普通高等学校基础课辅导用书

高等数学——习题解析与练习

朱惠健　金　健　主编

南京大学出版社

普通高等学校基础课辅导用书

高等数学——习题解析与练习

朱惠健 金 健 主 编

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:习题解析与练习 / 朱惠健,金健主编.
—南京:南京大学出版社,2009.8
普通高等学校基础课辅导用书
ISBN 978-7-305-06216-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①朱… ②金… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 093929 号

出 版 者 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　　邮编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左 健

丛 书 名 普通高等学校基础课辅导用书
书　　名 高等数学——习题解析与练习
主　　编 朱惠健 金 健
责任编辑 吴 华　　　编辑热线 025-83592146
照　　排 南京玄武湖印刷照排中心
印　　刷 宜兴市文化印刷厂
开　　本 787×1 092 1/16 印张 14.75 字数 376 千
版　　次 2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 1～3 000
ISBN 978-7-305-06216-2
定　　价 26.00 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

前言

《高等数学——习题解析与练习》是根据“高等数学”课程教学大纲和全国高校工科数学课程教学指导委员会制定的“高等数学课程教学基本要求”，结合近几年来学生的学习现状和专业课程对高等数学课程的教学要求，由我校组织一批有丰富教学经验教师编写而成的.《高等数学——习题解析与练习》以课程章节中的每一相关内容为一讲，集每一讲的主要教学内容、教学要求、重点例题和课后习题为一体，供学生在每一次课后复习、练习之用. 编写此书的目的是方便学生学好高等数学，提高学习效率，加深对所学内容的印象，及时巩固学习成果，尽可能帮助每一名学生达到“高等数学”课程教学的基本要求. 在编写《高等数学——习题解析与练习》时，编者充分考虑到课程的基本要求，主要教学内容、教学要求始终围绕高等数学课程教学大纲，用通俗语言总结了定义、定理、公式和概念；在重点例题部分精心选择和设计了例题，不但有详细解答，还配有分析或解题要点；课后习题以基本概念题、基本运算题和应用题为主，基本做到少而精，习题分布体现了强化基础、注意覆盖面、注重计算能力训练的特点.

《高等数学——习题解析与练习》的第二章、第四章、第五章、第六章和第一章部分内容由朱惠健老师编写，第七章、第八章、第九章、第十章由金健老师编写，第十一章、第十二章由张树来老师编写，第一章部分内容和第三章由顾建军老师编写. 朱惠健老师和金健老师认真审阅了全书，对不足之处进行了弥补和修改. 李昕老师给出了部分习题的参考答案，张立老师认真阅读了全书，并作了部分修改. 在本书的写作过程中，得到了常熟理工学院数学系领导和老师的热情指导和大力帮助，在此表示衷心的感谢. 虽然各位编者力求完美，但由于水平所限，难免还存在不足之处，敬请读者在使用过程中批评指正.

编　者

2009 年 4 月 30 日

目　录

第一章

函数、极限和连续

第一讲　函数的概念与性质

主要内容

一、函数的定义

设有两个变量 x,y,D 是一个给定的数集，如果对于任意的 $x\in D$，按照一定的法则总有确定的数值 y 与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作：$y=f(x)$. 数集 D 称为函数的定义域.

二、函数的图像

平面点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图像，一般为平面上的一条曲线.

三、反函数定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，若对任意的 $y\in W$，在 D 上可以确定 x 与 y 对应，且满足 $y=f(x)$，则称新函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯记为 $y=f^{-1}(x)$.

四、复合函数定义

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域 $W_2=\{u\mid u=\varphi(x),x\in D_2\}\subset D_1$，则消去 u 后所得 y 与 x 的函数关系 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其中 u 称为中间变量.

五、函数的几种特性

有界性：若存在常数 $M>0$，使得对任一 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间

D 内有界,否则称 $f(x)$ 无界.

单调性:若对区间 D 内任意的 $x_1 < x_2$,总有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 D 内单调增加(或减少).

奇偶性:若对区间 D 内任意的 $x \in D$,总有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若对任意的 $x \in D$,总有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数,奇(偶)函数的图像关于原点(y 轴)对称.

周期性:若存在常数 $l \neq 0$,使得当 $x \in D$ 且 $x+l \in D$,都有 $f(x+l) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为以 l 为周期的周期函数,一般规定最小的正数 l 为周期.

六、初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的,用一个解析式表达的函数称为初等函数. 分段函数、绝对值函数等称为非初等函数.

教学要求

- 熟练掌握函数定义,会求函数的表达式、定义域和函数值,掌握分段函数的表达式和作图方法.
- 理解函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性的概念,会判断一般函数的这些特性.
- 掌握复合函数和反函数的概念.
- 了解初等函数的概念,熟练掌握基本初等函数的性质及图形.

重点例题

例 1-1-1 $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x \leqslant 1 \\ x^2 & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$,$g(x) = \ln x, x \in (0, +\infty)$,试求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)] = f(u)\big|_{u=g(x)} = \begin{cases} 2u & 0 < u \leqslant 1 \\ u^2 & 1 < u \leqslant 2 \end{cases}\Bigg|_{u=\ln x}$

$$= \begin{cases} 2\ln x & 0 < \ln x \leqslant 1 \\ (\ln x)^2 & 1 < \ln x \leqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} 2\ln x & 1 < x \leqslant \mathrm{e} \\ (\ln x)^2 & \mathrm{e} < x \leqslant \mathrm{e}^2 \end{cases}.$$

$$g[f(x)] = g(u)\big|_{u=f(x)} = \ln u\big|_{u=f(x)} = \begin{cases} \ln 2x & 0 < x \leqslant 1 \\ \ln x^2 & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}.$$

例 1-1-2 设函数 $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,求 $f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,$\dfrac{1}{f(x)}$.

解 $$f(0) = \frac{1-0^2}{1+0^2} = 1; f(-x) = \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)^2}{1+(x+1)^2}=\frac{-x^2-2x}{x^2+2x+2};f(x)+1=\frac{1-x^2+1+x^2}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2};$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2-1}{x^2+1}\quad(x\neq 0);\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}=\frac{1+x^2}{1-x^2}\quad(x\neq\pm 1).$$

【点评】 当函数 $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 时，不管 $f(x)$ 中的 x 为何种形式，$f(x)$ 解析式中的 x 也为此种形式.

例 1-1-3 设 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

解 选 B.

【分析】 直接验算而得：因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ 且 e^x 是单调增函数，所以 $|e^{\sin x}|\geqslant e^{-1}$；而 x 和 $\tan x$ 都是无界函数，所以对于任意给定的正数 M，都存在 $x_0>1$，使得 $|x_0\tan x_0|>Me$，从而 $|f(x_0)|\geqslant|x_0||\tan x_0|e^{-1}>M$，故 $f(x)$ 是无界函数.

例 1-1-4 已知函数 $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$，求 $f(x)+f\left(\frac{2}{x}\right)$的定义域.

解 因为 $f(x)$ 的定义域为 D_1：$|x|<2$，所以 $f(2/x)$ 应有 $|2/x|<2\Rightarrow|x|>1$，即 $f(2/x)$ 的定义域为 D_2：$|x|>1$. 故所求定义域 $D=D_1\cap D_2$：$(-2,-1)\cup(1,2)$.

例 1-1-5 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=2x+\frac{3}{x}$ 且 $f(0)=0$，$|a|\neq|b|$，证明 $f(x)$ 为奇函数.

证明 由于
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=2x+\frac{3}{x},\qquad ①$$
则
$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{2}{x}+3x.\qquad ②$$
式①$\times a-$②$\times b$ 得
$$(a^2-b^2)f(x)=(2a-3b)x+(3a-2b)\frac{1}{x},$$
从而
$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left[(2a-3b)x+(3a-2b)\frac{1}{x}\right].$$
因为 $a^2-b^2\neq 0$，且 $2a-3b$，$3a-2b$ 不同时为零，又 $f(0)=0$，故
$$f(-x)=-\frac{1}{a^2-b^2}\left[(2a-3b)x+(3a-2b)\frac{1}{x}\right]=-f(x),$$
从而 $f(x)$ 为奇函数.

【点评】 要证明 $f(x)$ 为奇函数，只要证 $f(-x)=-f(x)$ 即可，为此首先要找出函数 $f(x)$ 的表达式，再证 $f(-x)=-f(x)$ 即可.

例 1-1-6 设在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)>0$，且 $f(x+k)=1/f(x)(k>0)$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 为(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 周期函数　　D. 增函数

解 选C.

【分析】 因为 $f(x+2k)=1/f(x+k)=f(x)$,所以 $f(x)$ 是以 $2k$ 为周期的周期函数.

例 1-1-7 设 $f(x)$ 满足方程 $2f(x)+f(1/x)=a/x(x\neq 0,a$ 为常数),且 $f(0)=0$,求 $f(x)$ 的表达式.

解 因为 $x\neq 0$ 时,$1/x\neq 0$,故有

$$\begin{cases}2f(1/x)+f(x)=ax\\ 2f(x)+f(1/x)=a/x\end{cases},$$

消去 $f(1/x)$,得
$$3f(x)=\frac{2a}{x}-ax,$$

即
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(2-x^2)}{3x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

课后习题

一、选择题

1. $\varphi(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ x & |x|>1\end{cases}$,$f(x)=\sin x$,则 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,$\varphi[f(x)]=$(　　).

A. 1　　B. x　　C. $\sin x$　　D. 不存在

2. 下列函数中为奇函数的是(　　).

A. $y=x^2\tan(\sin x)$　　B. $y=x^2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

C. $y=\cos(\arctan x)$　　D. $y=\sqrt{2^x-2^{-x}}$

3. $f(x)=\begin{cases}\sin^3 x & -\pi\leqslant x<0\\ -\sin^3 x & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$,则此函数是(　　).

A. 单调减函数　　B. 周期函数　　C. 奇函数　　D. 偶函数

4. 若 $f(x-1)=x^2-x$,则函数 $f(x)=$(　　).

A. x^2+x　　B. $x(x-1)$

C. $(x-1)^2-(x-1)$　　D. $(x+1)(x-2)$

二、填空题

1. 设 $f(x)$ 的定义域为$[0,5]$,则 $f(x^2+1)$ 的定义域为__________.

2. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ 2+x & x>0\end{cases}$,$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ -x & x>0\end{cases}$,则 $g[f(x)]=$__________.

3. 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求 $f(x)=$__________.

4. 设 $\Phi(x)$ 与 $f(x)$ 互为反函数,求 $f(x-2)$ 的反函数__________.

三、解答题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$,$g(x)=e^x$,求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

2. 判断 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ $(-1<x<1)$ 的奇偶性.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\Phi(x) & -1\leqslant x<0 \\ \sqrt{x-x^2} & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$,求 $\Phi(x)$,使 $f(x)$ 在$[-1,1]$上是奇函数.

四、证明题

1. 证明定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任意函数可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

2. 设$f(x)$为$(-l,l)$内的奇函数,若$f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明$f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

参考答案

一、1. A　2. A　3. D　4. A

二、1. $[-2,2]$　2. $g[f(x)]=\begin{cases}2+x^2 & x<0 \\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$　3. x^2-2　4. $2+\Phi(x)$

三、1. $f[g(x)]=\begin{cases}1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x>0\end{cases}$, $g[f(x)]=\begin{cases}e & |x|<1 \\ 1 & |x|=1 \\ \dfrac{1}{e} & |x|>1\end{cases}$　2. 偶函数　3. 根据奇函数定义 $\Phi(x)=-\sqrt{-x-x^2}$

四、1. 提示：先待定一个奇函数和一个偶函数,再由奇偶条件求出两个待定函数.

2. 提示：可按单调函数的定义证明,注意利用函数的奇偶性.

第二讲　极限的概念及计算

主要内容

一、数列极限(ε-N 定义)

设对于数列$\{x_n\}$,如存在固定常数A满足:对任意$\varepsilon>0$,存在$N>0$,使当$n>N$时,恒有$|x_n-A|<\varepsilon$,则称A是数列$\{x_n\}$的极限或称$\{x_n\}$收敛于A,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A(n\to\infty)$.

二、在 x_0 点函数极限定义

设对任意$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称A为$f(x)$当$x\to x_0$时的极限或简称A为$f(x)$在x_0处的极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to x_0)$.

设对任意$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得当$0<x_0-x<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称A为$f(x)$在x_0处的左极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$或$f(x_0-0)=A$.

设对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$.

三、无穷小与无穷大

1. 无穷小与无穷大的定义

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$(或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$),则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时是无穷小,即以零为极限的变量称为自变量在某一变化过程的无穷小.

若当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$|f(x)|$ 无限增大,则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时是无穷大.

2. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的某个变化过程中,无穷大的倒数是无穷小,非零无穷小的倒数是无穷大.

3. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的和、差、积还是无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的乘积还是无穷小.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$,其中 α 为无穷小量,即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \alpha=0$.

(4) 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$.

四、极限存在准则

(1) 单调有界数列必收敛.

(2) (夹逼准则) 若在 x_0 的某一去心领域内,恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

五、极限四则运算

设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$.

(3) $\lim[kf(x)]=k\lim f(x)=kA$($k$ 为常数).

(4) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq0)$.

六、两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\quad\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

七、无穷小比较

设 α,β 是在同一自变量的变化过程中的无穷小.

(1) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=0$,则称 α 是 β 的高阶无穷小,记 $\alpha=o(\beta)$.

(2) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称 α 是 β 的低阶无穷小.

(3) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=C\neq 0$,则称 α 是 β 的同阶无穷小.

(4) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta^k}=C\neq 0$,则称 α 是 β 的 k 阶无穷小($k>0$).

(5) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=1$,则称 α 是 β 的等阶无穷小,记为 $\alpha\sim\beta$.

常用的等价无穷小:当 $x\to 0$ 时,

$\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $e^x-1\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$, $1-\cos x\sim \dfrac{x^2}{2}$, $\ln(1+x)\sim x$, $(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x$($\alpha$ 为实数).

教学要求

➢ 掌握数列的基本概念,理解数列极限的定义,会利用数列极限的定义和性质证明简单数列的极限.

➢ 理解函数极限的定义,了解函数极限的性质,会利用函数极限的定义和性质证明简单函数的极限.

➢ 会求函数在一点处的左、右极限,了解函数在一点处极限存在的充要条件.

➢ 熟练掌握函数极限的运算法则和两个重要极限,会计算各种函数的极限.

➢ 理解等价无穷小概念,会进行无穷小比较,熟练掌握利用无穷小概念计算极限的方法.

重点例题

例 1-2-1　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})&=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.\end{aligned}$$

【点评】　对于 $\infty-\infty$,一般先采用通分、有理化等方法化简,然后再求极限.

例 1-2-2　设 $f(x)=\begin{cases}5-3x & x<1\\ 3-x & 1\leqslant x<2\\ x-5 & x\geqslant 2\end{cases}$,考察极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解　$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(5-3x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)=2$,

所以
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3-x) = 1, \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x-5) = -3,$$

所以$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 不存在.

【点评】 分段函数分界点处的极限,要用左右极限来求.

例 1-2-3 已知 $\lim\limits_{x\to +\infty}(5x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$,求 a 和 b.

解 $\lim\limits_{x\to +\infty}(5x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$,等式两边同除以 x 得

$$\lim_{x\to +\infty}\left(5-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=0,$$

所以
$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{a}=5, \quad a=25.$$

又
$$\lim_{x\to +\infty}(5x-\sqrt{25x^2+bx+1})=\lim_{x\to +\infty}\frac{-bx-1}{5x+\sqrt{25x^2+bx+1}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-b-\dfrac{1}{x}}{5+\sqrt{25+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{-b}{10}=2,$$

所以 $b=-20$.

例 1-2-4 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{7x^3+2x+1}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{3-0+0}{7+0+0}=\dfrac{3}{7}$.

【点评】 当 $x\to\infty$ 时,分式的极限可用公式:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m} & \text{当 } n=m\\ \infty & \text{当 } n>m\\ 0 & \text{当 } n<m\end{cases}$$

例 1-2-5 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\tan\dfrac{x}{2^n}$.

解
$$\lim_{n\to\infty}2^n\tan\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}x\frac{\tan\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}=x.$$

例 1-2-6 求极限$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sin(x-2)}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{\sin(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)\dfrac{x-2}{\sin(x-2)}=4\cdot 1=4$.

【点评】 第一个重要极限公式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$有多种变化形式,常见的有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin kx)^n}{(kx)^n}=1$,

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$（当$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$时），例 1-2-5、例 1-2-6 都用到第一个重要极限公式的变化形式.

例 1-2-7　求极限 $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}$.

令 $y=x-1$，则上式 $=\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e}$.

【点评】　第二个重要极限公式有变化形式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$（注意$\square$中为该过程下无穷大）和$\lim\limits_{x\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$（注意$\square$中为该过程下无穷小），本例利用第 2 种变化形式求出此极限.

例 1-2-8　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x+5}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2/x+1}\right)^{3x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot6}}=\mathrm{e}^{-6}.$$

【点评】　本例先分解出 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{5}=1$，再利用$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}}$求出极限.

例 1-2-9　已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$，求 a 值.

解　由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{2a}{x}\right)^{x}}{\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{2a}}{\mathrm{e}^{-a}}=\mathrm{e}^{3a}$,

所以 $\mathrm{e}^{3a}=8$，因此 $a=\ln2$.

例 1-2-10　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

解　$1+\cos x\to2(x\to0)$，$\ln(1+x)\sim x(x\to0)$.

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{2x}=\dfrac{3}{2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}+0=\dfrac{3}{2}$.

例 1-2-11　当 $x\to0$ 时，无穷小 $f(x)=\sin(\sin^2x)\cos x$ 与 $g(x)=3x^2+4x^3$ 是否同阶？是否等价？

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin^2x)\cos x}{3x^2+4x^3}$(因为 $x\to0$ 时,$\sin(\sin^2x)$ 与 $\sin^2x$ 等价)

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x\cdot\cos x}{3x^2+4x^3}=\lim_{x\to0}\cos x\frac{x^2}{x^2(3+4x)}=\lim_{x\to0}\cos x\frac{1}{3+4x}=\frac{1}{3},$$

所以,当 $x\to0$ 时,$f(x)$与 $g(x)$是同阶无穷小而非等价无穷小.

【点评】 利用等价无穷小求极限时,必须是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha\cdot f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\beta\cdot f(x)}{g(x)}$,$\alpha\sim\beta(x\to0)$,而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha+f(x)}{g(x)}\neq\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\beta+f(x)}{g(x)}$,这一点务必请注意.

例 1-2-12 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1$,

故由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

例 1-2-13 证明数列 $x_1=\sqrt{6}$,$x_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}$,$x_3=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$,$\cdots$ 的极限存在,并求极限值.

证明 运用数学归纳法证明此数列单调增加. 当 $n=1$ 时,

$$x_1=\sqrt{6}<\sqrt{6+\sqrt{6}}=x_2$$

成立;假定 $n=k$ 时,$x_k<x_{k+1}$,则当 $n=k+1$ 时,

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}<\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}.$$

故当 $n\geqslant1(n\in\mathbb{N})$ 时,$x_n<x_{n+1}$,此数列是单调增加的.

同理,由数学归纳法容易证明:对任意的自然数 n,都有 $x_n<3$,即数列有界,因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,令 $n\to\infty$,对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边同时取极限,得方程

$$a=\sqrt{6+a}\text{ 或 }a^2-a-6=0,$$

得 $a=3$ 或 -2(因为 $x_n>0$,所以将负根舍去),故极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

例 1-2-14 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}(x\neq0)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

课后习题

一、选择题

1. 设$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+bx+6}{1-x}=5$，$b=$(　　).

A. 5　　B. -7　　C. -5　　D. 7

2. 下列极限存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2^x-1}$　　C. $\lim\limits_{x\to0}2^{\frac{1}{x}}$　　D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$

3. 下列等式中错误的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$　　B. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

4. 极限$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{b}{x}}$　$(a\neq0,b\neq0)$的值为(　　).

A. 1　　B. $\ln\dfrac{b}{a}$　　C. $\mathrm{e}^{\frac{b}{a}}$　　D. $\dfrac{b}{a}\mathrm{e}$

5. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. ∞　　D. 不存在

6. 当$x\to0$时，$\sin x(1-\cos x)$是x^2(　　　)无穷小.

A. 高阶　　B. 低阶　　C. 同阶　　D. 等价

7. 若当$x\to x_0$时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$都是无穷小，则当$x\to x_0$时，下列表示式哪一个不一定是无穷小(　　).

A. $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$　　B. $\alpha^2(x)+\beta^2(x)$

C. $\ln[1+\alpha(x)\cdot\beta(x)]$　　D. $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$

二、填空题

1. 设当$x\to+\infty$时，$\sin\dfrac{1}{x^4}$与$\left(\dfrac{1}{x}\right)^k$是等价无穷小，则$k=$________.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}=$________.