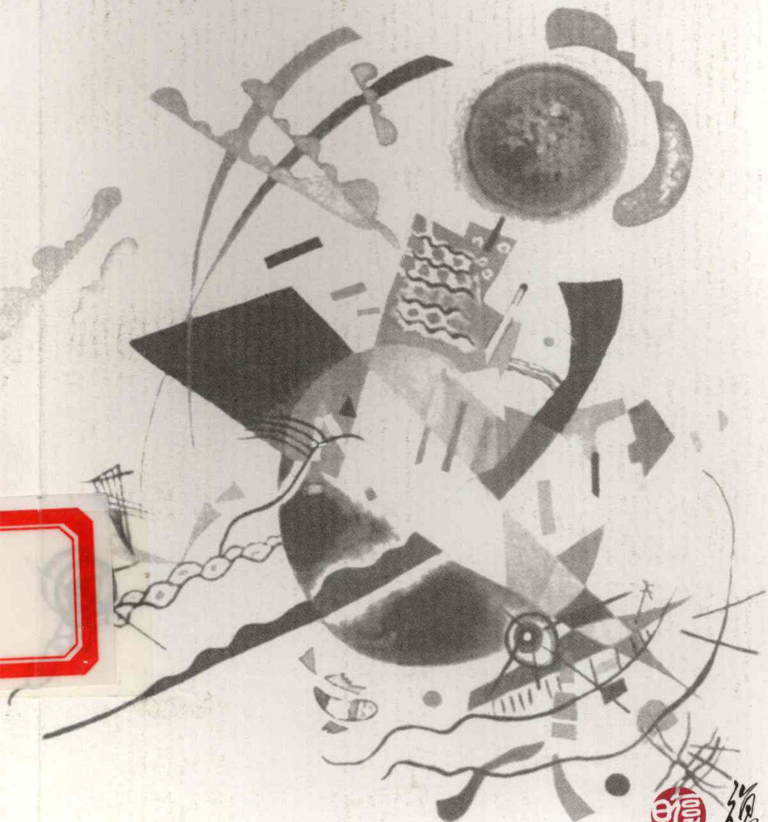
西方数学文化理念传播译丛
丛书主编 汪 宇

Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint

高观点下的初等数学

（第二卷） 几 何

〔德〕菲利克斯·克莱因 著
舒湘芹 陈义章 杨钦樑 译
余家荣 审



复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

西方数学文化理念传播译丛

丛书主编 汪 宇

mentary Mathematics from an Advanced Standpoint

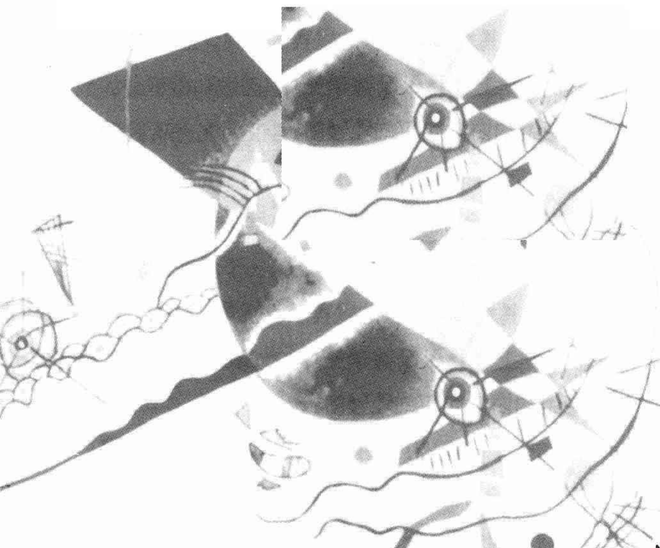
高观点下的初等数学

（第二卷） 几 何

〔德〕菲利克斯·克莱因 著

舒湘芹 陈义章 杨钦樑 译

余家荣 审



复旦大學 出版社

www.fudanpress.com.cn

Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint

内 容 提 要

菲利克斯·克莱因是19世纪末20世纪初世界最有影响力的数学学派——哥廷根学派的创始人，他不仅是伟大的数学家，也是现代国际数学教育的奠基人、杰出的数学史家和数学教育家，在数学界享有崇高的声誉和巨大的影响。

本书是克莱因根据自己在哥廷根大学多年为德国中学数学教师及在校学生开设的讲座所撰写的基础数学普及读物。该书反映了他对数学的许多观点，向人们生动地展示了一流大师的遗风，出版后被译成多种文字，是一部数学教育的不朽杰作，影响至今不衰。全书共分3卷。第一卷：算术、代数、 分析；第二卷：几何；第三卷：精确数学与近似数学。

克莱因认为函数为数学的"灵魂"，应该成为中学数学的"基石"，应该把算术、代数和几何方面的内容，通过几何的形式用以函数为中心的观念综合起来；强调要用近代数学的观点来改造传统的中学数学内容，主张加强函数和微积分的教学，改革和充实代数的内容，倡导 "高观点下的初等数学"意识。在克莱因看来，一个数学教师的职责是："应使学生了解数学并不是孤立的各门学问，而是一个有机的整体"； 基础数学的教师应该站在更高的视角（高等数学）来审视、理解初等数学问题，只有观点高了，事物才能显得明了而简单；一个称职的教师应当掌握或了解数学的各种概念、方法及其发展与完善的过程以及数学教育演化的经过。他认为"有关的每一个分支，原则上应看做是数学整体的代表"，"有许多初等数学的现象只有在非初等的理论结构内才能深刻地理解"。

本书对我国从事数学学习和数学教育的广大读者具有较好的启示作用，用本书译者之一，我国数学家、数学教育家吴大任先生的话来说，"所有对数学有一定了解的人都可以从中获得教益和启发"，此书"至今读来仍然感到十分亲切。这是因为，其内容主要是基础数学，其观点蕴含着真理……"。

第一版序

在这些讲义第一卷(算术　代数　分析)的出版序中,我曾表示怀疑,讨论几何学的第二卷是否能很快出版。但是由于海林格先生的勤奋工作,本卷终于完成了。

关于这一系列讲义成书之缘由,我在第一卷序中已经讲过,没有什么特别的话要补充了。但是对于这本第二卷所采取的新形式,似乎又有必要作一番解释。

确实,这一卷的形式与第一卷太不同了。我曾下定决心,无论如何要对几何学领域作出一个综述,把我认为每一个高中数学教师应该具有的知识范围都包括进去。于是,关于几何教学的讨论就被推到每章结尾篇幅所允许的地方,前后连贯起来。

选择这种新的写作安排的一部分动机是想避免刻板的形式。但是还有更重要、更深一层的理由。几何学中没有与该学科总水平相对应的统一教材,不像在代数和分析方面那样有标准的法国教程。一个内容广的题目往往这里讲一点、那里讲一点,简直像是各个不同的研究工作者分头写的。相反,我追求的教学法目标和一般科研目标却是希望作一个比较统一的处理。

最后我希望《高观点下的初等数学》这两卷相互补充的书,会像席马克先生和我去年出版的《数学教学组织》那本讲义一样,受到教育界的欢迎。

克莱因

1908 年圣诞节于哥廷根

第 三 版 序

根据我在第一卷第三版序中讲的总计划，这一卷（第二卷）的正文及其处理未作修改，只是在细节上作了一些小的改动，并插入一些内容。原著中没有讲到的、涉及科学文献和教学法文献的两个附录，是赛法特先生和我一再讨论后编写的（中译本未收此附录——中译者）。赛法特先生又担负起了与出版有关的主要工作。海林格、弗迈尔及瓦尔特先生帮助他看了校样。弗迈尔先生编了两个索引。我十分感谢这几位先生，也对施普林格出版公司表示谢意，该公司始终如一地表现了协助出版的精神。

克莱因

1925 年 5 月于哥廷根

英 译 者 序

克莱因著《高观点下的初等数学》3卷本第一卷英文译本出版以后,收到了读者的良好反应,所以我们翻译出版了本书,即原著第二卷。纽约大学柯朗教授在执教哥廷根大学时即已建议翻译出版克莱因的著作,他一直提供慷慨的协助,为在美国刊行第二卷铺平了道路。

前　言

先生们！我现在开始讲的课程是去年冬天课程的继续或补充。我现在的目的像那时一样，是要把你们在大学几年中学过的一切数学知识集中起来，只要对未来的教师有用就收集起来，特别是要指出它们同中学教学的关系。在去年冬天的那一学期，我已经执行了这个计划，讲了算术、代数和分析。这一学期将把注意力投到去年放在一边的几何上。在这次讲座中，课程内容是独立于上次课程的知识的。此外，我将在整体上采取有所不同的方式：先讲百科全书式的全面内容，向你们提供通盘的几何知识介绍，你们可以把已经学过的一切零星知识都纳入一个严格的系统，要用的时候就可以拿来用。作了这番通盘介绍之后，我才强调与数学教学有关的内容，而我去年冬天的出发点始终就是数学教学。

我很高兴地要提一下 1908 年复活节假日期间在哥廷根这里所举办的数理教师假期讲座。在那个讲座中，我介绍了去年冬天讲座的内容。与此有关，也由于此地中学贝伦德逊(Behrendsen)教授所作的讲话，引起了一场有趣而富有启发性的讨论，涉及了中学算术、代数、分析教学的重新组织问题，特别是谈到了把微积分引入中学的问题。参加讨论的人对这些问题表现出了极为令人欣慰的兴趣，并一般对我们使大学和中学发生紧密接触的努力表示兴趣。我希望这个讲座也会在这个方向发生一定的影响。我们以往不断地听到从中学里传来的，往往是正确的抱怨，说大学教育固然传授了许多专门内容，但对新教师以后真正会用到的许多重要的一般内容却没有讲，使新教师完全摸不清方向。但愿我这个讲座能起到一定的作用，有助

于消除这种由来已久的抱怨。

现在来讲讲这个讲座的内容。像以前的那个讲座一样，为了强调对整体内容的一般介绍，我不时需要假定你们从已经学过的一切数学知识中掌握了一些重要的定理。不错，我会始终努力作些简短的说明，以促使你们回想起学过的内容，使你们能够轻而易举地摸清文献。另一方面，我要把注意力更多地吸引到几何学科的历史发展以及伟大先驱者的成就上来，不像我在第一卷里通常做的那样。我希望，通过这类讨论，提高我常说的你们的一般数学素养，因为除了专门课程提供的详尽知识以外，还应当抓住主题内容及历史关系。

请允许我最后再泛泛地讲几句话，以免由于把这一部分几何同第一部分算术作了名义的划分而产生误解。尽管作了这种划分，但我在这里像在那种一般的讲座中一样，始终如一地最喜欢用“算术和几何的融合”这个说法来表示我的主张。我的意思是：算术这个领域不仅包含整数理论，而且包括整个代数和分析。德国中学里一般就是如此。某些人，特别是在意大利，喜欢用“融合”这个词，但仅限于指几何方面的努力。其实，无论是在大学里或在中学里，都早已形成惯例，先学平面几何，然后完全与平面几何分开来再学空间几何。因此，空间几何不幸往往遭到轻视，使我们最先具有的卓越的空间感知能力不能得到发展。与此相反，“融合派”希望同时处理平面与空间几何，使我们的思维不至于人为地受到二维的限制。这种努力也得到我的赞同，但我同时想到的是更深入、更广泛的融合。上个学期，我始终努力想使算术、代数及分析的抽象讨论生动活泼起来，利用图示和作图方法使内容更容易为个人所接受，并第一次向学生说明为什么应当对这种讨论发生兴趣。同样，现在一开始就要伴以空间观念，这种空间观念与解析公式一起当然应占首要地位，促进对几何材料的高度精确的概括。

下面我将讨论我们的问题，首先考虑一系列简单的几何基本形式，你们就能最容易地理解我讲的意思。

第二卷目录

第六部分 几何及其基础的系统讨论

第四部分

最简单的几何流形

第十章

作为相对量的线段、面积与体积

看了本章的标题，你们就会了解，我准备同时考虑在直线、平面和空间里的对应变量。然而，为了分析表述，将考虑统一的原则，立即利用直角坐标系。

设有一线段，设想其位于 x 轴上。如其端点的横坐标为 x_1 和 x_2，则其长度为 $x_1 - x_2$，可以将这个差写成行列式形式

$$(1,\ 2) = x_1 - x_2 = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}。$$

类似地，由坐标为$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$的 3 个点 1，2，3 形成的 xy 平面上的三角形的面积为

$$(1,\ 2,\ 3) = \frac{1}{1\cdot 2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}。$$

最后，由坐标为$(x_1,\ y_1,\ z_1)$，…，$(x_4,\ y_4,\ z_4)$的 4 点形成的四面体体积的公式为

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4) = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}。$$

我们通常所说的线段长度或相应情况下的面积与体积，是这几个量的绝对值，而实际上，我们的公式所提供的，远远不止这些，还给

出了依赖于所取各点顺序的一个确定的符号。在几何学中，将始终考虑这些解析式子所提供的符号，以此作为基本规则，因而必须要问包含在这些行列式内的符号的几何意义。

因此，如何选择直角坐标系，就成了一件重要的事。所以请一开始就建立一个约定，这虽然是任意的，但必须在一切情况下皆有约束力。在一维情形下，我们将认为 x 轴的正向总是指向右方。在平面上，x 轴的正向指向右方，而 y 轴的正向指向上方(图 10.1)。如果使 y 轴朝下，则必有一个本质不同的坐标系，它是前者的反射，如果不进入空间仅通过在平面内的移动，是不可能使它们相互重合的。最后，通过对平面坐标系加上一个正向指向前方的 z 轴，将得到空间坐标系(图 10.2)。选取 z 轴正向指向后方，同样会得到一个本质不同的坐标系，不可能通过在空间内的任何运动而将两个不同的坐标系重合起来。这两个坐标系分别称为“右手系”和“左手系”①。

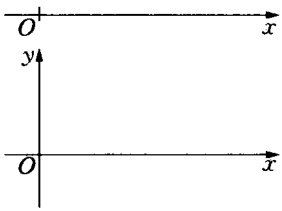


图 10.1

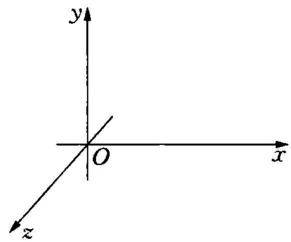


图 10.2

如果遵照这套规定，由数字标出的这些点的顺序的简单几何性质就可以用来解释我们的符号。

对于线段(1, 2)，这个性质是显然的：其长度表达式 $x_1 - x_2$ 将依赖于点 1 位于点 2 的右侧或左侧而成为正的或负的。

就三角形的情形来说，其面积公式将依赖于从点 1 经点 2 到点 3

① 这两个系统之区别，是由于相应地对应于右手和左手，开头 3 个手指的位置(见第一卷第一部分第四章第二节)。

是按逆时针或按顺时针旋转而成为正的或负的。将首先考虑一个特殊位置的三角形，计算表达其面积的行列式的值，并通过考虑连续性而过渡到一般情形，这样就证明了此结论。我们考虑这样一个三角形，其第一个顶点为 x 轴上的单位点 ($x_1 = 1$, $y_1 = 0$)，第二个顶点为 y 轴上的单位点 ($x_1 = 0$, $y_1 = 1$)，第三个顶点为原点 ($x_1 = 0$, $y_1 = 0$)。根据关于坐标系的约定，必须沿逆时针方向走过此三角形的边界（图 10.3），而关于其面积的公式产生正值

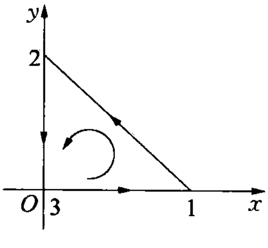


图 10.3

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{2}。$$

现在，可以通过连续变形，将此三角形的各顶点与任何其他按同方向走过边界的三角形的顶点相重合，而且可以保持三角形的 3 个顶点在任何时候都不共线。在这个过程中，行列式的值连续变化，且因为只在点 1，2，3 共线时才化为 0，故此值必然始终为正。这就证明，任何一个沿逆时针方向走过边界的三角形的面积是正的。如果变换原三角形的两个顶点，立即可以看出，每一个沿顺时针方向走过边界的三角形的面积是负的。

可以用类似的方法讨论四面体。还是从一个特殊位置的四面体出发。依次选择第一、第二、第三顶点为 x 轴、y 轴和 z 轴上的单位点，第四顶点为原点。因此其体积为

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{6}。$$

和前面一样推出，每一个可以从这个四面体连续变形并保持 4

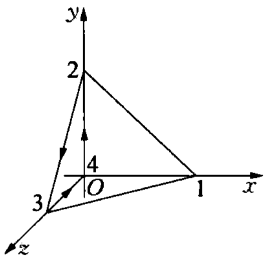


图 10.4

个顶点不共面(行列式始终不为零)而得到的四面体,其体积为正。但可以从顶点1看面(2, 3, 4)的转移方向(图 10.4),据此说明所有这一类四面体。用这种方法,我们可得如下结论:如果从顶点 1 去看顶点 2, 3, 4 是逆时针顺序,则公式算出的四面体(1, 2, 3, 4)的体积是正的,反之为负的。

于是,从解析式子出发,实际上推导出了一些几何规则,对于以确定顺序给出顶点的任何线段、三角形和四面体,可指定一个确定符号。对比把长度、面积、体积考虑为绝对值的普通初等几何学,这样做有极大的好处。初等几何必须依照图形呈现的情况而区分许多情况,而现在用几个简单的一般定理就可以概括。

请从一条直线,例如 x 轴上的 3 个点分成的各线段之比这个非常简单的例子出发。为以后方便起见,我们把这 3 点记为 1, 2, 4(图 10.5)。我们看到,所述之比由公式 $S=\dfrac{(x_1-x_2)}{(x_1-x_4)}$ 给出,且清楚地表明

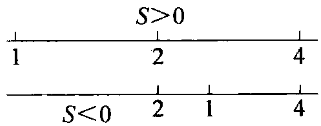


图 10.5

这个商将按点 1 在线段(2, 4)之外或线段之内而成正值或负值。如果按习惯的初等表示法,只给出绝对值 $|S|=\dfrac{|x_1-x_2|}{|x_1-x_4|}$,那么总得参考图形,或是用文字说明我们所考虑的 x_2 是在线段(2, 4)以内或以外,这当然要复杂得多。因此,符号的引入就把直线上各点可能的不同顺序考虑在内了,而这一点,是我在讲课过程中往往必须涉及的。

如果现在加上第四点,就可以建立起 4 点的交比,即

$$D=\frac{(x_1-x_2)}{(x_1-x_4)}:\frac{(x_3-x_2)}{(x_3-x_4)}=\frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}{(x_1-x_4)(x_2-x_4)}。$$

这个表达式也有一个确定的符号，而且我们立即会看到，当点对 1 和 3 与点对 2 和 4 互相分隔时，$D<0$；相反，点 1，3 都在线段 2，4 之内或之外时，$D>0$（图 10.6、图 10.7）。因此，总是有两种本质不同的排列，产生同样的绝对值 D。如果只给出绝对值，则必须同时指明其排列情况。例如，如果仍按中学的习惯方法，用方程 $D=1$ 来确定调和点，则必须将两个点对相互分隔的要求包含在定义之内，而按这里的规定我们只要说 $D=-1$ 就够了。这种把符号考虑在内的做法，在射影几何里特别有用。正如你们所知道的，在射影几何里，交比起十分重要的作用。这里有一个熟悉的定理，即当从一个中心将在一直线上的 4 个点射影到另一直线上组成另外 4 点时，前后 4 个点的交比不变。如果现在把交比考虑为受符号影响的相对量，则此定律之逆也无例外地成立：如果位于两条直线上的两个 4 点组成相同的交比，则其中一组可以通过另一组的一次或多次射影而获得。例如，在图 10.8 里，如果用中心 P 和 P'，则点集 1，2，3，4 和 1″，2″，3″，4″将分别射影成 1′，2′，3′，4′。然而，如果只知道 D 的绝对值，则相应的定理不能以这种简单的形式出现，必须对各点的排列作出专门的假设。

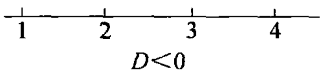


图 10.6

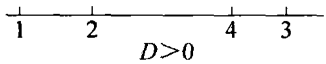


图 10.7

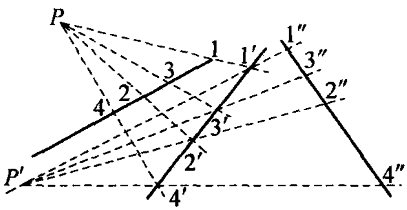


图 10.8