大學叢書

投資數學

下册

褚鳳儀著

商務印書館發行

大學叢書

投資數學

下册

褚鳳儀著

(增訂本)

商務印書館發行

中華民國二十五年一月初版
中華民國三十六年四月增訂八版

◎(55352平)

大學叢書（教本）投資數學一冊

平裝每部定價國幣
20.00

印刷地點外另加運費

著作者　褚鳳儀
發行人　朱經農
上海河南中路
印刷所　商務印書館印刷廠
發行所　商務印書館
各地

附　錄　甲

數學原理

1. 二項式展開

二項式$(a+b)^n$即爲n個$a+b$連乘之積,求此連乘之積,名曰二項式展開(Binomial Expansion).二項式展開之公式如下:

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$a^{n-3}b^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{n-4}b^4+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(證明參看Fine所著之College Algebra 256頁)

例如:

$$(a+b)^2=a^2+\frac{2}{1}a\ b+\frac{2\times 1}{1\times 2}b^2=a^2+2\,ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+\frac{3}{1}a^2b+\frac{3\times 2}{1\times 2}ab^2+b^3=a^3+3\,a^2b+3\,ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4=a^4+\frac{4}{1}a^3b+\frac{4\times 3}{1\times 2}a^2b^2+\frac{4\times 3\times 2}{1\times 2\times 3}ab^3$$

$$+\frac{4\times 3\times 2\times 1}{1\times 2\times 3\times 4}b^4=a^4+4\,a^3b+6a^2b^2+4\,ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5=a^5+\frac{5}{1}a^4b+\frac{5\times 4}{1\times 2}a^3b^2+\frac{5\times 4\times 3}{1\times 2\times 3}a^2b^3$$

$$+\frac{5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4}ab^4+\frac{5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5}b^5$$

$$=a^5+5\,a^4b+10\,a^3b^2+10\,a^2b^3+5\,ab^4+b^5$$

2. e之數值

二項式$(a+b)^n$展開時,若n爲有限正整數,則展開式中之項數有限,反之,若n爲無窮大,則展開式中之項數亦爲無窮多.例如$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$之展開式,若$n$爲無窮大,則其項數爲無窮多,此無窮多項數總和之極限(Limit),卽作爲自然對數之底.故自然對數之底e,乃二項式$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$之極限,以公式表之如下:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(證) lim 爲極限之記號, ∞ 爲無窮大之記號.

應用公式(1),得:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\ \frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\left(\frac{1}{n}\right)^4$$

$$+\cdots\cdots=1+\frac{1}{1}+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot2}+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot2\cdot3}$$

$$+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots$$

若n爲無窮大,則$\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{4}{n}$ $\cdots\cdots$之極限均爲零

$$\therefore\quad e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

即　　$e=2.718281828459045\cdots\cdots$

(註) ! 爲階乘 (Factorial) 之記號, $3!=3\times2\times1$, $4!=4\times3\times2\times1$, 餘類推.

e 之數值, 若祇欲求至小數五位, 則可演算如下:

$$\begin{array}{l}1\\1\\0.5\\0.1666667\\0.0416667\\0.0083333\\0.0013889\\0.0001984\\0.0000248\\0.0000028\\0.0000003\\\hline 2.7182819\end{array}$$

$$e=2.71828$$

3. e^x 之數值

$$e^x=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

應用公式 (1) 得:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+\frac{nx}{1}\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3$$

$$+\frac{nx(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{4!}\left(\frac{1}{n}\right)^4+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{x}{1}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!}$$

$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)\left(x-\frac{3}{n}\right)}{4!}+\cdots\cdots$$

若 n 爲無窮大,則 $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{4}{n}$, 之極限均爲零.

$$\therefore\quad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(4)$$

4. a^x 之數值

令 $$a=e^c$$

$$\log_e a=c$$

應用公式(4),得:

$$a^x=e^{cx}=1+\frac{cx}{1}+\frac{c^2x^2}{2!}+\frac{c^3x^3}{3!}+\frac{c^4x^4}{4!}+\cdots\cdots$$

以 $\log_e a$ 代入上式中之 c, 得:

$$a^x=1+\frac{x}{1}\log_e a+\frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2+\frac{x^3}{3!}(\log_e a)^3$$

$$+\frac{x^4}{4!}(\log_e a)^4+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

5. 兩個 x 之多項式若爲恆等式,則兩邊 x 同冪之係數均相等,即

若 $$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} +b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_n \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{則}\quad a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \cdots\cdots\ a_n=b_n\cdots\cdots \end{array}\right\}(6)$$

(註) 若等式之兩邊,不論 x 之數值而常相等,則此等式名曰恆等式. $\equiv$ 為恆等式之記號.

(證) $(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+(a_2-b_2)x^{n-2}+\cdots\cdots$

$$+(a_{n-2}-b_{n-2})x^2+(a_{n-1}-b_{n-1})x+(a_n-b_n)\equiv 0$$

令 $$x=0$$

則 $$a_n-b_n=0$$

$$a_n=b_n$$

$$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+(a_2-b_2)x^{n-2}+\cdots\cdots$$

$$+(a_{n-2}-b_{n-2})x^2+(a_{n-1}-b_{n-1})x=0$$

以 x 除上式之兩邊,得:

$$(a_0-b_0)x^{n-1}+(a_1-b_1)x^{n-2}+(a_2-b_2)x^{n-3}+\cdots\cdots$$

$$+(a_{n-2}-b_{n-2})x+(a_{n-1}-b_{n-1})=0$$

令 $$x=0$$

則 $$a_{n-1}-b_{n-1}=0$$

$$a_{n-1}=b_{n-1}$$

同理可證 $$a_{n-2}=b_{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_2=b_2$$

$$a_1=b_1$$

$$a_0=b_0$$

6. $\log_e(1+y)$ 之值

令 $$a=1+y$$

$$\log_e a=\log_e(1+y)$$

應用公式(5), 得:

$$(1+y)^x=1+\frac{x}{1}\log_e(1+y)+\frac{x^2}{2!}[\log_e(1+y)]^2+\cdots\cdots$$

應用公式(1), 得:

$$(1+y)^x=1+\frac{x}{1}y+\frac{x(x-1)}{1\cdot2}y^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot2\cdot3}y^3+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad 1+\frac{x}{1}\log_e(1+y)+\frac{x^2}{2!}[\log_e(1+y)]^2+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{x}{1}y+\frac{x(x-1)}{1\cdot2}y^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot2\cdot3}y^3+\cdots\cdots$$

應用公式(6), 得:

$\therefore\quad \log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots\cdots$(恆等式兩邊 x 之係數相等)$\cdot\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(7)

令 $\qquad y=1$

則 $\qquad \log_e 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots$

令 $\qquad y=\frac{1}{2}$

則 $\qquad \log_e\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots$

即 $\quad \log_e 3=\log_e 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots$

令 $\qquad y=\frac{1}{3}$

則 $\qquad \log_e\frac{4}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots$

即 $\quad \log_e 4=\log_e 3+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots$

同理吾人可依次計算 $\log_e 5, \log_e 6, \log_e 7, \cdots\cdots$, 惟此式不便計算,蓋各項之絕對值雖漸次減少,然甚爲遲緩,故計算時須截取項數甚多.

以 $-y$ 代入公式(7)中之 y, 則得:

$$\log_e(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\cdots\cdots$$

令
$$\frac{1+z}{z}=\frac{1+y}{1-y}$$

則
$$y=\frac{1}{2z+1}$$

$$\log_e(1+z)-\log_e z=\log_e(1+y)-\log_e(1-y)$$

但
$$\log_e(1+y)-\log_e(1-y)=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\cdots\right)$$

$$=2\left[\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\cdots\cdots\right]$$

$$\therefore\ \log_e(1+z)=\log_e z+2\left[\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\cdots\cdots\right]\quad\cdots\cdots(8)$$

公式(8)中之各項遞降甚速,故較便於計算.

7. 每年複利次數若連續增加不絕,則實利率可自下列公式求得:

$$\underset{m\to\infty}{\alpha}=e^j-1\quad\cdots\cdots(9)$$

α 實利率

j 虛利率

m 複利次數

e 自然對數之底

(證) $$1+a=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{j}}\right)^{\frac{m}{j}}\right]^j$$

令 $$\frac{m}{j}=n$$

則 $$1+a=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^j$$

m 大至無窮大時，n 亦大至無窮大，故 $\lim\limits_{m\to\infty}(1+a)=\lim\limits_{n\to\infty}$

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^j=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^j$$

但 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \text{ ……………… (附錄甲公式2)}$$

$$\therefore \lim_{m\to\infty}(1+a)=e^j$$

卽 $$\underset{m\to\infty}{a}=e^j-1$$

連續複利之虛利率，名曰息力，以 δ 表示，故得:

$$a=e^{\delta}-1$$

8. 息力與實利率可自下列二公式求得:

$$\delta=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$a=\delta+\frac{\delta^2}{2!}+\frac{\delta^3}{3!}+\frac{\delta^4}{4!}+\cdots\cdots\cdots(11)$$

(證) $$1+a=e^{\delta}$$

$$\delta=\log_e(1+a)$$

但 $$\log_e(1+a)=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\cdots\cdots \text{ (附錄甲公式7)}$$

$$\therefore \quad \delta = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \cdots\cdots$$

$$a = e^{\delta} - 1$$

但　$$e^{\delta} = 1 + \frac{\delta}{1} + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \cdots\cdots\cdots \text{(附錄甲公式 4)}$$

$$\therefore \quad a = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \cdots\cdots$$

9. 複利終值若為複利現值之二倍,則複利時期可自下式求得其近似值:

$$n = \frac{0.693}{i} + 0.35 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

n 時期(單位計息期)

i 每計息期內利率

由(a6)
$\log_{10}(1+i) = \log_{10} e \log$

(證) 應用公式($b5$),得:

$$n = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10}(1+i)} = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e \log_e (1+i)} = \frac{0.301030 \times 2.302585}{\log_e(1+i)}$$

$$= \frac{0.693147}{\log_e(1+i)}$$

但　$$\log_e(1+i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \cdots\cdots\cdots \text{(附錄甲公式 7)}$$

$$\frac{1}{\log_e(1+i)} = \frac{1}{i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \cdots\cdots} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{i}{2} + \frac{i^2}{3} - \frac{i^3}{4} + \cdots\cdots}$$

$$= \frac{1}{i}\left(1 + \frac{i}{2} \mp \frac{i^2}{12} + \cdots\cdots\right)$$

$$\therefore \quad n = \frac{0.693147}{i}\left(1 + \frac{i}{2} \mp \frac{i^2}{12} + \cdots\cdots\right)$$

i小於一，故$i^2, i^3, i^4, \cdots\cdots$之數值甚小，若均略而不計，則得：

$$n=\frac{0.693147}{i}+\frac{0.693147}{2}$$

$$\therefore\quad n=\frac{0.693}{i}+0.35$$

10. 由實貼現率化虛貼現率，可應用下列公式，求其近似值.

$$f=\beta+\frac{m-1}{2m}\beta^2+\frac{2m^2-3m+1}{6m^2}\beta^3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

β 實貼現率

f 虛虛現率

m 每年運轉次數

（證）　$$f=m\left[1-(1-\beta)^{\frac{1}{m}}\right]=m\left[1-1+\frac{1}{m}\beta-\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{2}\beta^2\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{6}\beta^3-\cdots\cdots\right]$$

省去β^3以後各項，則得：

$$f=\beta-\frac{1-m}{2m}\beta^2+\frac{(1-m)(1-2m)}{6m^2}\beta^3$$

$$=\beta+\frac{m-1}{2m}\beta^2+\frac{2m^2-3m+1}{6m^2}\beta^3$$

11. 每年運轉次數若連續增加不絕，則實貼現率可自下列公式求得：

$$\underset{m\to\infty}{\beta}=1-e^{-f}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

β 實貼現率

f 虛貼現率

m 每年運轉次數

e 自然對數之底

(證)　$$1-\beta=\left(1-\frac{f}{m}\right)^m=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{-f}}\right)^{-\frac{m}{f}}\right]^{-f}$$

令　$$-\frac{m}{f}=n$$

則　$$1-\beta=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-f}$$

m 大至無窮大時, n 之絕對值亦大至無窮大, 故

$$\lim_{m\to\infty}(1-\beta)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-f}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-f}=e^{-f}$$

$$\therefore\ \underset{m\to\infty}{\beta}=1-e^{-f}$$

運轉不停之虛貼現率名曰貼現力, 以 δ' 表之, 故得

$$\beta=1-e^{-\delta'}$$

12. 貼現力與實貼現率可自下列二式求得:

$$\delta'=\beta+\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^3}{3}+\frac{\beta^4}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$\beta=\delta'-\frac{\delta'^2}{2!}+\frac{\delta'^3}{3!}-\frac{\delta'^4}{4!}+\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

δ' 貼現力

β 實貼現率

(證)　$$1-\beta=e^{-\delta'}$$

$$\log_e(1-\beta)=-\delta'$$

但 $\log_e(1-\beta)=-\beta-\frac{\beta^2}{2}-\frac{\beta^3}{3}-\frac{\beta^4}{4}-\cdots$(附錄甲公式7)

$$\therefore\quad \delta'=\beta+\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^3}{3}+\frac{\beta^4}{4}+\cdots\cdots$$

$$\beta=1-e^{-\delta'}$$

但 $e^{-\delta'}=1-\frac{\delta'}{1}+\frac{\delta'^2}{2!}-\frac{\delta'^3}{3!}+\frac{\delta'^4}{4!}-\cdots\cdots\cdots$(附錄甲公式4)

$$\therefore\quad \beta=\delta'-\frac{\delta'^2}{2!}+\frac{\delta'^3}{3!}-\frac{\delta'^4}{4!}+\cdots\cdots$$

13. 高次等差級數之末項,可自下列公式求得:

$$l=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(n-1)\cdots\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}d_r\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

l 末項

n 項數

a_1 首項

d_1 一次差之首項

d_2 二次差之首項

……………………………

d_r r次差之首項

(證) 設

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\cdots\cdots a_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

爲r次等差級數,n爲其項數.又設$d_1, d_2, d_3,\cdots\cdots d_r$爲一次差,二次差,三次差,……$r$次差之首項.

將(I)式之前後項相減而得一次差如下:

$$a_2-a_1\ \ a_3-a_2\ \ a_4-a_3\cdots\cdots a_n-a_{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(II)}$$

(II)式之首項爲d_1,而其一次差,二次差,三次差,……$r-1$次差,則爲$d_2, d_3, d_4\cdots\cdots d_r$. 故由(I)式中某項化出(II)式中與某項項次相等之一項,例如由(I)式中第六項化出(II)式中第六項,祗須將d_1代a_1, d_2代d_1, d_3代d_2, ……d_r代d_{r-1}.

$$\because\quad d_1=a_2-a_1$$

$$\therefore\quad a_2=a_1+d_1$$

a_2爲(I)式中之第二項,故(II)式中之第二項爲d_1+d_2, 而(II)式中之第二項爲a_3-a_2, 故得

$$a_3-a_2=d_1+d_2$$

以a_2之值代入,則得

$$a_3=a_1+2d_1+d_2$$

同理,吾人可依次求得$a_4, a_5\cdots\cdots$如下:

$$\begin{array}{rll}
a_3=a_1+2d_1+\ d_2 & & \text{(I)式中之第三項} \\
+a_4-a_3=\qquad d_1+2d_2+d_3 & & \text{(II)式中之第三項} \\
\hline
a_4\quad =a_1+3d_1+3d_2+d_3 & & \text{(I)式中之第四項} \\
+a_5-a_4\quad =\qquad d_1+3d_2+3d_3+d_4 & & \text{(II)式中之第四項} \\
\hline
a_5\quad =a_1+4d_1+6d_2+4d_3+d_4 & & \text{(I)式中之第五項}
\end{array}$$

試就以上結果與$(a+b)^{n-1}$展開式並列比較,則見各項之係數完全相同.

$a_2=a_1+d_1$	$(a+b)^1=a+b$
$a_3=a_1+2d_1+d_2$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$a_4=a_1+3d_1+3d_2+d_3$	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$a_5=a_1+4d_1+6d_2+4d_3+d_4$	$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

應用附錄甲公式(1),得:

$$l=a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(n-1)\cdots\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}d_r$$

(I)式爲 r 次等差級數,自 d_{r+1} 起各項均等於零,故上式至 d_r 爲止.

14. 高次等差級數之和,可自下列公式求得:

$$S=na_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d_2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(r+1)}d_r \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

S 總和

n 項數

a_1 首項

d_1 一次差之首項

d_2 二次差之首項

……………………

d_r r 次差之首項

(證) $S=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots a_n$

S 亦爲下列級數之末項