奇妙的桥梁

——初等代数中的辅助元素

吴沈泉 编著

华东师范大学出版社

奇 妙 的 桥 梁

——初等代数中的辅助元素

吴沈泉　编著

华东师范大学出版社

(沪)新登字201号

奇妙的桥梁

——初等代数中的辅助元素

吴沈泉 编著

华东师范大学出版社出版发行
(上海中山北路3663号)
新华书店上海发行所经销 常熟市印刷六厂印刷
开本:787×1092 1/32 印张:8.5 字数:200千字
1993年3月第一版 1993年3月第一次印刷
印数:001—4,000本

ISBN7-5617-0922-6/G·398 定价:5.00元

目　录

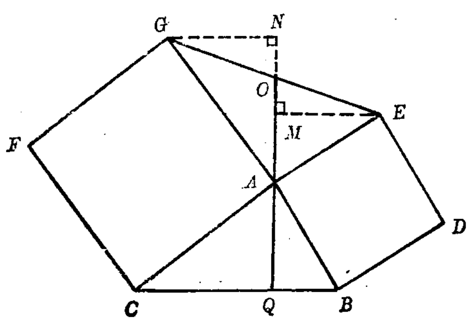
第一章　辅助元素概述

§1.1　什么叫辅助元素

学习数学的一个重要环节是掌握解题的思维和方法. 在理解、掌握基本概念、公式、定理后，如何将它们运用到解题过程中去，这是每个学生要碰到的问题，也是每个教师在教学中必须教会学生的一个基本课题. 有些题，只要直接运用所学概念、公式、定理，就能得到答案；也有些题，不仅要直接运用基础知识，而且还要设法进行一些变换或增添一些辅助条件，才能得到结果.

众所周知，在解平面几何题时，有时需要添置辅助线，依靠辅助线找到已知与未知之间的联系，从而完成解题.

例1　已知锐角三角形 ABC，以两边 AB、AC 为边，分别向外作两个正方形 $ABDE$ 及 $ACFG$（如图）. 且 $AQ \perp BC$，QA 延长线交 EG 于 O. 求证：$EO = OG$.



分析　要证明的 EO、OG 与已知条件中的两个正方形以及 $AQ\perp BC$，很难找到直接的联系。我们可设法恰当转化结论，将证明线段相等转化为先证明两个三角形全等。为了得到两个合适的三角形，联系到已知条件，考虑作两条垂线，得到两个直角三角形。

证明　作 $EM\perp QO$，$GN\perp QO$，交 QO 延长线于 N。

$\because$　$ACFG$ 是正方形　$\therefore$　$AC=AG$，

而　$\angle GAN+\angle AGN=90°$

且　$\angle GAN+\angle CAQ=90°$

$\therefore$　$\angle AGN=\angle CAQ$。

$\because$　$AQ\perp QC$，$GN\perp AN$。

$\therefore$　r.t.$\triangle AGN\cong$r.t.$\triangle CAQ$。　$\therefore$　$GN=AQ$

同理，可证明 r.t.$\triangle AEM\cong\triangle$r.t.$\triangle BAQ$。

$\therefore$　$EM=AQ$。

$\therefore$　$EM=GN$（等于第三个量的两个量相等）

由于　$\angle EOM=\angle GON$（对顶角相等），

且　$EM\perp MN$，$GN\perp MN$。

$\therefore$　r.t.$\triangle EOM\cong$r.t.$\triangle GON$。

$\therefore$　$EO=OG$（全等三角形对应边相等）。

以上证明过程中，作了两条垂线，产生了两个直角三角形，只要证明了两个三角形全等，就能得到线段相等的结论。辅助线的作用是充分运用已知条件，并且恰当地转化结论。如例1，为了发挥直角（已知条件中直角较多）的作用，将证明线段相等转化为证明两个直角三角形全等。从而根据图形特点，容易证得结论成立。

与几何中的辅助线相类似，在解代数题时，有时也需要这样的"辅助线"，来沟通已知与未知的联系，简化解题的过

程。

例2 求证：$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n(n\in N)$。

分析 直接运用组合公式进行证明，困难较大，且运算繁冗。详细观察要证的式子，左边为组合数平方之和，右边为另一组合数。我们联想到二项展开式的各项系数的形式，可设法转化结论，运用二项展开式来证。

证明 引入恒等式$(1+x)^n\cdot(x+1)^n=(1+x)^{2n}$。$(n\in N)$。并运用二项展开式，得

$$
\begin{aligned}
&(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots\cdots+C_n^nx^n)\\
&\quad\cdot(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+\cdots\cdots C_n^n)\\
&\quad=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+\cdots\cdots+C_{2n}^nx^n+\cdots+C_{2n}^{2n}x^{2n}.
\end{aligned}
$$

上式左、右两边均为关于 x 的多项式，比较两边含 x^n 项的系数，左边的系数为$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots\cdots+(C_n^n)^2$，而右边的系数为 C_{2n}^n。

根据多项式恒等的定理，两边多项式含 x^n 项的系数相等。因此，

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n\quad(n\in N).$$

上例中的二项式组成的等式 $(1+x)^n\cdot(x+1)^n=(1+x)^{2n}$，在原来题设和结论中都是没有的，是为了得到所证结论，添加出来的，它类似于几何中的辅助线，我们称它为辅助等式。它将复杂的组合证明转化为比较两个多项式的相应项的系数，从而使问题简单化，找到了证明的途径。

例3 已知 a、b 都是实数，且 $a^2+b^2=1$。

求证：$|a^2+2ab-b^2|\leqslant\sqrt{2}$。

分析 直接将要证明的式子两边平方，不易得到结论。从已知条件着手，可适当进行变量代换，试图减少字母个数，达到简化证明过程的目的。

证法一 设$a^2=\frac{1}{2}+t$，$b^2=\frac{1}{2}-t$，$\left(-\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\right)$，代入要证的式子，左边

$$=\left|\frac{1}{2}+t\pm 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+t\right)\left(\frac{1}{2}-t\right)}-\frac{1}{2}+t\right|$$

$$=\left|2t\pm 2\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\right|.$$

即要证 $2\left|t\pm\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\right|\leqslant\sqrt{2}$。

上式两边平方，得$\left(t\pm\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}$，

$$t^2+\frac{1}{4}-t^2\pm 2t\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\leqslant\frac{1}{2},$$

$$\pm 2t\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\leqslant\frac{1}{4}.$$

根号前为负号时，显然成立。现只考虑取正号的情形。

即要证 $t\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\leqslant\frac{1}{8}$。

两边再平方，得 $t^2\left(\frac{1}{4}-t^2\right)\leqslant\frac{1}{64}$，

$$\frac{1}{4}t^2-t^4\leqslant\frac{1}{64},$$

$$64t^4-16t^2+1\geqslant 0,$$

$$(8t^2-1)^2\geqslant 0.$$

由于上式显然成立，且以上每一步均可逆，所以原不等式成立。即

$$|a^2+2ab-b^2|\leqslant\sqrt{2}.$$

证法二： 设 $a=\sin\theta$，据已知有 $b=\cos\theta$。$\theta\in[0,2\pi)$ 代入要证明的不等式，

左边$=|\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta|$

$$=|\sin 2\theta-\cos 2\theta|=\sqrt{2}\left|\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\because\quad \left|\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 1$$

$$\therefore\quad \text{左边}=\sqrt{2}\left|\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}$$

因此，　　$|a^2+2ab-b^2|\leqslant\sqrt{2}$.

例 3 中用了变量代换，使证明过程简单化．证法一中用的是平均值代换，纯属代数范围，过程较繁．证法二中用的是三角代换，运用了三角函数性质和公式，显得简洁得多．上例还告诉我们，虽然原题与三角无关，但可以引入三角代换，在三角范围内证明，却能最大程度简化证明过程．

像以上这种情况，在解代数题时碰到甚多．原先不是方程的问题，可以假设一个方程，运用方程的性质来解决原来的问题；或者原先不是函数的问题，可以引入一个函数，运用函数的性质来解决原来的问题；等等．无论假设的是等式、方程还是函数、复数等，都可称为辅助元素．

例4　求证：$m^2+n^2\geqslant m+n+m\cdot n-1$．$(m、n\in R)$

分析　直接运用不等式的性质或基本证法，很难证出结论．考虑到所证式子为二次式，故可运用二次函数的性质来证。为此，联想到引入一个二次函数。

证明　当 $n=1$ 时，原不等式化为 $m^2+1\geqslant 2m$．对一切 $m\in R$，显然成立．

当 $n\neq 1$ 时，引入辅助函数

$$f(x)=x^2+n^2-x-n-nx\cdot 1\quad(x\in R),$$

即　$$f(x)=x^2-(n+1)x+(n^2-n+1),$$

这是关于 x 的二次函数，考虑其判别式

$\Delta=(n+1)^2-4(n^2-n+1)=-3(n-1)^2<0$ （$\because n\neq 1$），

而 $f(x)$ 的二次项系数为 $1>0$.

因此，据二次函数图象的性质，对一切 $x\in R$，都有 $f(x)>0$，即对一切 $m\in R, n\neq 1$，都有 $f(m)>0$.

所以，$m^2+n^2\geqslant m+n+m\cdot n-1(m、n\in R)$，等号当且仅当 $m=n=1$ 时才成立.

例5 求 $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2}{5}\pi$ 的值.

分析 运用三角公式不易得到结果. 考虑到题设中，角之间存在着二倍关系，联想到复数三角形式进行平方时，也存在幅角间二倍关系. 因此，可假设复数，运用复数的代数运算来解决.

解 设 $$z=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5},$$

则 $$z^2=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi,$$

且 $$\overline{z}=\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5},$$

$$\overline{z^2}=\cos\frac{2}{5}\pi-i\sin\frac{2}{5}\pi$$

再运用公式 $\overline{z}=\frac{1}{z}$，可得到 $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{z^2+1}{2z}$，

$$\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{z^4+1}{2z^2},$$

且 $$z^5=-1.$$

$$\therefore\quad \cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{z^2+1}{2z}-\frac{z^4+1}{2z^2}=\frac{z^3+z-z^4-1}{2z^2}$$

$$=\frac{z^8+z^6-z^7-z^3}{2z^5}=\frac{-z+z^4+z^2-z^3}{-2}$$

（$\because z^5=-1$），

即 $$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{2}(z-z^2+z^3-z^4)$$

$$=\frac{1}{2}z\cdot\frac{1-z^4}{1+z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{z-z^5}{1+z}=\frac{z+1}{2(1+z)}=\frac{1}{2},$$

因此， $$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{2}.$$

例 4 和例 5 原先是不等式的证明与三角函数求值运算，显然原题似乎与函数、复数无关。然而，引入辅助函数与辅助复数后，就将原题转化为对函数性质的讨论以及复数的代数运算。我们就能运用熟知的一元二次函数性质和复数的运算得到结论。

总之，假设辅助元素后，就将原题转化为对引入的元素(如等式、方程、函数、复数、数列等)性质的研究，运用它们的规律来解决问题。辅助元素起到了相当于几何中“辅助线”的作用，原先不容易联系起来的，变得容易联系了(像例2)，原先不易证明或比较繁冗的过程，变得简便了(像例3)。

§1.2 直接解法与间接解法

解决代数问题，不管是证明题还是求解题，一般都是通过对所给式子本身，进行直接运算或直接证明，得到结论，从而完成解题过程的。

例6 计算$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$的值。

解 ∵ $$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$+\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+\sqrt{5}+2)$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10}+2\sqrt{2}).$$

例7 已知 $\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\sin\gamma$ 成等差数列

求证：$\mathrm{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}$，$\mathrm{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}$，$\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ 也成等差数列。

分析　实质上，本题是已知 $\sin\beta-\sin\alpha=\sin\gamma-\sin\beta$，证明 $\mathrm{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}-\mathrm{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}=\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}-\mathrm{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}$。从已知的式子到求证的式子，角由单角 α、β、γ 变为复合角

$$\frac{\beta+\gamma}{2},\quad \frac{\gamma+\alpha}{2},\quad \frac{\alpha+\beta}{2},$$

显然，宜从已知等式两边和差化积入手。

证明 $\because$ $\sin\beta-\sin\alpha=\sin\gamma-\sin\beta$

$$\therefore\quad 2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=2\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}.$$

即
$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\gamma+\beta}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

$$\therefore\quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

$$-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

$$=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

上式两边同除以

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

得 $$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

即 $$\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma+\beta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

因此，

$$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

也成等差数列。

我们将一个数学问题，直接由题设条件向所求结论转化，或直接由所求结论逆推分析至题设条件，这样的一种方法称为直接解题法(如例 6 与例 7)。但是，并不是所有的代数问题都能如此方便地得到解决的。像§1.1 中的例题直接解就较困难。有时会“咫尺天涯”，看起来非常接近，中间又突然出现一道难以逾越的障碍；有时尽管思路明确，方法单纯，但运算相当麻烦。对于这些问题，假如不用直接的方法，而是运用迂回的方法，去求出另一个与所求结果间接相关的结论，往往能够“柳暗花明又一村”。这种解题方法称为间接解题法。

我们提出的引进辅助元素的解题方法，就是一种间接解题方法。它不是直接解决题设的问题，而是先假设辅助元素，然后对所假设的辅助元素进行运算和讨论或证明，诸如求出引进的方程的根、引进的函数的最大值、引进的复数的模或讨论引进的函数的单调性等等，从而间接地解决了原来的问

题.

例8 求证$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}\geqslant\sqrt{2}$ $(a、b\in R)$.

分析 上式为根式不等式，假如运用不等式性质或比较法、分析法等直接证明，运算繁琐，且不易证出。我们联想到复数的模也是含有根号的类似形式，可考虑引进复数，运用复数模的性质来证明.

证明 设 $z_1=a+(1-b)i$，$z_2=(1-a)+bi$. $(a、b\in R)$.

则 $$|z_1|=|a+(1-b)i|=\sqrt{a^2+(1-b)^2},$$

$$|z_2|=|(1-a)+bi|=\sqrt{(1-a)^2+b^2}.$$

又 $|z_1+z_2|=|a+(1-b)i+(1-a)+bi|=|1+i|=\sqrt{2}$，据复数模的性质，有 $|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$,

$$\therefore\quad \sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}\geqslant\sqrt{2}$$

$$(a、b\in R).$$

显然，例 8 是一个实数范围内的不等式证明题，原先与复数的运算无关。但是，我们引进辅助复数后，运用复数模的运算与性质，较方便地证得了结果.

例9 计算 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$的值.

分析 对于这样的根式运算，一般都是将根号内的式子配成完全三次方，然后开方再运算。但是要将 $20\pm14\sqrt{2}$ 配成完全三次方，需要运用待定系数法，且还要解一个二元三次方程组，运算相当困难。假如，我们将要计算的式子，设为一个辅助数值，两边三次方后，化为解以辅助数值为未知数的方程，肯定要比直接配方简便得多。详细解法请参阅第二章例 7.

像例 9 那样，直接运算是可以得到结果的，但运算过程相当繁杂。而用间接方法解，运算过程很简便。这也是引进辅

助元素解题的优点之一。

例10 求$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$的值。

分析 假如说例 9 的根号内，还能用待定系数法配成完全三次方，那么本例的配方将更感困难。这里，假设辅助数值后，用间接解法求值。

解 设$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=A$。$(A\in R)$

两边三次方

$$1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+3\sqrt[3]{1-\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2}$$

$$\times\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}\right)=A^3$$

以假设代入，得

$$A^3-3\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}\cdot A-2=0,$$

即 $$A^3+A-2=0.$$

因式分解，得

$$(A-1)(A^2+A+2)=0,$$

$\because$ $A^2+A+2=0$无实数根， $\therefore$ $A=1$。

因此，

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1.$$

上例运算过程中，用到公式 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$。显然三次方的运算要比配三次方简便，因此假设辅助元素(例 10 引进辅助数值)，运用间接方法运算，能简化运算过程。

例 11 求 $\sin 18°$ 和 $\cos 36°$ 的值。

分析 本题可用三角的倍角公式解，但运算较繁。现在

我们设辅助元素，用间接解题法求值。

解 设 $\sin 18^\circ=x$，$\cos 36^\circ=y$。

$$\because\quad xy=\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ=\frac{4\sin 18^\circ\cos 18^\circ\cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ}=\frac{1}{4}.$$

又 $$-x+y=\cos 36^\circ-\sin 18^\circ=\sin 54^\circ-\sin 18^\circ$$

$$=2\cos 36^\circ\sin 18^\circ=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ $-x$ 与 y 是方程 $t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}=0$ 的两个根。

而 $$t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4},\quad \because\ \sin 18^\circ<\cos 36^\circ,$$

$$\therefore\quad \sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\quad \cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

上例原先是求值题，与解方程无关，然而引入辅助元素后，运用韦达定理逆定理，使所求之值为某一方程的根，只要解出此方程的根，就能得到原来所求之值。

例12 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+(n+1)$，求数列的通项公式 a_n。

分析 显然，从已知条件直接得到通项公式有困难。但是，观察条件中的式子，可设法转化为另一数列。

解 $\because$ $a_{n+2}=a_{n+1}+(n+1+1)$

$a_{n+1}=a_n+(n+1)$

$\therefore$ 两式相减，得 $a_{n+2}-a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+1$

引进辅助数列 $b_n=a_{n+1}-a_n$

则 $$b_{n+1}=b_n+1$$

因此，辅助数列 $\{b_n\}$ 是公差为 1 的等差数列。