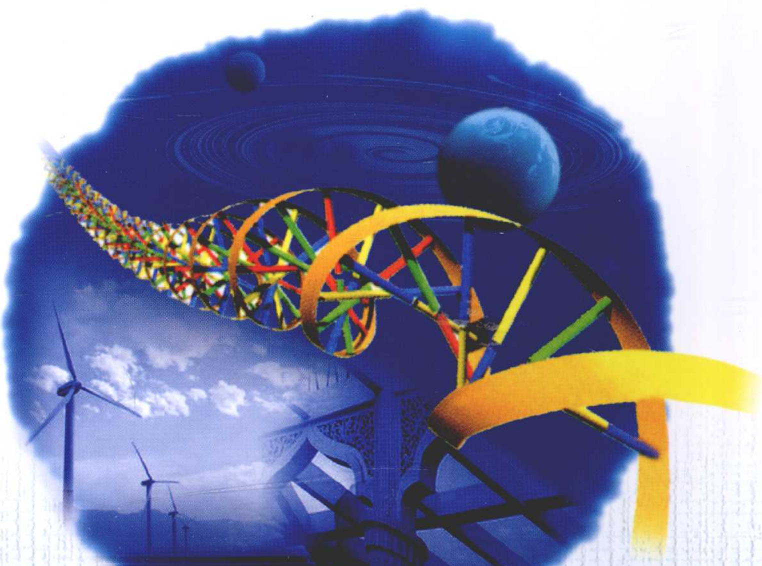
西安交通大学对口支援新疆大学系列教材项目

基础数学教程

主编　李治明　王大猛
编者　万传良　安志强
茹先·阿合买提
夏米西努尔·阿不都热合曼

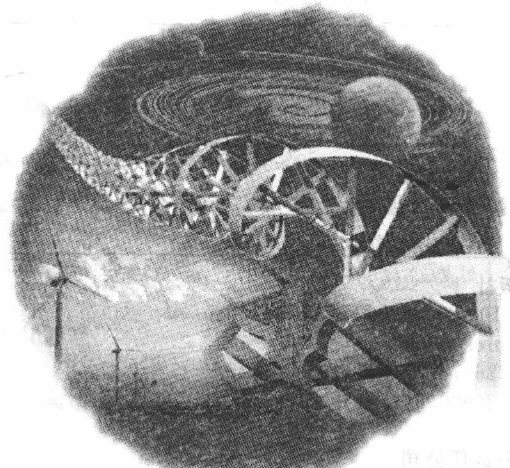


西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学对口支援新疆大学系列教材项目

基础数学教程

主编　李治明　王大猛
编者　万传良　安志强
茹先·阿合买提
夏米西努尔·阿不都热合曼



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是为民族地区大学预科阶段的学生编写的教材。目的是帮助预科阶段的学生系统地复习和提高初等数学的知识，为下阶段学习高等数学打好基础。

全书分七章：预备知识；方程与不等式；函数；立体几何与解析几何；复数；数列与极限；排列组合与概率初步。每章配有综合练习题，有一定难度。书后附有习题参考答案及汉维数学词汇对照。

图书在版编目(CIP)数据

基础数学教程/李治明，王大猛主编. —西安：西安交通大学出版社，2009.9
ISBN 978-7-5605-3176-2

Ⅰ.基… Ⅱ.①李…②王… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 142234 号

书　　名 基础数学教程
主　　编 李治明　王大猛
责任编辑 叶 涛　刘雅洁

出版发行 西安交通大学出版社
（西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049）
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 西安建科印务有限责任公司

开　　本 787mm×1092mm　1/16　**印张** 14.75　**字数** 351 千字
版次印次 2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-3176-2/O·303
定　　价 25.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

前言

本书是为民族预科学生编写的教材，目的是帮助民族学生在预科阶段复习初等数学的基本内容，并在复习的基础上有所提高。希望通过本教材的学习，使他们能顺利地进入高等数学的学习阶段。基于这个原因，教材取名为“基础数学教程”。

本教材源于20世纪90年代初，在新疆大学进行的少数民族科技班教改试验。这个教改项目曾获国家教委优秀教学成果二等奖。该项目的一个重要内容是由万传良老师在给民族科技班复习初等数学的讲稿基础上编写成讲义。该讲义曾于1999年以《基础数学》之名，由新疆教育出版社出版。2004年，我们根据教学实践对该书做了较大的修改和补充，在校内以胶印本形式供教学使用至今。

十多年来，情况发生了很大变化，民族预科生迫切需要一本适用的过渡性的教材。我们经过长期的教学实践也积累了一些经验，锻炼了一批教师。因此，再次修订这本教材的工作就提上了日程。

本教材立足于初等数学的复习与提高。我们试图对初等数学的内容进行凝炼，注重培养学生对基本概念的理解，强调各部分知识之间的内在联系，不过分追求技巧性问题，引导学生学会思考问题。为此，我们在一些问题上做了适度的提高。例如，在集合概念的引入、齐次方程的讨论、反三角函数的引入等方面采取了比中学数学略有提高加深的内容。在几何部分更强调培养学生的综合分析能力。总之，不是中学数学的简单重复。

全书分七章，除个别章节外，习题分A、B两类。A类属基本要求，B类供学有余力的学生选做。每章均配有综合练习题，有一定的难度。

依照惯例，我们给出了习题参考答案，但还是希望同学们尽量独立完成习题，养成独立思考的习惯。

为方便民族同学使用，书后附有常见汉维数学词汇对照。

本书第1、3章由李治明执笔，第2章由万传良执笔，第4章由安志强执笔，第5、6章由王大猛执笔，第7章由茹先·阿合买提执笔，习题参考答案由夏米西努尔·阿不都热合曼负责核对，全书由李治明负责统稿。

本教材纳入了自治区精品课程建设项目。在编写过程中，新疆大学数学与系统科学学院的部分教师、研究生给予了很多帮助。在此一并致谢。

由于水平的限制，本书一定存在不少缺点甚至错误，殷切地希望使用者随时给予批评与指教。

编　者

2009年于新疆大学

目 录

第 4 章　立体几何与解析几何

第1章　预备知识

1.1　集合

1.1.1　集合是数学中不加定义的基本概念

集合通常是指具有某种共同特征的对象的全体，是不加定义而直接使用的概念. 尽管不加定义，但不能等同于普通文字意义下的集合或者全体. 例如，所有的高个子的人可否构成一个集合？从普通文字意义上讲，似乎是不成问题的，但作为数学概念，它不能视为集合. 因为没有一个明确的规则来判断某个人是高个子，还是矮个子. 如果我们规定身高不矮于1.9米的人为高个子，这就可以构成一个集合了.

在数学中作为一个集合，就必须要有一个明确的规则，用来判断所研究的某个对象是属于这个集合还是不属于这个集合，二者必居其一.

我们把具有某种共同特征的对象的全体叫做**集合**. 构成集合的研究对象称为这个集合的**元素**.

通常用大写字母 A、B、C、…表示集合，用小写字母 a、b、c、…表示集合的元素.

如果 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，可记作 $a\in A$.

如果 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于 A，可记作 $a\notin A$.

下面是一些常用数集的习惯表示方法：

N:全体非负整数集合(或称自然数集)

$\mathbf{N}^*$:全体正整数集

Z:全体整数集

Q:全体有理数集合

R:全体实数集合

C:全体复数集合

设实数集合为 **R**，则 $-0.5\in\mathbf{R}$，$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$，$1+2\mathrm{i}\notin\mathbf{R}$.

表示集合的基本方法有两种：

(1) 描述法　用确定的条件表示某个研究对象是否属于这个集合. 例如，研究“6的正约数的集合”时，这个确定的条件就是“元素 x 是6的正约数”，该集合表示为：

$$\{x\mid x\text{是6的正约数}\}$$

确定集合的条件除了用语言描述外，还可以用方程或不等式表示. 例如：

$\{x\mid x^2-1=0\}$表示方程 $x^2-1=0$ 的根的集合.

$\{x\mid x^2-1<0\}$是满足不等式 $-1<x<1$ 的实数的集合.

(2) 列举法　当集合中的元素是有限个时，可以把集合中的元素都列举出来. 例如，研究

"6 的正约数的集合"时，因为这个集合由 4 个元素 1，2，3，6 组成，所以可以表示为：$\{1,2,3,6\}$. 但是$\{x|x^2-1<0\}$这个集合就不能够用列举法表示.

我们约定，集合中任两个元素都是不相同的. 而且在集合中不考虑元素的排列顺序.

1.1.2 子集 空集 全集 补集

两个集合 A、B，如果集合 A 的任一元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 就是集合 B 的**子集**. 称 **A 包含于 B**（或者 B 包含 A）. 记作 $A\subseteq B$（或者 $B\supseteq A$）

显然，$A\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任一 $x\in A\Rightarrow x\in B$

例如：$A=\{(x,y)|x^2+y^2<4\}$，$B=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$则有 $A\subseteq B$. 如果 $A\subseteq B$ 且存在一个元素 $x\in B$ 但 $x\notin A$. 则称 **A 是 B 的真子集**，记为 $A\subset B$.

显然，$A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B$，存在 $x\in B$ 但 $x\notin A$.

如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，说明集合 A、B 有相同的元素，则称**集合 A 与集合 B 相等**，记作 $A=B$.

即 $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

为了方便起见，把没有元素的集合称作**空集**，用$\varnothing$表示. 规定空集是任何非空集合的真子集.

由子集的定义可知：

(1) 任何一个集合是它本身的子集.

(2) 类似于不等关系的传递性，集合的包含关系也有传递性. 如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$

在研究某问题时，所有研究对象的集合称为**全集**. 用 U 表示. 所以，在研究集合时，首先必须明确范围，也就是要确定全集 U.

例如，对于集合$\{x|x^2+1=0\}$，当以复数为全集时就是$\{-\mathrm{i},\mathrm{i}\}$；而以实数为全集时就是空集.

设 U 是全集，由 U 中不属于 A 的元素组成的集合称为 A 的**补集**，记为 $\overline{A}$.

有时，我们还利用封闭曲线来形象地表示集合，用这种方法表示集合的图形称作**文氏图**. 用文氏图表示某个元素属于某个集合，两个集合有什么关系，两个集合有无公共元素等比较方便. 为了区别全集 U 与其他集合，我们约定用矩形表示全集.

如图 1－1 中的阴影部分就表示 $\overline{A}$

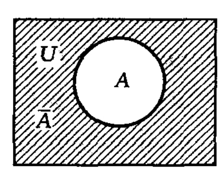


图 1－1

由补集的定义可知：

(1) $\overline{\overline{A}}=A$

(2) $\overline{U}=\varnothing$

(3) $\overline{\varnothing}=U$

从文氏图可以直观的看出上述结论是正确的. 当然严格的证明还需从定义出发进行论证.

例 1 从 1 到 15 的自然数中，设质数的集合为 A，3 的倍数的集合为 B，4 的倍数的集合为 C.

(1) 全集 U 是什么？

(2) 试用文氏图表示 U、A、B、C；

(3) 试用列举法表示 $\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$，并指出 $\overline{U}$ 是什么样的集合；

(4) 同时属于 $\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$ 的元素是什么？

解 (1) 由题意,$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$

(2) 因为 $A=\{2,3,5,7,11,13\}$,$B=\{3,6,9,12,15\}$,$C=\{4,8,12\}$

所以文氏图如图 1-2.

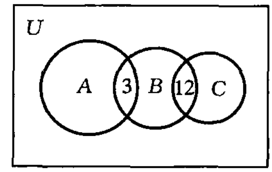


图 1-2

(3) $\bar{A}=\{1,4,6,8,9,10,12,14,15\}$,$\bar{B}=\{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14\}$,$\bar{C}=\{1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15\}$,$\bar{U}=\varnothing$

(4) 同时属于 $\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$ 的元素的集合,由(3)可得:$\{1,10,14\}$

1.1.3 集合的运算

两个集合 A、B,由属于 A 或者属于 B 的元素所构成的集合,叫做 A 与 B 的**并集**,记作 $A\cup B$. 即,$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

由既属于 A 又属于 B 的元素的所构成的集合,叫做 A 与 B 的**交集**,记作 $A\cap B$. 即,$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

由属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合,叫做 A 与 B 的**差集**,记做,$A\backslash B$. 即,$A\backslash B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

差集并不要求 A 与 B 有包含关系. 例如,$A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{2,4,5,8\}$,则 $A\backslash B=\{1,3\}$.

集合的运算满足以下运算律.

(1) 等幂律

$A\cup A=A$,$A\cap A=A$

(2) 交换律

$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$

(3) 分配律

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

关于交集、并集的补集,有下面重要的等式成立.

(4) $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$,$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$.

集合 A、B 的交的补集等于 A、B 的补集的并;集合 A、B 的并的补集等于 A、B 的补集的交. 这就是所谓的 De Morgan 律.

以上运算律可以用文氏图来验证,如图 1-3 所示.

图 1-3 可验证$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$,但不能代替证明.

例 2 证明$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

证明 (1) 任一 $x\in\overline{A\cap B}\Rightarrow x\in U$ 且 $x\notin A\cap B$

$$\Rightarrow x\in U \text{ 且} \begin{cases} x\notin A \\ \quad\text{或} \\ x\notin B \end{cases} \Rightarrow x\in\bar{A} \text{ 或 } x\in\bar{B}$$

$\Rightarrow x\in\bar{A}\cup\bar{B}$,所以 $\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cup\bar{B}$

(2) 任一 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}\Rightarrow x\in\bar{A}$ 或 $x\in\bar{B}$

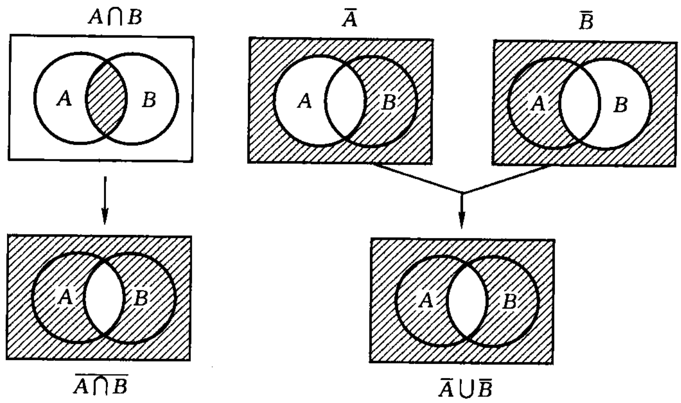


图 1－3

$$\Rightarrow x\in U \text{ 且}\begin{cases} x\notin A \\ \quad\text{或} \\ x\notin B \end{cases} \Rightarrow x\in U \text{ 且 } x\notin A\cap B$$

$$\Rightarrow x\in\overline{A\cap B}\text{，所以 }\bar{A}\cup\bar{B}\subseteq\overline{A\cap B}$$

因此，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

例 3 某校举行数理化三科竞赛，至少参加一科的人数：数学 807 人，物理 739 人，化学 437 人；至少参加两科的人数；数学与物理 593 人，数学与化学 371 人，物理与化学 267 人；三科都参加的有 213 人，试计算参加竞赛的学生总数.

解 设全校学生的集合为全集 U.

设 A、B、C 分别表示参加数学、物理、化学竞赛的学生集合.

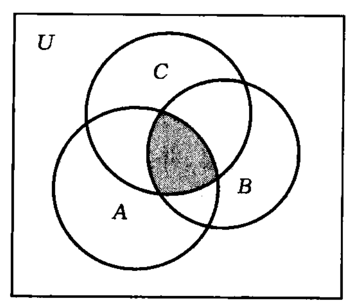


图 1－4

$A\cap B\cap C$ 表示三科都参加的学生集合，为 213(人).

$A\cap(B\setminus C)$ 表示参加数学、物理但不参加化学竞赛的学生，为 $593-213=380$(人).

$A\cap(C\setminus B)$ 表示参加数学、化学但不参加物理竞赛的学生，为 $371-213=158$(人).

$B\cap(C\setminus A)$ 表示参加物理、化学但不参加数学竞赛的学生，为 $267-213=54$(人).

$A\setminus(B\cup C)$ 表示只参加数学竞赛的学生，为 $807-213-380-158=56$(人).

$B\setminus(A\cup C)$ 表示只参加物理竞赛的学生，为 $739-213-380-54=92$(人).

$C\setminus(A\cup B)$ 表示只参加化学竞赛的学生，为 $437-213-158-54=12$(人).

因此，$A\cup B\cup C$ 表示参加竞赛的全体学生，为 $213+380+158+54+56+92+12=965$(人)

本题使用的方法称为无交化处理的方法.

习题 1.1

A

1. 在下列叙述中,哪个不构成集合:

(1) 与二定点 A、B 等距离点的集合;

(2) 我校学生中游泳能手的全体;

(3) 在王军的班级里,身高超过王军的人的全体;

(4) 在平面上,满足 $2x+3y=6$ 的点的全体.

2. 试用列举法表示集合:

(1) $\{x \mid x^2-2x-3=0\}$

(2) $\{x \mid x^2-4x+3<0, x \text{ 是整数}\}$

3. 在平面上用图形表示下列集合:

(1) $\{(x,y) \mid y=x^2-2x\}$

(2) $\{(x,y) \mid x-2y<0\}$

4. 设全集 $U=\{x \mid 1<x<7\}$, $A=\{x \mid 2\leqslant x\leqslant 5\}$, $B=\{x \mid 3\leqslant x\leqslant 6\}$,求:$\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$.

5. (1) 试写出集合$\{a,b,c,d\}$的所有子集.

(2) $A\subset B$ 试判断 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的包含关系.

6. 试证明等式$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$.

B

1. $A\subset B$,且 $B\cap C=\varnothing$,试证明 $A\cap C=\varnothing$.

2. 证明 $A\backslash B=A\cap\overline{B}$,并由此证明 $A\cup B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)\cup A\cap B$.

3. 设集合 A 有 n 个元素,求其子集合的个数.

4. 试根据空集是任意集合的子集,证明空集只有一个.

1.2 推理论证的重要的方法——反证法、数学归纳法

1.2.1 命题及其组成

用语言、符号或式子表示,并且能够区别真假的判断叫做**命题**.

例如,①北京是中国的首都;②24 是 3 的倍数;③1+1 比 2 小.

以上都是命题:①和②是真命题,③是假命题.

对于命题,主要是在于能够区别真假(成立或者不成立),如果不能区别真假,就不能叫做命题.例如,“我想成为鸟”,或者“黄山是美丽的山吗?”,都不能叫做命题.

命题分为简单命题、复合命题.上面所举的①、②、③三个命题都是不能再分解的命题,像这样的命题叫做简单命题.其特点是命题中不含逻辑联接词.

“不是”,“且”,“或”,“若…则…”等词语称为**逻辑联接词**.

实际上，数学中的定理通常是由几个简单的命题构成的，这样的命题叫做**复合命题**.

例如，④6 不是质数；⑤12 是 2 的倍数，也是 3 的倍数；⑥1 或者 −1 比 0 大；⑦若 1＝2则 3＝4. 都是由简单命题和逻辑联接词构成的复合命题.

在数学中重点讨论用逻辑联接词“若…则…”构成的复合命题.

一般地，把形如“若 a 则 b”的命题叫做 **a 和 b 蕴涵命题**，记作：

$$a \to b$$

在数学中“… 若 … 则 …”这种形式的命题很多. 例如：“在$\triangle ABC$ 中，若 $AB=AC$，则 $\angle B=\angle C$”.“若 $2+3=5$，则$(2+3)^2=25$”. 这时把 a 称为假设或条件，把 b 叫做结论.

1.2.2 蕴含命题的四种形式

(1) 将“若 a，则 $b(a\to b)$”设为原命题.

(2) “若 b，则 $a(b\to a)$”，这种交换原命题假设和结论的命题叫做原命题的**逆命题**.

(3) “若 $\bar{a}$，则 $\bar{b}(\bar{a}\to\bar{b})$”，这种对原命题的假设和结论同时否定的命题叫做原命题的**否命题**.

(4) “若 $\bar{b}$，则 $\bar{a}(\bar{b}\to\bar{a})$”，这种交换原命题的假设与结论并同时否定的命题叫做原命题的**逆否命题**.

注 $\bar{a}$，$\bar{b}$ 分别表示对命题 a，b 的否定.

命题既然有真有假，那么上述四种命题之间的真假关系如何呢？简单地说：原命题为真，但它的逆命题和否命题未必为真. 若原命题为真，则它的逆否命题必为真.

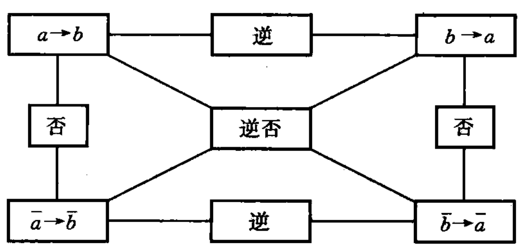


图 1－5

互为逆否命题的两个命题同真、同假，二者面目虽然不同，但从逻辑上讲实际是等效的. 这给命题的证明开辟了一条广阔的道路.

例 1 原命题：对顶角相等. （真命题）

逆命题：相等的角是对顶角. （假命题）

否命题：不是对顶角就不相等. （假命题）

逆否命题：不相等的角不是对顶角. （真命题）

习题 1.2(1)

A

1. 原命题：“全等三角形一定是相似三角形”. 写出这个命题的其它形式，并判断它们的真

假.

2. 原命题："若 $xy=0$，则 $x=0$ 或者 $y=0$". 写出这个命题的其它形式，并判断它们的真假.

B

1. 试做出下述命题的逆、否、逆否命题，并判断其真假：

(1) 若 $x=3$ 则 $2x-1=5$

(2) 若 $x=0, y=0$ 则 $x^2+y^2=0$

(3) 若 $2\leqslant x\leqslant 3$ 则 $x^2-5x+6\leqslant 0$

1.2.3　必要条件、充分条件

蕴含命题：若 a 则 $b(a\rightarrow b)$，其中 a、b 分别表示命题的条件和结论. 它可能是真命题，也可能是假命题.

当 $a\rightarrow b$ 是真命题(记为 $a\Rightarrow b$)，$\bar{b}\rightarrow\bar{a}$ 也是真命题($\bar{b}\Rightarrow\bar{a}$)，可见若要 a 成立，必须需要 b 成立. 因此，b 叫做使 a 成立的**必要条件**.

其次，当 $a\rightarrow b$ 是真命题时($a\Rightarrow b$)，可知若 a 成立，则 b 必成立. 要 a 成立就够了(充分). 于是把 a 叫做 b 成立的**充分条件**.

综上所述：若 $a\rightarrow b$ 为真命题($a\Rightarrow b$)，则 b 是 a 的必要条件，a 是 b 的充分条件.

当两个蕴含命题 $a\rightarrow b$ 与 $b\rightarrow a$ 同时为真命题时，(即 $a\Rightarrow b, b\Rightarrow a$). 从后者可知 a 是 b 成立的必要条件，从前者可知 a 又是 b 成立的充分条件，即 a、b 互为**充要条件**，记为 $a\Leftrightarrow b$.

例如，命题"若 x 是 6 的倍数，则 x 是 2 的倍数"是真命题，

所以"x 是 2 的倍数"是使"x 是 6 的倍数"成立的必要条件. 当然，"x 是 6 的倍数"是使"x 是 2 的倍数"成立的充分条件.

再如，命题"若三角形三条边相等，则三角形三内角相等"是真命题. 而命题"若三角形三内角相等，则三角形三边相等"也是真命题. 所以"三角形三条边相等"与"三角形三内角相等"互为充分必要条件.

习题 1.2(2)

A

1. 从"充分非必要条件"与"必要非充分条件"，"充要条件"，"既非充分也非必要"中选出适当的一种填空：

(1) "$a=b$"是"$ac=bc$"的________

(2) "四边形的两条对角线相等"是"该四边形是矩形"的________

(3) "$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"的________

(4) "$x<5$"是"$x<3$"的________

(5) "$a\neq 0$"是"$ab\neq 0$"的________

(6) "$a>b$"是"$a^2>b$"的________