书通常都要从囚徒困境博弈讲起的道理。

为什么两个企业那么愚蠢要进行价格大战呢?那是因为每个企业都以对方为敌手,只关心自己一方的利益。在价格大战博弈中,只要以对方为敌手,那么不管对方的决策怎样,自己总是采取低价策略会占便宜。这就促使双方都采取低价策略。但是,如果双方勾结或合作起来,都实行比较高的价格,那么双方都可以因为避免价格大战而获得较高的利润。有人把这样一种双方都采取高价策略的对局形势,叫做**双赢** (two-win 或者 win-win) 对局。

由于在这个企业价格大战博弈之中,如果双方勾结或联手采取高价策略,双方将都是双赢对局的赢家,所以我们常常把价格大战的参与人采取高价策略,说成他们采取**合作策略**,意指与对方合作。相应地,如果参与人采取低价策略,就说他采取**不合作策略**,或者**背叛策略**。