

复变函数选编

第二册

龙赞翔 编

西南师范学院数学系印

一九八三年三月

前言

这本讲义是为我校研究生开设《复变函数选论》而编写的，内容包括椭圆函数、黎曼定理及共形映照的边界对应，模函数毕卡定理，黎曼函数及亚纯函数，单叶函数等几个部分，这些部分都是大学本科《复变函数论》的进一步深入，因此我们还准备采用为本科高年级选修深明教材。

在编写过程中，我们力求做到在理论严密的基础上深入浅出，易教易学，而且能尽可能反映复变函数论的新成果。我们除了较详细地介绍了椭圆函数，共形映照，毕卡定理，黎曼函数，亚纯函数及单叶函数的一般基础理论之外，还在介绍亚纯函数时，讲了尼芬里拉 (Nevanlinna) 的亏量定理 (即第二基本定理)，讲解亚纯函数的分解问题时，除讲了阿达玛定理关于亚纯函数的推广外，还引进了尼芬里拉的一个较深入的定理 (其中分子、分母不一定收敛)，对单叶函数系数的估值问题，除介绍了研究这一问题的三个不同方法——积分平均估值法，参数表示法，变分法——外，还引进了一些较新的结果，特别还介绍了 $|C_4| \leq 4$ 的阿尔福斯 (Ahlfors) 证明。但由于编者的水平有限，而且编写的时间也很仓促，缺点与错误在所难免，希望看过这本讲义的同志，多加批评指正。

复变教研室

龙 赞 翔

唐 令 教

一九八三年五月

目 录

第四讲	整函数与亚纯函数	1
第一章	整函数	1
§1	整函数的因子分解	1
§2	整函数的级与型	4
§3	整函数的增长与它的零点之间的关系	26
§4	整函数的导函数	45
§5	ρ 级整函数的最小模	54
§6	亚纯函数	59
第五讲	单位函数	86
第一章	单叶的共形映照	86
§1	概念和基本性质	86
§2	偏差定理	87
§3	单叶函数列的收敛	94
§4	掩蔽定理	102
§5	以多项式逼近解析函数	105
第二章	单连通区域共形映照的实现	109
§1	从直交多项式作成映照函数	109
§2	直线多角形区域和圆弧多角形区域的共形映照	115
§3	单叶函数的参数表示	129
§4	单叶函数的变分	140
第三章	单叶函数族的极值问题和估计	152

§ 1	迴转定理	152
§ 2	加强明偏差定理	160
§ 3	偏差定理的极值形式和优越区域的形式	168
§ 4	星形界限与凸形界限	183
§ 5	线段和面积明掩蔽	189
§ 6	关于平均模数的辅助定理、系数的估计	201
§ 7	单叶函数的系数之相互增长	209
§ 8	系数的准确估计	215

第四讲 整函数与亚纯函数

第一章 整函数

§1 整函数的因子分解

除无穷远点外, 没有其它奇点的解析函数称为整函数, 不为多项式的最简单的整函数如 e^z , $\sin z$, $\cos z$ 等。

一般整函数 $f(z)$ 它可能没有零点, 也可能只有有限个零点。也可能有无穷多个零点。可以证明如果 $f(z)$ 没有零点, 则必有

$$f(z) = e^{g(z)}$$

$g(z)$ 是一个整函数。

同样, 如果 $f(z)$ 具有有限个零点, 设原点是 $f(z)$ 的 m 重零点 (m 可以为零), 其它零点是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 各零点重复计数。于是有

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{z}{\alpha_i}\right)$$

当 $f(z)$ 是具有无限个零点的整函数时, 我们总可以设 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 m 重零点 (m 可以是零)。又因 $f(z)$ 在每一圆盘 $|z| < R$ ($R < \infty$) 内只有有限个零点, 所以我们可以把它的不是原点的零点按模数的不减次序排列起来, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ 是 $f(z)$ 的零点, 则有 $0 < |\alpha_n| \leq |\alpha_{n+1}|$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = \infty$, 根据上面的想法, 我们总希望这样的整函数能具有下面因子分解, 即

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_i}\right)$$

但这要求无穷乘积 $\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_i}\right)$ 能在每一紧数集上一致收敛时, 上式才能表示一个整函数, 但在一般的情况下, 这是办不到的,

因为乘积 $\prod_1^{\infty} (1 - \frac{z}{\alpha_n})$ 有时还可能发散，所以一般整函数常常不可能象多项式那样分解，而须考虑比 $(1 - \frac{z}{\alpha_n})$ 稍复杂一些的因子。

考察复数 $\alpha_n \neq 0$ 的任意一个序列 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ 这里 $|\alpha_n| \leq |\alpha_{n+1}|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty$ ，我们下面来证明

(1) 有这样的多项式 $p_n(z)$ 存在，使得

$$\prod_1^{\infty} (1 - \frac{z}{\alpha_n}) e^{p_n(z)} \quad (1)$$

收敛于一个整函数 $f(z)$ 。

我们知道，乘积收敛的充要条件是级数

$$\sum_1^{\infty} \left\{ \ln(1 - \frac{z}{\alpha_n}) + p_n(z) \right\} = \sum_1^{\infty} \gamma_n(z)$$

收敛，这里对数取它的主值支，即取 $-\pi < \operatorname{Im}(\gamma_n(z)) \leq \pi$ 。

对于一切给定的 R ，我们只考察 $|\alpha_n| > R$ 的项。在圆盘

$|z| \leq R$ 上， $\ln(1 - \frac{z}{\alpha_n})$ 的主支可表为

$$\ln(1 - \frac{z}{\alpha_n}) = -\frac{z}{\alpha_n} - \frac{1}{2}(\frac{z}{\alpha_n})^2 - \frac{1}{3}(\frac{z}{\alpha_n})^3 - \dots$$

取 $p_n(z) = \frac{z}{\alpha_n} + \frac{1}{2}(\frac{z}{\alpha_n})^2 + \dots + \frac{1}{m_n}(\frac{z}{\alpha_n})^{m_n}$ ，于是 $\gamma_n(z)$ 就可以表示为

$$\gamma_n(z) = -\frac{1}{m_n+1}(\frac{z}{\alpha_n})^{m_n+1} - \frac{1}{m_n+2}(\frac{z}{\alpha_n})^{m_n+2} - \dots$$

并可容易地得到下面的不等式

$$|\gamma_n(z)| \leq \frac{1}{m_n+1} \left(\frac{R}{|\alpha_n|} \right)^{m_n+1} \left(1 - \frac{R}{|\alpha_n|} \right)^{-1} \quad (2)$$

现在设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n+1} \left(\frac{R}{|\alpha_n|} \right)^{m_n+1} \quad (3)$$

收敛，那么有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(z) = 0$ ，而且由 (2) 式就可以看出级数

$\sum \gamma_n(z)$ 在 $|z| \leq R$ 绝对且一致收敛。因此乘积 (1) 就表示一

个在 $|z| < R$ 内的解析函数，在证明中我们必须将 $|\alpha_n| \leq R$ 的项排除掉，但这对于乘积 (1) 的一致收敛性在对应因子逐行加入时并不改变。

下面将说明对于所有的 R ，使得级数 (3) 收敛的这样的正整数到 $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ 是存在的。例如我们取

$m_n = n$ 。并使 $\left(\frac{R}{|\alpha_n|}\right) \leq \frac{1}{2}$ 则级数 (3) 的一般项

$$\frac{1}{m_{n+1}} \left(\frac{R}{|\alpha_n|}\right)^{m_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{R}{|\alpha_n|}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

显然这时 (3) 收敛。

这就证明了乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)^{m_n}}$ 收敛于一个整函数 $f(z)$

(ii) 因为在圆盘 $|z| \leq R$ 内， $f(z)$ 只能以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 为零点，因而在整个平面内 $f(z)$ 的零点是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ，而且不可能有其它的零点。

Weierstrass 定理：任何一个具有无限多个零点的整函数 $f(z)$ 都可以表示成如下形式： $(z=0$ 是 m 重零点，其余的零点是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)^{m_n}} \quad (4)$$

这里 $\alpha_n \neq 0$ ， m_n 为整数， $g(z)$ 是一个整函数。

证：根据已知条件，构造整函数

$$\phi(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{\alpha_n}\right)^{m_n}}$$

它 $\phi(z)$ 的一切零点为零点，所以商 $\frac{f(z)}{\phi(z)}$ 表示一个没有零点的整函数，从而

$$\frac{f(z)}{\phi(z)} = e^{g(z)}$$

这里 $g(z)$ 为一整函数，于是我们得到

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)^2 + \dots - \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)^{m_n}}$$

因为数 m_n 能有广泛的选择，所以这种表示式不是唯一的。

§ 2. 整函数的级与型

一、级与型的定义。

$f(z)$ 是已知整函数，又 $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ ，如果存在着

这样的函数 μ ，使对一切充分大的 r ，不等式

$$M(r) < e^{r^\mu}$$

成立，则 $f(z)$ 称为有限级的（在相反的情形下，称为无穷级的）。

所有使此不等式成立的 μ 的下确界 ρ 称为 $f(z)$ 的级 (Order)。

即

$$\rho = \inf \mu \geq 0$$

根据定义，对任何 $\varepsilon > 0$ ，不等式

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

当 $r > R(\varepsilon)$ 时成立，同时也存在着任意大的适当值 $r: r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ 满足不等式

$$M(r_n) > e^{r_n^{\rho-\varepsilon}}$$

从而推得

$$\frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} < \rho + \varepsilon \quad \text{当 } r > R(\varepsilon)$$

又有任意大的适当值

$$\frac{\ln \ln M(r_n)}{\ln r_n} > \rho - \varepsilon$$

$$\therefore \rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \quad (2.1.1)$$

这个公式可以用来作为整函数的级的定义。

若整函数 $f(z)$ 为有限级？，而且存在着正数 K ，有

$$M(r) < e^{Kr^\rho} \quad (2.1.2)$$

则称 $f(z)$ 为有限型函数。否则的话， $f(z)$ 称为无限型函数。

对于有限型函数，若对一切充分大的 r ，不等式 (2.1.2) 都成立的 K 的下确界，称为整函数的型，以 σ 表示之，即

$$\sigma = \inf K \geq 0$$

根据定义，对任何 $\varepsilon > 0$ ，在 $r > R(\varepsilon)$ 时，不等式

$$M(r) < e^{(\sigma + \varepsilon)r^\rho} \quad (2.1.3)$$

总成立；但另一方面，存在着任意大的适当值 $r: r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ 满足不等式

$$M(r_n) > e^{(\sigma - \varepsilon)r_n^\rho} \quad (2.1.4)$$

从不等式 (2.1.2) 和 (2.1.3) 推出

$$\frac{\ln M(r)}{r^\rho} < \sigma + \varepsilon \quad \text{当 } r > R(\varepsilon)$$

及

$$\frac{\ln M(r_n)}{r_n^\rho} > \sigma - \varepsilon$$

因此

$$\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^\rho} \quad (2.1.5)$$

这公式也可以作为整函数型的定义。

显然， e^z 是级 $\rho = 1$ 和型 $\sigma = 1$ 的整函数，至于 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

有
故

$$|\operatorname{sh} y| \leq |\sin z| \leq \operatorname{ch} y$$

$$\frac{e^r - 1}{2} < \operatorname{sh} r \leq M(r) = \max_{|z|=r} |\sin z| \leq \operatorname{ch} r = \frac{e^r + e^{-r}}{2} < \frac{e^r + 1}{2}$$

因而 $\rho = \sigma = 1$ 。 $\cos z$ 也有同样的 ρ 和 σ 的值。

二、整函数的级与型与 n 级数展开式的系数。

定理：设 $f(z)$ 为有限级整函数，且

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} = \rho \quad (2.2.1)$$

及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} = (e \rho \sigma)^{\frac{1}{\rho}} \quad (2.2.2)$$

ρ 为有限数是 $f(z)$ 的级， σ 是 $f(z)$ 的型

证：因 $f(z)$ 为有限级，故是当 $r > R = R(K, \mu)$ 时，有

$$M(r) < e^{K r^{\mu}} \quad (2.2.3)$$

这里 $\mu > \rho$ ；但对于 ρ 级和有限型 σ 的函数，则 $\mu = \rho$ ， $K > \sigma$ ，因而由哥西不等式，得

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} < \frac{e^{K r^{\mu}}}{r^n} \quad \text{当 } r > R.$$

命函数 $\frac{e^{K r^{\mu}}}{r^n}$ 的对数的导数（对 r 求导）等于零，便知

$r = \left(\frac{n}{\mu K} \right)^{\frac{1}{\mu}}$ 时，这函数有最小值 $\left(\frac{e \mu K}{n} \right)^{\frac{n}{\mu}}$ ，选择 $N = N(K, \mu)$ ，

使 $\left(\frac{N}{\mu K} \right)^{\frac{1}{\mu}} > R(K, \mu)$ ，当 $n > N$ 时，有 $r > R$ ，于是得：

$$|a_n| < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}; \quad \text{当 } n > N \quad (2.2.4)$$

所以不等式 (2.2.4) 是不等式 (2.2.3) 的推论。注意，对于整函数 $n\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 0$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 。因而 $\ln \frac{1}{n\sqrt[n]{|a_n|}} \rightarrow +\infty$ ，再由 (2.2.4) 得

$$\mu > \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{n\sqrt[n]{|a_n|}}} + \frac{\ln \frac{1}{e\mu K}}{\ln \frac{1}{n\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

故

$$\mu \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{n\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

因为能取任何大于 ρ 的数当作 μ ，故知

$$\rho \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{n\sqrt[n]{|a_n|}}} \quad (2.2.5)$$

所以对于有限级 ρ 的整函数，数值

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{n\sqrt[n]{|a_n|}}} = \rho$$

也是有限的，且不超过 ρ 。

若进一步设 $f(z)$ 是有限型 σ 的整函数，则在 (2.2.3) 中可令 $\mu = \rho$ 。并能取任意的 $K > \sigma$ 。用这样的 μ 与 K ，便从 (3.2.4) 得到

$$n^{\frac{1}{\rho}} n\sqrt[n]{|a_n|} < (e\rho K)^{\frac{1}{\rho}}$$

故

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho}} n\sqrt[n]{|a_n|} \leq (e\rho K)^{\frac{1}{\rho}}$$

因为可取任何 $K > 0$, 故得

$$(e \int \sigma)^{\frac{1}{s}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{s}} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (2.2.6)$$

所以, 对于有限级 ρ 和有限型 σ 的整函数, 数值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{s}} \sqrt[n]{|a_n|} = \beta$$

也是有限的, 且不超过 $(e \int \sigma)^{\frac{1}{s}}$

现在证明:

$$\alpha = \rho \quad \beta = (e \int \sigma)^{\frac{1}{s}}$$

如果对函数 $f(z)$ 不作任何假定, 只设不等式

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \left(\frac{e \mu K}{n} \right)^{\frac{1}{\mu}} \quad \text{当 } n > N$$

对某些正数 μ 与 K 成立。因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, 即 $f(z)$ 是一整函数, 且对任何 $\gamma > 0$ 与 $n > N$ 有

$$\sqrt[n]{|a_n|} \gamma^n < \left(\frac{e \mu K}{n} \right)^{\frac{1}{\mu}} \gamma$$

这个不等式的右边在 $n > [2^{\mu} e \mu K \gamma^{\mu}] = n(\gamma)$ 时小于 $\frac{1}{2}$ 。

选择 $R > 1$, 且使 $\gamma > R$ 时有 $n(\gamma) = [2^{\mu} e \mu K \gamma^{\mu}] > N$ 成立。

对于这样的 γ 及 $n > n(\gamma)$ 时, 我们恒有

$$\sqrt[n]{|a_n|} \gamma^n < \frac{1}{2} \quad \text{即 } |a_n| \gamma^n < \frac{1}{2^n}$$

成立。

于是

$$\begin{aligned} M(\gamma) &= \max_{|z|=\gamma} |f(z)| = \max_{|z|=\gamma} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \gamma^n = \sum_{n=0}^{n(\gamma)} |a_n| \gamma^n + \sum_{n=n(\gamma)+1}^{\infty} |a_n| \gamma^n, \end{aligned}$$

因而, 当 $\gamma > R$ 时,

$$M(\gamma) \leq \sum_{n=0}^{n(\gamma)} |a_n| \gamma^n + \sum_{n=n(\gamma)+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \sum_{n=0}^{n(\gamma)} |a_n| \gamma^{n+1}.$$

但,

$$\begin{aligned} \sum_0^{n(r)} |a_n| r^n &= \sum_0^N |a_n| r^n + \sum_{N+1}^{n(r)} |a_n| r^n \\ &< r^N \sum_0^N |a_n| + [n(r) - N] \max_{n=N+1, \dots, n(r)} |a_n| r^n \end{aligned}$$

因为 $\max_{N+1 \leq n \leq n(r)} |a_n| r^n \leq \max_{N+1 \leq n} |a_n| r^n$ 和 $n \geq N+1$ 时, 不等式 (3.2.4) 成立, 所以有

$$\begin{aligned} \max_{N+1 \leq n \leq n(r)} |a_n| r^n &\leq \max_{N+1 \leq n} \left(\frac{e^{\mu K}}{n} \right)^{\frac{n}{\mu}} r^n \\ &\leq \max_{1 \leq n} \left(\frac{e^{\mu K}}{n} \right)^{\frac{n}{\mu}} r^n. \end{aligned}$$

容易求出: $\max_{1 \leq n} \left(\frac{e^{\mu K}}{n} \right)^{\frac{n}{\mu}} r^n = e^{K r^\mu}$ (在 $n = \mu K r^\mu$ 时达到);

$$\therefore \max_{N+1 \leq n \leq n(r)} |a_n| r^n \leq e^{K r^\mu}$$

且

$$M(r) < r^N \sum_0^N |a_n| + [n(r) - N] e^{K r^\mu} + 1$$

$$< r^N \sum_0^N |a_n| + (2^\mu e^{\mu K} r^\mu - N) e^{K r^\mu} + 1$$

$$\leq e^{K r^\mu} (2^\mu e^{\mu K} r^\mu - N + r^N e^{-K r^\mu} \sum_0^N |a_n|) + e^{-K r^\mu}$$

显然, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 当 r 充分大时, 括号内的式子小于 $e^{\varepsilon r^\mu}$, 因此

$$M(r) < e^{(K+\varepsilon)r^\mu} \quad \text{当 } r > R'(\varepsilon) > R \quad (2.2.7)$$

这就证明了: “如果 $|a_n| < \left(\frac{e^{\mu K}}{n} \right)^{\frac{n}{\mu}}$ 那么就有 $\max_{|z|=r} |f(z)|$ ”

$$= M(r) < e^{(K+\varepsilon)r^\mu}, \quad \text{当 } r > R'(\varepsilon) > R \text{ 时成立.}”$$

现在假定 $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$ 为有限数, 于是对任何 $\mu > \lambda$,

那么存在着 $n(\mu)$ ，当 $n > n(\mu)$ 时，有

$$\frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} < \mu$$

或

$$|a_n| < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}$$

那么根据前面已证的结论，就有

$$M(r) < e^{(\frac{1}{e\mu} + \varepsilon)r^\mu}$$

故函数 $f(z)$ 的级 $\rho < \mu$ 恒成立，又因为 μ 是大于 α 的任何数。

故

$$\rho \leq \alpha$$

同前面的 (3.2.5) 合併，使得

$$\rho = \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} \quad (2.2.8)$$

我们已经证明了：若 α 和 ρ 中有一数是有限，则其余一个也是有限。换句话说，关系式 (2.2.8) 对于无限级函数也正确。

若 n 级数的系数非但使 α 是有限数，且使 $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|}$ 也是有限数，那么以 $(e \rho \sigma)^{\frac{1}{\rho}} = \beta$ ，即令 $\sigma' = \frac{\beta \rho}{e \rho}$ ，则对任何 $K > \sigma'$ ，当 $n > n(K)$ ，便有

$$n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} < (e \rho K)^{\frac{1}{\rho}}$$

或

$$|a_n| < \left(\frac{e \rho K}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}$$

这又是 (3.2.4) 型的不等式，引用已证的结果，得到

$$M(r) < e^{(K+\varepsilon)r^\rho} \quad \text{当 } r > R(\varepsilon).$$

因函数 $f(z)$ 是 ρ 级, 从这个不等式知道 $f(z)$ 的型 σ 是有限数。

且

$$\sigma \leq K$$

再由于 K 是大于 σ 的任何数, 便知

$$\sigma \leq \sigma' = \frac{\beta^{\rho}}{e^{\rho}}$$

即

$$(e^{\rho} \sigma)^{\frac{1}{\rho}} \leq \beta.$$

和前面已证: $(\sigma e^{\rho})^{\frac{1}{\rho}} \geq \beta$, 故

$$(\sigma e^{\rho})^{\frac{1}{\rho}} = \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[\rho]{|a_n|} \quad (2.2.9)$$

根据上面的研究, 推知公式 (2.2.9) 对于有限级, 无限型的函数也是正确的。

三、整函数在角形区域内的性状

函数 $M(r)$ 虽能确定整函数 $f(z)$ 在全平面内的增长, 但 $f(z)$ 在某一角形区域内的性状却不能给予任何知识。

例如指数函数 e^z ($\rho=1, \sigma=1$)。因为 $|e^z| = e^x = e^{r \cos \theta}$ 。

于是在 $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \theta < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) 所表示的每一角内, 函数的模满足条件 $e^{\varepsilon} > |e^z| > e^{r \sin \theta}$, 因而 $\rightarrow \infty$, 当 $r \rightarrow \infty$,

但在角: $\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \theta < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) 内, $|e^z| < e^{-r \sin \varepsilon}$ 。

因而 $e^z \rightarrow 0$ 当 $r \rightarrow \infty$ 。所以, 这里存在着这样的两个角 (即右半与左半平面)。其开度都是 π , 当一角 S 整个位于其中一角的内部时, $f(z)$ 在 S 内趋于 ∞ , 而 S 在另一角内部时 $f(z)$ 趋于零。

若知道有限级函数在某角边上的性状, 则它在这角内部性状, 可以从下面的弗拉格门 (Phragmén) —— 林德洛夫

(Lindelöf) 定理获得主要结果。

定理 1 (Phragmén — Lindelöf): 设 C 是一条简单闭曲线, 假定除了 C 上某点 p 而外, $f(z)$ 在 C 内及 C 上都是解析的。并且除了在 p 点上外, $|f(z)| \leq M$ 在 C 上总成立。

又假定有函数 $w(z)$, 它在 C 内及在 C 上解析, 恒不为零, 且在 C 内有 $|w(z)| \leq 1$, 又对任何给定的 $\varepsilon > 0$, 在 C 内总存在一组曲线, 它们能与 p 点任意接近, 且联接 p 点两侧的 C ; 又在这组曲线上

$$|\{w(z)\}^\varepsilon f(z)| \leq M$$

则对 C 内全体点都有 $|f(z)| \leq M$

证: 研究函数

$$F(z) = \{w(z)\}^\varepsilon f(z),$$

它在 C 内以及 C 上 (p 点除外) 处处解析, 命 z_0 是 C 内的任一点, 由 $w(z)$ 的假定, 必能找到一条环绕 z_0 的曲线, 在这条曲线上

$$|F(z)| \leq M$$

成立, 因此

$$|F(z_0)| \leq M$$

从而得

$$|f(z_0)| \leq M |w(z_0)|^{-\varepsilon}$$

命 $\varepsilon \rightarrow 0$, 就得

$$|f(z_0)| \leq M$$

这就证明了定理。

通过作辅助变换, 常能假定这种例外点 p 就是无穷远点, 于是上述定理就有以下的形式。

定理 2: 设 D 是以原点为顶点两条射线为边界并相交成 π/α 的角形区域 (如下页图), 假定 $f(z)$ 是在区域 D 内以及两条边界射线上都解析的函数, 又在这边界射线上有

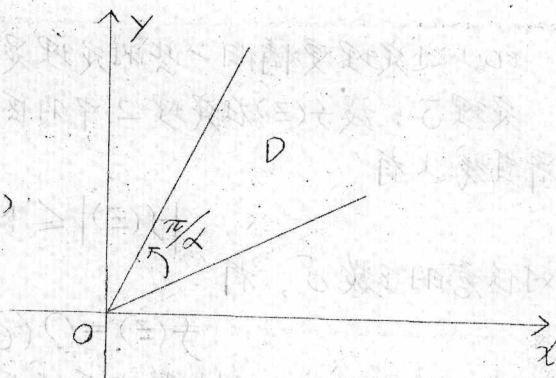
$$|f(z)| \leq M \quad (1)$$

且当 $r \rightarrow \infty$ 时, 在扇形
区域内一致地有

$$f(z) = O(r^\beta) \quad (2)$$

而 $0 < \beta < \alpha$, 则不等式

(1) 在整个区域 D 中都成立。



证: 不失一般性, 我们不妨假定这两直线就是 $\theta = \arg z = \pm \frac{1}{2} \pi / \alpha$, 命

$$F(z) = e^{-\varepsilon z^r} f(z),$$

这里 $\beta < r < \alpha$, $\varepsilon > 0$, 则有 ($z = re^{i\theta}$)

$$|F(z)| = e^{-\varepsilon r^r \cos r\theta} |f(z)| \quad (3)$$

因 $r < \alpha$, 故在射线 $\theta = \pm \frac{1}{2} \pi / \alpha$ 上 $\cos r\theta > 0$, 所以在这两射线

$$|F(z)| \leq |f(z)| \leq M.$$

又在圆 $|z| = R$ 的弧段 $|\theta| \leq \frac{1}{2} \pi / \alpha$ 上

$$|F(z)| \leq e^{-\varepsilon R^r \cos \frac{1}{2} r \pi / \alpha} |f(z)| \leq A e^{R^\beta - \varepsilon R^r \cos \frac{1}{2} r \pi / \alpha},$$

右方随 $R \rightarrow \infty$ 而趋于零, 故当 R 充分大时, 在这段弧上也有

$|F(z)| \leq M$. 因此由最大模原理, $|F(z)| \leq M$ 在区域

$|\theta| \leq \frac{1}{2} \pi / \alpha$, $r \leq R$ 的整个内部都成立; 又因 R 任意大, 所以它在整个区域 D 内都成立, 故由 (3) 式, 在 D 内有

$$|f(z)| \leq M e^{\varepsilon r^r}$$

命 $\varepsilon \rightarrow 0$, 就得欲证的结果。