经济应用数学(一)

微　　积　　分

彭文学　　李少斌　编
责任编辑　韩瑞根

武汉工业大学出版社

前　　言

本教材是为适应广播电视大学经济类各专业经济数学教学的需要而编写的。

随着数学应用于经济的日趋广泛，数学与经济之间的关系越来越密切。微积分作为经济类各专业的一门基础课，不仅要介绍微积分的基本知识，适当注意知识的系统性，以便使学员较全面地掌握微积分的基本概念和方法，这无疑是主要的。而且要注意知识的实用性，使学员初步了解将微积分应用于经济工作的意义、方法和途径。使之明瞭：数学不仅仅是单纯地作为经济工作的计算工具，而且更重要的是可作为经济工作的分析研究的工具。这种分析无论是定量的，还是定性的，都是具有启发性的。为此，在微积分应用于经济方面，我们作了一定的努力。在介绍微积分基本知识时，主要介绍基本概念和基本方法；同时，适当介绍某些基本概念在经济中的意义以及基本方法在经济中的应用。基本概念尽可能用几何意义来说明，基本方法的叙述尽可能详尽而又突出重点。在内容的叙述上，采取由特殊到一般的方法，在对具体实例分析的基础上再介绍一般的方法。尔后又通过一定量的例题叙述解题的基本方法和技巧。这样，举一反三，循序渐进，使之深入浅出，通俗易懂，便于自学。而微积分概念与方法在经济中的意义与应用，都以实际例子给出，结合具体的经济函数作适当的介绍。因而能起到扩展视野，激发学习兴趣，提高实际应用能力的作用。至于书中打“*”号的内容，可作为学有余力的同学课外阅读时参考。

本书第三、五章由彭文学同志执笔，第一、二、四章由李少斌同志执笔。编写过程中，得到湖北广播电视大学领导的关心和支持及其他有关同志的帮助，书稿承蒙中南财经大学周兆麟教授仔细审阅，并提出宝贵意见，借此一并致以深切的谢意。

编写适合经济类各专业需要的经济数学教材需要经验和时间。我们虽然作了一些努力，但仅仅是初步的。限于我们的水平，缺点错误等不妥之处在所难免，敬祈读者不吝指正，极为感盼。

编　　者

目　　录

第一章　函数与极限

微积分研究的问题和方法是什么？它与初等数学有什么联系和区别？如何在经济活动中应用微积分？所有这些问题，无疑都是大家开始学习这门课程时所关心的。这一章，作为整个课程的一个引论，目的是初步说明这些问题，引入函数和极限这两个微积分中的基本概念，为以后各章的学习作准备。

§ 1.1　函数概念

数学中讨论的量分为两类：常量和变量。在给定的问题中，不变的、保持一个值的量叫做常量；由于某种缘故变化着的、取不同值的量叫变量。在同一个问题中，还往往同时出现好几个变量，而这些变量又往往是相互联系的和相互依赖的。我们先看一些例子。

一　例

例 1　我们熟知圆的面积

$$S=\pi r^2 \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

式中r是圆的半径。圆的半径不同，圆的面积也就不同，而π在圆的面积计算中总是不变的。所以我们说，在这个给定的问题中，π 是常量，圆的半径r和圆的面积S都是变量，它们之间的相互关系是由上述公式确定的。

例 2　某个牌号的袖珍收音机，当售价为每个10元时，每天

可销售2000个，如果每个售价每降低0.2元，则可多销售 50 部，但每个的最低售价不得低于9元，则销量Q与单价P有如下关系

P	10	9.8	9.6	9.4	9.2	9.0
Q	2000	2050	2100	2150	2200	2250

当P在允许的降价范围内变化时，销售量Q也随之有一个确定的值与之对应，比如，当$P=9.4$（元）时，$Q=2000+50\times 3=2150$（个）

例3 某企业生产某种产品，根据对以往统计数据的分析，市场对这种产品的需求量Q与价格P有经验公式（略去物理量纲）

$$Q=10-2P \tag{1-1-2}$$

当价格是1时，市场对这种产品的需求是8，当价格由0升至5时，需求量从10下降到0。

例4 气象台为了掌握某地气温的变化，使用自动记录器将每天的气温记录下来，直接画出一条如图1－1所示的曲线。为了确定任一时刻t的气温，只须在横轴上找到与这个时刻相对应的点，然后经过这一点作纵轴的平行线，它与曲线的交点M的纵坐标就是这个时刻的气温。可见，这条曲线反映了气温T对时间t的依赖关系。这种关系是完全确定的，但却难于用一个或几个“解析式子”表出。

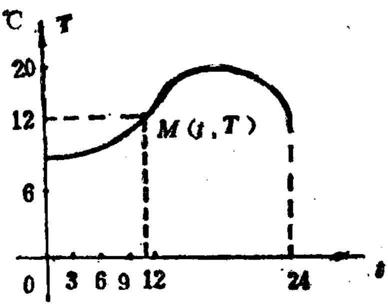


图1－1

上述各例，就其所包含的具体意义而言，有几何的、商业经营的、企业生产的、还有谈气象的，撇开各自的具体意义，其共

同本质是参与给定问题的变量之间是相互依赖的。这种依赖关系，就其外部表达形式而言，有的用“解析式子”表出，有的用列表和图象表出。撇开各自的表达形式，其共同本质是：当其中一个变量取定了一个数值时，那末按照某种确定的对应关系，就可以求得另一个变量的一个相应的值。函数的一般概念正是这样抽象出来的。

二　函数的一般概念

定义 1　设有两个变量x和y，变量x的变化范围为D，如果对于D中的每一个值x，按照某一种确定的对应关系，都可以确定变量y的一个相应值，我们就说变量y是变量x的一个函数，记为

$$y=f(x) \qquad x\in D$$

x称为自变量，y称为因变量，$x\in D$读作x属于D。

为了理解这个定义，说明以下几点。

1．函数关系

函数$y=f(x)$中的“f”代表从变量x到变量y的对应关系，称为函数关系。至于这种函数关系是什么，则是由具体问题决定的。在例1和例3中，函数关系是解析表达式(1-1-1)和(1-1-2)；在例2中，函数关系是一个表格；而在例4中，函数关系是由图1-1中的曲线所确定的。推而广之，一般函数关系通常都是由这三种形式给出的。

当自变量x取一定值时，因变量y的相应值叫做函数值。函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的函数值记为$f(x_0)$或$y\Big|_{x=x_0}$。比如对于例3中的函数$Q=f(P)=10-2P$，$Q\Big|_{P=2}=f(2)=10-2\times2=6$，表

示当价格$P=2$时需求量$Q=6$。

对于例2中的函数$Q\Big|_{P=9.6}=2100$，表示当价格$P=9.6$时的销售量为2100。

2．函数的定义域和值域

在函数定义中，自变量x的变化范围D称为函数的定义域。对于D中的每一个值x，都对应一个确定的函数值。所有函数值的全体，叫做函数的值域，它就是因变量的取值范围。

在实际问题中，函数的定义域根据实际意义来确定。在例1中，圆的半径不可能是负数和零，所以定义域是所有大于零的数。例3中价格不可能是负数，如果不考虑产品积压等因素，需求量也不可能是负数，因而价格不可能大于5，于是定义域是$0\leqslant t\leqslant 5$，例4中由曲线表示的函数的定义域是一天二十四小时，即$0\leqslant t\leqslant 24$。

当我们只是在数学上一般地研究某一由具体解析式所规定的函数关系时，函数的定义域则由解析式本身确定。例如$y=\dfrac{1}{x}$的定义域为不等0的实数，即$x\neq 0$；函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是$-1\leqslant x\leqslant 1$；函数$y=\lg(x-2)$的定义域是$x>2$。

一般地，在确定函数定义域时，下面几点是应该注意的。

（1） 函数式里如果有分式，其分式的分母不能为零；

（2） 函数式里如有偶次根式，则根号里的整个式子要大于等于零；

（3） 函数式里如有对数式，其真数要为正；

（4） 函数式里如有正切函数或余切函数，则在正切、余切

符号下的式子的值分别不能等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\pi$，（$k=0$，±1，±2，…）

（5） 函数式里如有反正弦或反余弦函数，反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值须小于等于1；

（6） 如果函数的表达式由若干项组成，则它的定义域是各项定义域的公共部分。

例5 试确定函数$y=\ln(1-x^2)+\sqrt{x}$的定义域

解 此函数第一项$\ln(1-x^2)$的定义域是满足不等式

$$1-x^2>0$$

的值，解此不等式得 $-1<x<1$。

第二项$\sqrt{x}$的定义域是$x\geqslant0$

两者的公共部分$0\leqslant x<1$为所求函数的定义域。

函数的定义域也通常用区间来表示，所谓区间是指介于某两个实数之间的所有实数，而那两个实数叫做区间的端点。

设a和b为两个实数，且$a<b$，满足不等式

$$a<x<b$$

的实数x的全体叫做开区间，用记号(a, b)表示。

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$

的实数x的全体叫做闭区间，用记号$[a, b]$表示。

满足不等式 $a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$

的实数x的全体叫半开半闭的区间，用记号$[a, b)$或$(a, b]$表示。

在数轴上，区间是介于某两个点之间的一段线段上点的全体，这两个点是这个区间的端点，网点间的距离称为区间的长度，例如上述各个区间的端点是点a与点b，长度都是$b-a$。

除了有限区间外，还有以下各类无限区间：

$(-\infty, +\infty)$表示满足不等式$-\infty<x<+\infty$的实数全体；

$(a, +\infty)$表示满足不等式$x>a$的实数x的全体；

$(-\infty, a)$表示满足不等式$x<a$的实数x的全体。

符号“$-\infty$”、“$+\infty$”和“∞”分别读成负无穷大、正无穷大和无穷大。它们不能作为数看待，不能象数那样运算。以后将会看到，它们反映了变量变化发展的一种趋势。

有了区间的记号，例1中的函数的定义域可以写成$r\in(0, +\infty)$；例3中函数的定义域可以写成$P\in[0, 5]$，例5中函数的定义域可以写成 $x\in[0, 1)$ 上述其它例中函数的定义域都可类似表示。

3.记号

在函数定义中，对应关系用“f”表示，其实它也可以用别的字母符号来表示，比如用g、h、y等等来表示，y是x的函数也可以记为

$$y=g(x)、y=h(x)、y=y(x)\text{ 等。}$$

但应注意：在同一场合，为了不引起混淆，不同的函数应该用不同的记号表示。

确定一个函数，主要是对应关系和定义域。它们称为函数的二要素。至于自变量和因变量用什么记号来表示，那是无关紧要的。所以，只要定义域相同，而且f代表同一对应关系，则$y=f(x)$和$u=f(v)$就是同一个函数。

例如函数$y=x^2$，$x\in(-\infty, +\infty)$与函数 $u=v^2$ $v\in(-\infty, +\infty)$，虽然它们的记号不同，但它们的对应关系和定义域都相同，所以它们表示的是同一个函数。

例如函数$y=\lg x^2$与函数$y=2\lg|x|$，表面上看，它们的对应关系不同，其实它们是相同的。因为$y=2\lg|x|$可写为$y=\lg|x|^2=\lg x^2$，而且它们的定义域相同（x可以取不等于零的任

意数），所以它们表示同一个函数。但是函数 $y=\ln x^2$ 与函数 $y=2\ln x$ 就不再是相同的函数，前一个函数的定义域是非零的实数，后一个函数的定义域是所有大于零的实数。

当然，同一个函数的自变量和因变量是不能用同一个记号的。例如决不能将 $y=\sqrt{x}$ 写成 $x=\sqrt{x}$，从方程的意义上看，$y=\sqrt{x}$ 表示的是二元方程，$x=\sqrt{x}$ 表示的是一元方程，它们显然是不同的。

4.单值函数与多值函数

在上述函数定义中，规定对于每个$x\in D$，有且仅有y的一个值与之对应。符合这样定义的函数称为单值函数。若对于每个$x\in D$，有 y 的多个值与之对应，把符合这种情形的函数称为多值函数。以后我们涉及和讨论的函数一般都是指单值函数。

§1.2 函数的图象与性质

一 函数的图象

上节中的例4表明，从平面上一条曲线（对这条曲线应该要求：与纵轴平行的直线与此曲线的交点不能多于一个）可以引出一个函数。现在要谈的是它的反面：给定了一个函数，也一定对应一条图象曲线。

一般地说，如果函数 $y=f(x)$是定义在 D 上的一个函数，在平面上引进坐标系xoy，对于 D 中的每一个 x_0，都可以确定平面上一点$M(x_0, y_0)$，其中$y_0=f(x_0)$。让 x_0取遍 D 中所有值，点$M(x_0, y_0)$的集合便形成平面上的一个图形。这个图形称为函数$y=f(x)$的图象（图1-2）。

对于上一节例1中的函数 $S=\pi r^2$，如果不考虑 r 是圆的半

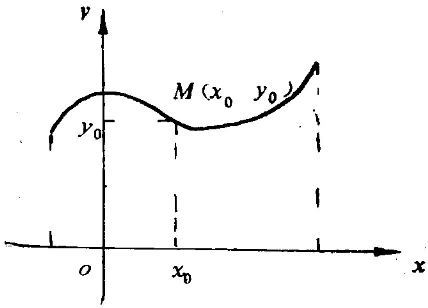


图1-2

径，而是任意实数，则其图形是过原点的二次抛物线。在这个实际问题中由于r只能取正数，其图形只是二次抛物线在第一象限的部分（图1-3)。例2中由表格给出的函数，其图象是一些离散

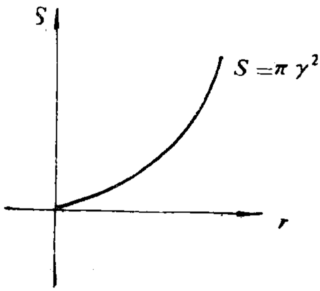


图1-3

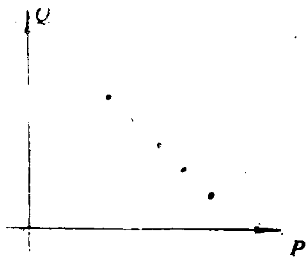


图1-4

的点（图1-4）。例3中的函数$Q=10-2P$是一条线段。

用图象表示函数，使我们有可能运用几何方法来研究运动和变化的过程。应该强调指出，几何图形直观，对于理解微积分中的概念、方法和结论，及其在经济方面的分析都是十

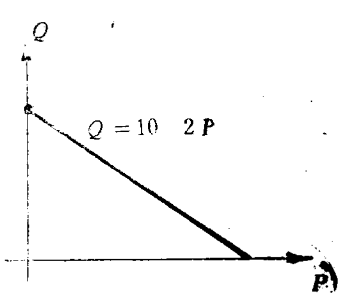


图1-5

分重要的。这一点大家务必一开始就充分注意到。

下面我们就结合函数的图形，介绍函数的几个性质。

二　函数的性质

1．函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$，$x\in(-a, a)$，对于任意 $x\in(-a, a)$ 若 $f(-x)=f(x)$，则称函数$f(x)$是偶函数；若$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$是奇函数。讨论函数的奇偶性时，函数的定义域是关于原点的对称区间。

例如函数 $f(x)=x^2$是$(-\infty, +\infty)$上的偶函数，

事实上，对于任意 $x\in(-\infty, +\infty)$

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$

函数$f(x)=x^3$是$(-\infty, +\infty)$上的奇函数，

事实上，对于任意 $x\in(-\infty, +\infty)$

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$$

类似地 $f(x)=\sin x$是$(-\infty, +\infty)$上的奇函数；

$f(x)=\cos x$是$(-\infty, +\infty)$上的偶函数。

由于偶函数在x和$-x$处的函数值相等，所以其图形对称于y轴（图1-6）。

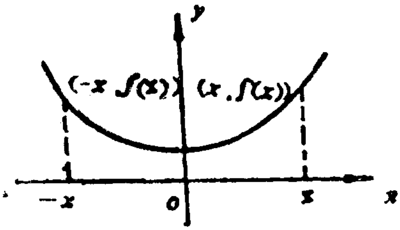


图1-6

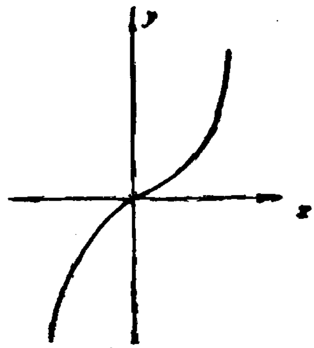


图1—7

由于奇函数在x和$-x$处的函数值绝对值相等、符号相反，所以其图形对称于原点（图1-7），把右半平面的图形绕原点旋转180°后，恰与左半平面的图形重合。

2．函数的单调性

对于函数$y=f(x)$，$x\in(a,b)$，若对于任意x_1，$x_2\in(a, b)$，当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间(a, b)内为单调增加的；若对于任意x_1，$x_2\in(a, b)$，当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间(a, b)内为单调减少的。

单调增加或单调减少的函数都称为单调函数，(a, b)称为这个函数的单调区间。

例如函数$f(x)=x^2$在$(-\infty, 0)$内是单调减少的，在$(0, +\infty)$内是单调增加的。

因为对于任意x_1，$x_2\in(-\infty, 0)$

若$x_1<x_2<0$，则$x_1^2>x_2^2$，即$f(x_1)>f(x_2)$。所以函数$f(x)=x^2$在$(-\infty, 0)$内是单调减少的。

对于任意x_1，$x_2\in(0, +\infty)$

若$x_1>x_2>0$，则$x_1^2>x_2^2$，即$f(x_1)>f(x_2)$。所以函数$f(x)=x^2$在$(0, +\infty)$内是单调增加的。

单调增加函数的图形是随着x增加而向右上升的，单调减少函数的图形是随着x增加而向右下滑的（图1-8）。

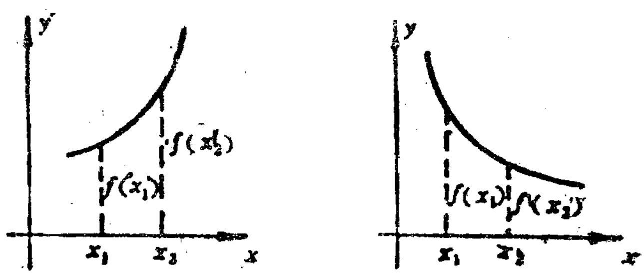


图1-8

3．函数的周期性

对于函数$y=f(x)$，$x\in D$，若存在常数$l>0$，对于任意$x\in D$，有$f(x+l)=f(x)$，则称函数$y=f(x)$是周期函数，满足上面等式的最小正数l叫做函数$f(x)$的周期。

周期函数图形的特点是自变量每增加或减少一固定的距离（即周期）之后，其图形重复出现（图1-9）。

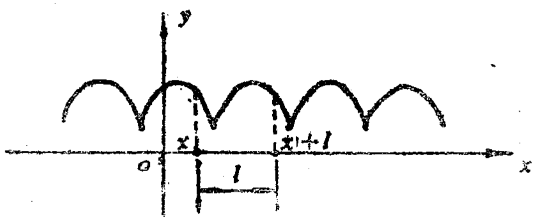


图1-9

函数$y=\sin x$，$y=\cos x$是以2π为周期的周期函数，$y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$是以π为周期的周期函数。

4．函数的有界性

对于函数$y=f(x)$，$x\in D$，若存在常数$M>0$，对于任意$x\in D$，都有

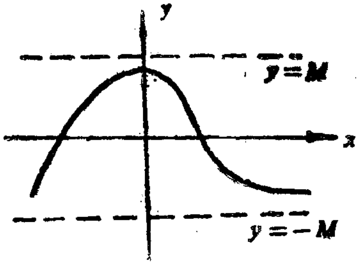
$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数$f(x)$在D内是有界的，否则称$f(x)$在D内无界。

例如函数$y=\sin x$，$\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，因为对于任意$x\in(-\infty,+\infty)$

$$|\sin x|\leqslant 1 \qquad |\cos x|\leqslant 1$$

若函数$f(x)$在D内有界，则存在两条平行于横坐标轴的直线$y=M$，$y=-M$，$f(x)$的图形夹在这两条直线所界定的带形区域内，如图1-10中的左图所示



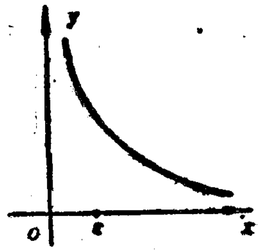


图1-10

由函数 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 的图形(图1-10右)可以看到：当 $\varepsilon>0$ 时，此函数在 $(0, \varepsilon)$ 内是无界的，但在 $[\varepsilon, +\infty)$ 内是有界的。因此函数是否有界，不仅与函数关系有关，而且还与自变量的取值范围有关。

§1.3 反函数 复合函数 初等函数

一 反函数

在函数的定义中有两个变量，一个叫自变量，一个叫因变量，一主一从，地位不同。然而在实际问题中，谁是自变量，谁是因变量，并不是绝对的，它们是可以依所研究的具体问题而转化的。

在§1.1的例3中，需求量Q与价格P的关系是

$$Q=10-2P$$

P是自变量，Q是因变量。

如果反过来，从该产品市场的需求量Q来确定价格P，则应从上式将P解出：