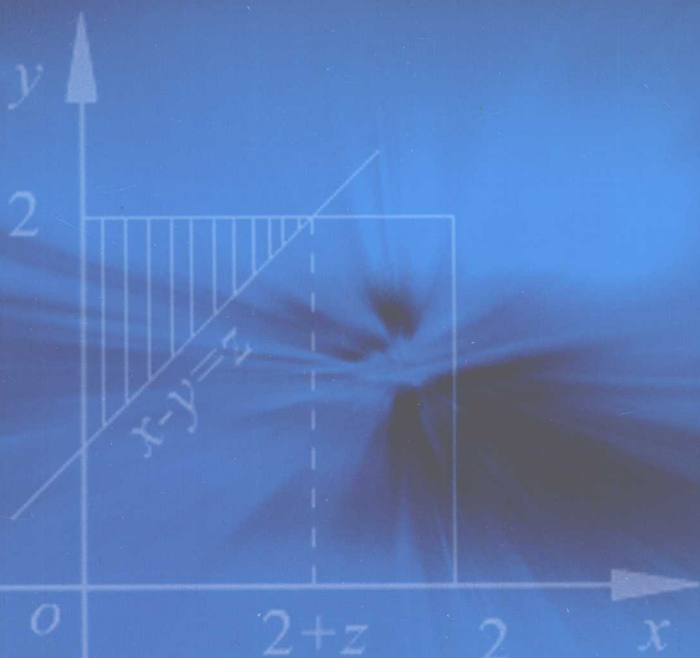
GAODENG YUANXIAO JINGPIN
GUIHUA JIAOCAI

高等院校精品规划教材

概率论与数理统计学习指导

◎ 主　编　李长青
◎ 副主编　李同军　张野芳



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等院校精品规划教材

概率论与数理统计学习指导

◎ 主　编　李长青

◎ 副主编　李同军　张野芳

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是为学习《概率论与数理统计》而编写的指导性教材，着重总结归纳了《概率论与数理统计》中的基本概念、基本理论和基本方法. 对《概率论与数理统计》中一些容易混淆的概念和问题以问答的形式给出了详细的分析与阐述. 通过对类型与数量众多的例题的解析，使读者能够较好地掌握概率论与数理统计的思想方法与解题技巧. 此外，本书中还配备了自测练习题和综合测试题供读者选用.

本书可作为高等学校理工科《概率论与数理统计》课程的配套教材，也可以作为考研复习的参考教材.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导/李长青主编. —北京：中国水利水电出版社，2009

高等院校精品规划教材

ISBN 978-7-5084-6797-9

Ⅰ. 概… Ⅱ. 李… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 150591 号

书　名	高等院校精品规划教材 **概率论与数理统计学习指导**
作　者	主编　李长青　副主编　李同军　张野芳
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www. waterpub. com. cn E - mail：sales@ waterpub. com. cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　刷	北京瑞斯通印务发展有限公司
规　格	184mm×260mm　16 开本　12.75 印张　302 千字
版　次	2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
印　数	0001—5000 册
定　价	**25.00** 元

前　　言

本书是北京理工大学出版社出版的教材《概率论与数理统计》（杨晓平主编）的配套参考书. 为了方便读者使用本书,. 我们对书中的部分习题给出了详细的解答，在内容上本书也自成体系，可供学习概率与统计课程的读者参考.

《概率论与数理统计》是高等学校理工、经管、医学、农林类等各专业的一门重要的公共基础课，也是硕士研究生入学考试数学科目的重要组成部分. 概率论与数理统计的方法在科学技术与人类实践活动中起着越来越重要的作用. 掌握概率统计的基本理论和方法对于当代大学生来说是十分必要的. 尽管在此之前学生已经学过《高等数学》和《线性代数》等数学课程，但是由于概率论与数理统计的研究对象是随机现象，它不同于学生已经熟悉的研究确定性现象的数学课程. 学生在学习这门课程时普遍感到很多概念难以理解，课堂上能够听懂，但是课后不知如何去做题，或无法把问题表达清楚，特别是对很多概念的概率意义不能正确理解. 为了帮助学生正确理解《概率论与数理统计》的基本概念，掌握解题基本方法与技巧，提高学生的解题能力，我们在总结多年教学经验的基础上编写了这本学习指导书. 目的是通过本书指导学生结合课堂学习系统地复习《概率论与数理统计》的内容，巩固、掌握所学知识，培养学生分析问题和解决问题的能力，为以后的硕士研究生入学考试打下良好的基础.

本书共分8章，与《概率论与数理统计》教材的前8章相对应. 此外还有附录1至附录4. 每章均包括基本要求、重点与难点、内容提要、疑难问题解析、例题解析、习题选解、自测练习题、生活中的概率等8个部分的内容. 附录1和附录2给出了五套综合测试题及其参考答案，附录3是每章自测练习题的参考答案，附录4给出了几种重要分布的临界值表. 为了使学生能够较好地掌握解题方法与技巧，本书在例题解析部分对大部分题目都给出了解题分析，帮助学生分析解题思路. 在疑难问题解析部分，对一些较难理解的概念、方法等给出了详细的解释，以便帮助学生准确理解和掌握这些概念和方法.

掌握数学概念与方法的最好途径就是做题，为此，每章都配备了自测练习题. 在使用本书时，学生应尽力多做一些练习题，通过练习真正掌握每章的内容. 对于本书提供的例题，读者应先对题目进行独立思考，然后再查阅

解答过程，最好能够提出不同于书中的解题方法.

本书由李长青副教授任主编，李同军、张野芳副教授任副主编，参加本书编写的老师还有王廷、朱玉辉、曹金亮、沈最意、陈丽燕、卢海玲等，全书由李长青统稿，杨晓平教授审阅了全书并提出了宝贵的指导性意见. 在本书的编写过程中，编者除了总结多年的教学经验外，还参考了一些其他教材和参考书，在诸多方面得到启迪，在此不一一指明，谨对这些书的编著者表示衷心的感谢. 限于编者水平有限，书中难免有不妥和错误之处，恳请读者批评指正.

编　者

2009年5月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

一、基本要求

1. 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握随机事件之间的关系与运算.

2. 理解事件频率、概率的概念，理解概率的公理化定义，掌握概率的基本性质，会用这些性质进行概率的计算.

3. 理解概率的古典定义，掌握事件概率的基本计算方法.

4. 理解条件概率的概念，掌握概率的乘法定理、全概率公式和贝叶斯（Bayes）公式，会用这些公式进行概率的计算.

5. 理解事件独立性的概念，会用事件的独立性进行乘积事件的概率计算．理解重复独立试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

6. 了解几何概率的定义及其计算方法.

二、重点与难点

本章重点：

1. 随机事件及事件间的运算关系.

2. 概率的公理化定义及概率的基本性质的应用.

3. 乘法定理及条件概率公式.

4. 事件的独立性及其利用独立性进行有关概率的计算.

本章难点：

1. 概率的公理化定义及概率的基本性质的应用.

2. 古典概率的计算及条件概率、全概率公式和贝叶斯（Bayes）公式的应用.

三、内容提要

1. 随机试验

在概率论中，试验是一种广泛的术语，它包括各种各样的科学试验，甚至对某一事物的某一特征的观察也可以认为是一种试验．它具有以下三个特征，通常用记号 E 表示.

（1）试验可以在相同的条件下重复进行.

（2）每次试验的可能结果不止一个，但能事先明确试验的所有可能的结果.

（3）进行一次试验之前，不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能的结果组成的集合称为样本空间，记为 S. 样本空间的元素，也就是 E 的每个结果（也就是基本事件），称为样本点，一般用小写字母 e 表示.

3. 随机事件

样本点的某个集合称为随机事件，简称为事件，并用大写字母 A，B，C，…表示．称某事件发生当且仅当它所包含的某一个样本点出现．通常把事件分为两大类，第一类是不可能再分的事件（样本点的单点集），这类事件称为基本事件；另一类是由基本事件复合

而成的事件，称之为复合事件．在每次试验中，一定发生的事件称为必然事件，记作 S. 而一定不发生的事件称为不可能事件，记作 $\varnothing$.

应该指出的是：无论是必然事件、随机事件还是不可能事件，都是相对于“一定条件”而言的．条件发生变化，事件的性质也发生变化．例如：抛掷两颗骰子，“出现的点数之和为 3”及“出现的点数之和大于 3”都是随机事件．若同时抛掷 4 颗骰子，“出现的点数之和为 3”则是不可能事件，而“出现的点数之和大于 3”则是必然事件了．

必然事件和不可能事件虽然不具备随机性，但是为了讨论问题方便，通常将必然事件和不可能事件看成是特殊的随机事件.

4. 事件间的运算关系

（1）包含关系：若事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称 A 为 B 的子事件，记作 $A\subset B$.

（2）相等关系：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

（3）和事件：事件 A 与事件 B 至少有一个发生，记为 $A\cup B$，称为 A 与 B 的和事件．它是由 A 与 B 中的所有样本点构成的集合．有限个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，即 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\triangleq\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，表示事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生；可列个事件 A_1，A_2，…的和事件记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots\triangleq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，表示事件 A_1，A_2，…中至少有一个发生.

（4）积事件：事件 A 与事件 B 同时发生，记为 $A\cap B$，称为 A 与 B 的积事件．它是由事件 A 和 B 中共同的样本点构成的集合．有限个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，即 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\triangleq\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，表示事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生；可列个事件 A_1，A_2，…的积事件记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_i\cap\cdots=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，表示事件 A_1，A_2，…同时发生.

（5）差事件：事件 A 与 B 的差事件记作 $A-B$，表示事件 A 发生而事件 B 不发生.

（6）互不相容（互斥）事件：若 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容．类似地，若 $\forall i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing(i, j=1, 2, \cdots)$，则称 A_1，A_2，…，A_n，…为两两互不相容的事件.

（7）互逆事件：若事件 A、B 满足：$AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，则称事件 A 与 B 为互逆事件（或对立事件）．称 B 为 A 的逆事件，记作 $\overline{A}$.

（8）事件间的运算所满足的规律：

1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

3）分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

（9）德·摩根律（对偶原理）：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. 对于任意有限多个随机事件，有 $\overline{\bigcup\limits_{i} A_i}=\bigcap\limits_{i}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i} A_i}=\bigcup\limits_{i}\overline{A_i}$.

熟练掌握事件间的运算关系是正确计算随机事件概率的基础．在研究实际问题时，往往需要考虑各种可能的事件，而这些事件通常是相互关联的．研究事件之间的关系，进而研究这些事件的概率之间的关系，就能够利用简单事件的概率去推算较复杂事件的概率．因此，读者应当正确理解事件间的关系及运算，对具体问题进行具体分析，善于把某些复杂事件用若干个简单事件的和或积来表示.

5. 频率与概率

（1）频率：设 E 为随机试验，A 为其中任一事件，n_A 为事件 A 在 n 次重复试验中出现的次数，则称 $f_n(A) \triangleq n_A/n$ 为 n 次试验中事件 A 出现的频率，其中 n_A 称为事件 A 在 n 次重复试验中出现的频数．当 n 增大时，$f_n(A)$ 逐渐稳定于某一个确定值 $P(A)$，称 $P(A)$ 为频率的稳定值．频率 $f_n(A)$ 具有以下性质：

1）非负性：对任意事件 A，$f_n(A) \geqslant 0$.

2）规范性：$f_n(S)=1$.

3）可加性：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不相容，则有 $f_n\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{m} f_n(A_i)$.

频率在一定程度上反映了事件 A 发生的可能性的大小，但在一定条件下做重复试验，其结果可能是不一样的，因此，不能用频率代替概率．不过由大数定律可知，频率总能稳定在某个确定值 $P(A)$ 的周围.

（2）概率.

概率的统计定义：在相同条件下做大量重复试验，称在重复试验中事件 A 发生的频率的稳定值 P 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$.

概率的公理化定义：设 E 为随机试验，S 为它的样本空间，对 E 中的每一个事件 A 都赋予一个实数，记为 $P(A)$，且满足

1）非负性：对任意事件 A，$P(A) \geqslant 0$.

2）规范性：$P(S)=1$.

3）可加性：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

概率 $P(A)$ 有如下的基本性质：

1）$P(\varnothing)=0$.

2）若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

3）对于任一事件 A，有 $P(A)=1-P(\bar{A})$.

4）若 $B \subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，且有 $P(A) \geqslant P(B)$.

5）加法公式对于任意事件 A、B，有 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$．对三个事件 A_1, A_2, A_3，有

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)\\&-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\end{aligned}$$

加法公式可以推广到任意有限个事件 A_1，A_2，…，A_n，且有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

6. 三个概型及其概率计算

（1）古典概型（等可能概型）：具有以下三个共同特征的试验称为古典概型（等可能概型）试验，即：

1）试验的样本空间所含基本事件的个数只有有限个.

2）每个基本事件出现的机会都是相等的.

3）在任一次试验中有且仅有一个基本事件发生.

一般地，设 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，若 $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$，称这一概型为古典概型（等可能概型）. 若 A 为 S 中的事件，A 中包含的样本点数为 $n(A)$，样本点总数为 $n(S)$，则

$$P(A) \triangleq \frac{A\text{ 中所包含的样本点数}}{\text{样本点总数}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

（2）贝努利概型：若试验 E 只有两个可能的结果 A 与 $\overline{A}$，记 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p=q$，$(0<p<1)$，将试验 E 独立地重复进行 n 次，则称这一串独立重复试验为 n 重贝努利试验. 它是“在同样条件下进行重复试验”的一种数学模型，我们称这种模型为贝努利概型. 事件 A 出现 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

（3）几何概型：如果一个试验具有以下两个特点：

1）S 是一个几何区域，且其大小可以计量（长度、面积、体积等），并把 S 的度量记为 $\mu(S)$.

2）向 S 中任意投掷一点，该点落在 S 中任意位置都是等可能的，亦即，若事件 A 表示点落在 S 的某一子区域内（该区域也用 A 表示），则事件 A 的概率与 A 的计量 $\mu(A)$ 成正比，而与 A 在 S 中所处的位置、形状无关.

若 A 为 S 中任一事件，且设事件 $A=\{$投掷点落在 A 内$\}$，则

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

这种概型称为几何概型，由此求得的概率称为几何概率.

注 1：判断是否是古典概型的关键是基本事件的概率的可能性，而有限性比较容易判断. 对于古典概型的计算，需特别注意得是把事件 A 所包含的基本事件的个数数准、数全. 对比较简单的情况，可以把样本空间中的基本事件全部列出来，当样本空间中的基本事件不能全部列出时，就要求具有抽象分析的能力，并且对排列、组合的基本知识要清楚，事件间的关系及运算要熟练. 只有如此，才能较好地掌握古典概型的计算问题.

注 2：古典概型大致可归纳为以下三类问题：

（1）摸球问题（可用于产品的随机抽样问题等）.

（2）分房（占位、排队等）问题.

（3）随机取数问题.

7. 条件概率及三个重要公式

（1）**条件概率**　在同一试验中，事件 B 已发生的条件下［且 $P(B)\neq 0$］，事件 A 发生的概率称为条件概率，记作 $P(A\mid B)$，其计算公式为

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

求条件概率可采用以下的方法：

1）事件 B 发生后，在缩小的样本空间中计算事件 A 发生的概率 $P(A\mid B)$.

2）在样本空间中分别计算 $P(AB)$ 与 $P(B)$，再用公式计算 $P(A\mid B)$.

（2）**乘法定理**　设 A、B 为任意事件，则

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)\quad[P(B)\neq 0]$$
$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)\quad[P(A)\neq 0]$$

以上两公式称为乘法公式，该公式还可以推广到任意有限多个事件的情形．一般地，设 A_1，A_2，…，A_n 为 $n(n\geqslant 2)$ 个事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_{n-1}\mid A_1A_2\cdots A_{n-2})P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

（3）**全概率公式**　设 A_1，A_2，…，A_n 为两两互不相容事件，且 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=S$，$P(A_i)>0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，即事件组 A_1，A_2，…，A_n 为一完备事件组，则对任意事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

上式称为全概率公式.

（4）**贝叶斯公式**　设 A_1，A_2，…，A_n 为两两互不相容事件，且 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=S$，$P(A_i)>0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，即事件组 A_1，A_2，…，A_n 为一完备事件组，则对于任意事件 $B[P(B)>0]$，有

$$P(A_k\mid B)=\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

称此式为贝叶斯公式.

注 1：乘法公式与条件概率公式实际上是一个公式，只是根据不同的要求、不同的已知条件而采用的不同形式而已，有时需要交叉使用以求得问题的解答.

注 2：全概率公式与贝叶斯公式应用起来较为复杂，其关键是寻找一组两两互不相容的事件组 A_1，A_2，…，A_n，使要研究的事件 $B\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，从而 $B=\bigcup_{i=1}^{n}BA_i$，进而使问题转化为求一组两两互不相容的事件 BA_1，BA_2，…，BA_n 的概率，然后用乘法公式及加法公式即可求得事件 B 的概率．在应用全概率公式时，$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$ 往往成为验证事件组 A_1，A_2，…，A_n 是否为公式中的完备事件组的方法．在对具体问题分析时，可参考以下两点：

1）A_1，A_2，…，A_n 可看成导致事件 B 发生的一组原因，若事件 B 表示次品，则 A_1，A_2，…，A_n 应表示 n 个（台）工厂（车间、机器、流水线等）生产了次品；若事件 B 表

示某种疾病，则 A_1，A_2，…，A_n 应是导致该种疾病的 n 种病因．此外，这些 A_1，A_2，…，A_n 的概率已知或容易求出，且在 A_1，A_2，…，A_n 发生的条件下 B 发生的条件概率已知或较容易求出，这时就可以用全概率公式求 B 的概率.

2）A_1，A_2，…，A_n 是导致事件 B 发生的原因，各种原因的概率 $P(A_i)$ 称为先验概率（或验前概率），一般由实际或经验给出．而 $P(A_i \mid B)$ 是试验之后，找某种原因发生的可能性，该概率称为后验概率（或验后概率），一般用贝叶斯公式来求.

8. 事件的独立性

两个事件相互独立：设 A、B 为两个事件，如果 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立.

$n(n \geqslant 3)$ 个事件相互独立：设 A_1，A_2，…，A_n 是 n 个事件，若对于任意 i，$j(i \neq j)$，都有 $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$ 成立，则称 A_1，A_2，…，A_n 为两两独立的事件；若对于任意的正整数 $k(2 \leqslant k \leqslant n)$ 和任意的 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立，则称 A_1，A_2，…，A_n 为相互独立的事件.

事件组两两独立与相互独立是不同的，若事件组相互独立则一定两两独立，反之不然.

四、疑难问题解析

1. 概率的统计定义中说当试验的次数 n 很大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定在某个数值 p 的附近，而且一般来说，随着试验次数 n 的增加，其频率在这个数值 p 附近摆动的幅度会越来越小，则称这个数值 p 为随机事件 A 的概率．那么能否将随机事件 A 的概率看作是随机事件 A 的频率的极限?

答：不能．这是由于：第一，概率的统计定义仅对重复独立试验的情形给出，并不是对任意随机事件都适用；第二，随着试验次数 n 的增加，其频率在概率附近摆动的幅度会越来越小，指的并不是高等数学中所定义的极限．在高等数学中，极限 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ 用 $<\varepsilon - N>$ 方法来描述就是：对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$，总能找到正整数 N，当 $n > N$ 时，就有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立．由于随机现象的偶然性，对于某个给定的 $\varepsilon > 0$，可能找不到相应的 N，使得当 $n > N$ 时，总有 $|f_n(A) - p| < \varepsilon$，例如，抛掷一枚均匀的硬币 n 次，正面出现的次数可能会远远少于反面出现的次数．在第五章中贝努利大数定律所描述的频率收敛于概率指的是依概率收敛.

2. 样本空间与必然事件的关系如何?

答：必然事件是指在随机试验中一定会出现的事件，当在一次试验中只有一个样本点出现时，如果把样本空间看作是一个整体，也可以说在每次试验中样本空间必然出现，所以，样本空间就是随机试验的必然事件.

3. 概率等于 1 的事件是否一定是必然事件? 概率等于 0 的事件是否一定是不可能事件?

答：必然事件的概率一定等于 1，即若 $A = S$，则 $P(A) = 1$，但概率等于 1 的事件不一定是必然事件，也就是若 $P(A) = 1$，不一定有 $A = S$.

例如，在几何概率中，设

$$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}-\left\{(x,y)\mid x^2+y^2=\frac{1}{2}\right\}$$

此处，S 为一单位圆，而 A 为在单位圆中去掉直径为$\sqrt{2}$的同心圆周后所剩余的部分，按几何概率的计算公式，有

$$P(A)=\frac{\mu_A}{\mu_S}=\frac{\pi}{\pi}=1$$

但是，在向 S 内投点时，点可能落在圆周 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$上，这时事件 A 不发生，即 A 不是必然事件. 另外，易知 $P(\bar{A})=\frac{\mu_{\bar{A}}}{\mu_S}=\frac{0}{\pi}=0$，但是$\bar{A}$也不是不可能事件.

4. 条件概率为什么是概率？它与无条件概率有何区别？

答：由于 B 已经发生，所以，试验所有可能的结果发生了变化（亦即只有 B 中所包含的全部试验结果），此时，B 中所包含的所有可能的结果构成了新的样本空间，从而条件概率 $P(A\mid B)$ 可以看作是缩减的样本空间 B 中事件 A 的概率. 可以验证它符合概率的三条性质：非负性、规范性和可列可加性，因此，它的确是概率.

条件概率是在试验 E 的条件下又加上一个新的条件（事件 B 发生）时，求事件的概率. 因为条件增多，故可以理解为：

（1）样本空间 S 不变，有利事件改变（由 A 变为 AB，显然有 $AB\subset A$).

（2）如在前面的解释中，样本空间 S 缩减为 B，有利事件改变为 AB.

因此，一般来说，$P(A)\neq P(A\mid B)$. 相对于条件概率，在样本空间 S 中的概率可以称为无条件概率，但是我们也可以把这些概率看作是在 S 发生的前提下的条件概率，由于 $AS=A$，$P(S)=1$，从而有

$$P(A\mid S)=\frac{P(AS)}{P(S)}=\frac{P(A)}{1}=P(A)$$

由此可见，所有的概率都可以称为条件概率，只不过样本空间发生这个前提一般不特别强调.

5. 利用全概率公式和贝叶斯公式计算概率时应注意哪些问题？

答：全概率公式和贝叶斯公式是概率计算中两个重要的公式. 利用这两个公式计算概率时，需要考虑多个事件以及它们之间的关联性. 在有些问题中所考虑的事件不是以事件间的直接运算形式（如和、积、差等）相关联，而是以原因（或条件）与结果的关系出现. 例如，在产品的质量检验问题中，不同工厂生产相同的产品这些事件就是原因，而从全部产品中取出次品的事件就是结果，各工厂生产次品率不同的产品将对从全部产品中取出次品的概率产生影响，不同的原因对结果的发生可能产生不同的影响，这是因与果的关系.

若把全概率公式中的 B 视作结果，而把样本空间 S 的每一划分 A_i 视作原因，则全概率公式所解决的就是“由因求果”的概率问题. 利用该公式求概率时首先要正确寻求样本空间 S 的划分，这可通过寻求引起结果 B 发生的原因来求得诸 A_i，一般可用检验诸 A_i 发生的概率的和是否为 1 来判断选择是否正确.

贝叶斯公式也称为“后验概率”公式，它实际上是条件概率，它所解决的是“执果溯因”的概率问题，即在结果 B 已经发生的情况下，分析、探求导致 B 这一结果发生的诸原因（也就是诸 A_i）发生的可能性的大小．公式

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

中的概率 $P(A_i \mid B)$ 是在得到信息 B 后求出的，故称其为“后验概率”．$P(B)$ 也称为先验概率.

6. 事件的独立性与互不相容之间的关系如何？有人认为“若 A、B 相互独立，就应当 A、B 毫无关系，因而 A、B 不应该同时出现，从而有 $AB=\varnothing$，所以，两事件独立则它们一定互不相容”．这种说法对吗？

答：这种说法是不对的．独立性是事件间的概率属性，而互不相容是指事件间本身的关系，这两个概念不能混为一谈．在概率论中，两事件相互独立是指一个事件 A 发生的概率与另一个事件 B 是否发生没有关系，或者说事件 B 的发生对事件 A 的发生不提供任何有用信息.

而事件 A、B 互不相容是指事件 A 的发生必然导致事件 B 的不发生，或者说 B 的发生必然导致 A 的不发生，也即 $AB=\varnothing$，从而，事件 A 发生的概率与另一事件 B 是否发生是密切相关的，当然它们也就不可能是相互独立的．事实上，若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，A、B 互不相容与 A、B 相互独立不能同时成立.

若 A、B 互不相容，即 $AB=\varnothing$，则

$$P(AB)=P(\varnothing)=0$$

又 $P(A)P(B)>0$，所以

$$P(AB)\neq P(A)P(B)$$

即 A、B 不独立．这说明，若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，且 A、B 互不相容，则 A、B 一定不独立．反之，若 A、B 独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，所以 $AB\neq\varnothing$. 故 A、B 不是互不相容的.

五、例题解析

【例 1-1】 设对于事件 A、B、C，有 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=1/8$，求 A、B、C 至少出现一个的概率.

分析 求 A、B、C 至少出现一个的概率即求 $P(A\cup B\cup C)$，因此，可应用概率的加法公式，但这需要先求出 $P(ABC)$.

解 由于 $ABC\subset AB$，从而由性质 4 可知，$P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，又由概率的定义可知，$P(ABC)\geqslant 0$，从而 $P(ABC)=0$. 因此，由概率的加法公式得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-0-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

【例 1-2】 设 A、B 为随机事件，已知 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$.

分析 要求出 $P(\overline{AB})$，可由概率的性质 3 先求出 $P(AB)$.

解 由于 $A=AB\cup(A-B)$，且 $AB\cap(A-B)=\varnothing$，所以

$$P(A) = P(AB) + P(A-B)$$

从而

$$P(AB) = P(A) - P(A-B) = 0.4$$

由概率性质3得

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6$$

【例1-3】 设A，B为两个随机事件，证明：

$$1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) \leqslant P(AB) \leqslant P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$

分析 要证明结论，需将$P(\overline{A})$，$P(\overline{B})$用$P(A)$，$P(B)$表示，并利用概率的相关性质和公式进行相应的转换即可.

证

$$\begin{aligned} 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) &= 1 - [1 - P(A)] - [1 - P(B)] \\ &= P(A) + P(B) - 1 = P(AB) + P(A \cup B) - 1 \\ &= P(AB) - [1 - P(A \cup B)] \leqslant P(AB) \end{aligned}$$

由于$AB \subset A \cup B$，故$P(AB) \leqslant P(A \cup B)$，又因为$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$，且$P(AB) \geqslant 0$，从而，有

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$

综合以上可得

$$1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) \leqslant P(AB) \leqslant P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$

【例1-4】 从5双不同的鞋子中任取4只，求4只鞋子至少有2只配成一双的概率.

分析 直接求4只鞋子至少有2只配成一双的概率不易得到正确的结果，这是由于考虑的事件比较复杂，解决此类问题的方法通常是利用概率性质3，即先求逆事件的概率.

解 设事件A表示："取出的4只鞋子至少有2只配成一双"，则事件$\overline{A}$表示："取出的4只鞋任意2只均不能配成一双".

方法一：若取鞋子是一只一只地取（不放回），则共有$10 \times 9 \times 8 \times 7$种不同的取法，而取出的4只鞋子任意2只均不能配成一双的取法共有$10 \times 8 \times 6 \times 4$种（第一只10种取法，取第二只时，先把与第一次取出的那只配成双的放到一边，从剩下的8只中取，以此类推），所以有

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{13}{21}$$

方法二：从5双不同的鞋子中任取4只，共有C_{10}^4种不同的取法.取出的4只鞋任意2只均不能配成一双共有$C_5^4 \times 2^4$种取法（先从5双中任取4双，共C_5^4种取法，然后从每双鞋子中任取1只，每双鞋子有2种取法，共有2^4种取法）.从而可得

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_5^4 \times 2^4}{C_{10}^4} = 1 - \frac{80}{210} = \frac{13}{21}$$

【例1-5】 袋中有a个黑球、b个白球，它们除颜色不同外，其他方面没有差别，现在把球随机地一个个摸出来，求第k次摸出的一个球是黑球的概率（$1 \leqslant k \leqslant a+b$）.

分析 这是古典概型的问题，解这类题目首先要正确计数，然后利用古典概型概率的计算公式算出概率即可.