陆启韶　彭临平　杨卓琴　编著

高等学校研究生教材

常微分方程与动力系统

北京航空航天大学出版社

高等学校研究生教材

常微分方程与动力系统

陆启韶　彭临平　杨卓琴　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书基于动力系统的思想，较系统地介绍常微分方程定性分析的基本理论和方法及其在科学技术中的一些应用。主要内容有：常微分方程的基本概念和定理、线性系统的解的性质和稳定性、平面自治系统的定性理论和应用、非线性系统的稳定性和应用、微分动力系统基础及常微分方程的分岔和混沌问题等。

本书可以作为高等学校理工科和应用数学专业的研究生教材或参考书，也可供高年级大学生、教师和科学技术人员自学和参考。

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程与动力系统/陆启韶，彭临平，杨卓琴编著.—北京：北京航空航天大学出版社，2010.1

ISBN 978-7-81124-955-2

Ⅰ.常… Ⅱ.①陆…②彭…③杨… Ⅲ.①常微分方程②动力系统(数学) Ⅳ.O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 205165 号

常微分方程与动力系统

陆启韶　彭临平　杨卓琴　编著

责任编辑　王　实

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100191)　发行部电话：010-82317024　传真：010-82328026

http://www.buaapress.com.cn　E-mail：bhpress@263.net

北京时代华都印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本：787×1092　1/16　印张：20　字数：512 千字

2010 年 1 月第 1 版　2010 年 1 月第 1 次印刷　印数：3 000 册

ISBN 978-7-81124-955-2　定价：35.00 元

前言

常微分方程与动力系统是研究自然界、工程技术及社会中事物与现象的运动和演化规律的重要数学理论。在物理、化学、生物、机电工程、控制技术、航空航天、医学、经济和金融等领域中的许多问题都可以表示为适当的常微分方程模型，而要描述、认识和分析其规律，就要对相应的微分方程进行深入研究。随着现代科学技术的发展，尤其是非线性问题的重要性凸显，常微分方程不仅需要通过解析方法或者数值方法求解，还需要根据动力系统的理论和方法进行定性分析。这三种处理途径各有侧重，既有本身的特点和使用范围，又相互配合，共同发展，成为当今常微分方程研究的发展趋势。

微分方程与动力系统的理论和方法对于拓宽和加强理工科研究生的数学基础，增强他们运用相应知识去分析和解决科学技术问题的科研创新能力，提高研究生的培养质量具有重要作用。常微分方程理论和应用的研究历史悠久，目前国内外已有一些优秀的专著，但主要是供专门从事常微分方程和动力系统方向研究的学者和研究生使用的，而在一般的常微分方程教材中，内容基本上限于古典的求解方法，较少涉及定性分析方法，因此它们不能充分满足广大理工科研究生的教学和科研需要。为此，我们根据理工科专业特点，编写了这本适用于理工科和应用数学专业研究生的教材。本教材基于动力系统的思想，介绍常微分方程定性分析的基本理论和方法，涉及经典和现代内容，主要包括常微分方程的定性理论、稳定性理论和分岔与混沌理论三大部分，还简要论述了动力系统的基本概念。

20 世纪 80 年代，我们就开始从事理工科研究生的常微分方程课程的教学工作，其教材《常微分方程的定性方法和分叉》自 1989 年出版以来，已经重印多次，印数达 8 000 册。该教材一直在许多高等院校中使用，效果很好，深受广大研究生和导师的好评。现在我们按照研究生课程教学改革的要求，对国内外近期出版的相关专著和教材进行了认真调研，并结合在长期从事科研和研究生教学工作中积累的经验，广泛征集广大师生和读者的意见，对原教材进行了全面修订和补充后，更名为《常微分方程与动力系统》出版，以适应我国 21 世纪理工科研究生培养和课程建设的需要。应当指出，本教材的前 5 章均进行了大量的修改，第 6 章是完全改写的，并新增了第 7 章。

本教材的编写具有以下特点。首先，根据现代科学技术的发展精心选取内容。以常微分方程为核心，重点论述非线性动力系统的定性分析理论和方法，同时通过一些重要的应用实例，适当介绍其在科学技术中的应用，以加强理论和应用的密切联系。其次，根据当今常微分方程研究的发展趋势，微分动力系统的观点和方法不仅在常微分方程的轨线结构、稳定性分析、分岔及混沌等问题中得到充分展示，而且也贯穿于一些重要经典结果（如解的存在性和唯一性问题、线性系

统理论等)的表述之中。除平面自治系统外,对于高维和非自治系统也给以足够的关注。再次,在内容处理上充分注意到理工科研究生的专业需要、数学基础和学习特点,重视基本概念的引进和研究思路的介绍,加强启发式叙述,引进较多的实际范例,以使读者较全面迅速地掌握基本理论和方法,领悟分析和解决实际问题的途径,了解本学科的研究动态及近期研究成果。最后,注重数学理论的系统性和论述的严密性,但对一些过长的定理证明予以适当简化或通过例子说明,以突出重点内容。注重运用几何方法和图形进行表述,重视理论与实例的配合,使读者加深对抽象理论的理解,建立一个直观、具体、全新的认识。在编写中做到语言流畅,循序渐进,深入浅出,便于自学。书末附有习题答案和一些提示,并有较详细的参考文献目录。建议读者在阅读实例或做习题过程中,适当地利用计算机软件(例如 MatLab,Maple,Mathematica 等)进行数值计算、符号运算和图形显示,加强定性分析思想与数值计算技巧的联系,以取得更好的学习效果。

本书可以作为高等院校理工科和应用数学专业的研究生教材或参考书,也可供高年级大学生、教师和科学技术人员自学和参考,特别是为从事有关非线性科学技术研究的人员提供必要的数学基础知识。

本书的出版得到了北京航空航天大学研究生院、教材科和北京航空航天大学出版社的长期支持。北京航空航天大学陈祖明教授认真审阅书稿,给出建设性的指教和建议,许多读者也提出了宝贵意见,我们在此一并表示衷心的感谢。本书的编写还得到国家自然科学基金项目(编号 10872014 和 10702002)的支持。

由于作者的水平所限,本书难免存在不足之处,敬请读者和同行批评指正。

作　者

2009 年 5 月

目　录

第 1 章　基本概念和定理

本章讨论常微分方程与具体形式无关的一般性质。1.1 节介绍常微分方程初值问题的基本概念。1.2 节利用毕卡逐次近似法建立解的存在性和唯一性定理，然后在 1.3 节讨论解的延拓问题。1.4 节讲述解对初值与参数的连续依赖性和可微性。最后在 1.5 节中介绍李雅普诺夫稳定性等的基本概念。

1.1　引　言

微分方程（或**微分方程组**）是一个（或一组）包含自变量、未知函数以及未知函数的导数的方程。如果微分方程（组）只有一个自变量，则称为**常微分方程**（**组**）。在本书中除非特别指明，都是讨论实数域上的常微分方程（组），简称为微分方程（组）。

在本书中，主要研究已解出一阶导数的一阶微分方程组（下面用 $\dot{x}_i$ 表示 $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t$，等等）

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \cdots, x_n) \quad (i=1,\cdots,n) \tag{1.1}$$

式中：$x_1,\cdots,x_n$ 是 t 的未知函数；$f_1,\cdots,f_n$ 是 $t,x_1,\cdots,x_n$ 的已知函数。式（1.1）称为**一阶标准形微分方程组**。为方便起见，通常都把式（1.1）改写为向量形式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{1.2}$$

式中：$t\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$（$n$ 维实欧氏空间），$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 是定义在（$n+1$）维的（$t,\boldsymbol{x}$）空间中的某个区域 Ω 上的 n 维向量函数，即 $\boldsymbol{f}:\Omega\subseteq\mathbf{R}^{n+1}\rightarrow\mathbf{R}^n$。在 $\mathbf{R}^n$ 中定义**内积**为

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$$

并规定向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 的**模**（**范数**）为

$$\|\boldsymbol{x}\| \overset{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

有时也称式（1.2）为一个**微分系统**，称 $\boldsymbol{f}$ 为系统（1.2）的**向量场**（**方向场**）。如果 $\boldsymbol{f}$ 与 t 无关，即对于所有 $(t,\boldsymbol{x})\in\Omega$，$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，即式（1.2）变为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，称为**自治**（**或定常**）**微分方程**（即**自治**（**定常**）**系统**）；否则，称为**非自治**（**非定常**）**微分方程**（即**非自治**（**非定常**）**系统**）。如果 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的线性函数，则称式（1.2）为**线性微分方程**（**线性系统**）；否则，称为**非线性微分方程**（**非线性系统**）。

如果 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}(t)=[a_{ij}(t)]$是以 $a_{ij}(t)$为元素的 $n\times n$ 矩阵，式（1.2）变为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$$

称为**线性齐次微分方程组**（**线性齐次系统**）。如果 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(t)$，其中 $\boldsymbol{g}(t)=(g_1(t),\cdots,g_n(t))^{\mathrm{T}}$，则式（1.2）变为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(t)$$

称为**线性非齐次微分方程组**（**线性非齐次系统**）。特别的，当 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 常数矩阵时，式（1.2）变为**线性齐次常系数微分方程组**：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

它亦称为**线性齐次自治微分方程组**(**线性齐次常系数系统**、**线性齐次自治系统**)。

假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是定义在开区间 $J=(a,b)\subset\mathbf{R}$ 上的可微函数(J 可以是有限区间或无限区间),对于一切 $t\in J$ 有 $(t,\boldsymbol{\varphi}(t))\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^{n+1}$,并有

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(i)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$$

成立,则称 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 为方程(1.2)在 J 上的一个**解**。解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在 $(t,\boldsymbol{x})$-空间中的几何图形是一条曲线,称为方程(1.2)的一条**积分曲线**。

需要指出,任何一个 n 阶标准形微分方程

$$x^{(n)}=f(t,x,\dot{x},\cdots,x^{n-1}),\quad x\in\mathbf{R} \tag{1.3}$$

都与下面的一阶标准形微分方程组等价:

$$\begin{cases}\dot{x}=x_1\\ \dot{x}_1=x_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}=f(t,x,x_1,\cdots,x_{n-1})\end{cases} \tag{1.4}$$

大家知道,物理、力学、几何、工程技术乃至生物科学、化学、经济学等都提出各种常微分方程问题,其中包括大量的非线性微分方程。下面举一些重要的例子(以后再作进一步的说明和讨论),它们都可写成式(1.1)的形式。

例 1.1 n 个自由度的保守动力学系统(哈密顿(Hamilton)系统)。

假设 $\boldsymbol{q}=(q_i,\cdots,q_n)^{\mathrm{T}}$ 表示系统的 n 个广义坐标,$\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_n)^{\mathrm{T}}$ 表示系统的 n 个广义动量,$H=H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ 是系统的哈密顿函数,则保守系统由 $2n$ 个一阶微分方程描述:

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,\cdots,n) \tag{1.5}$$

例 1.2 机械和电路的振动问题。

机械系统和电路系统通常可以用微分方程(组)描述。一个典型的方程形式是二阶方程

$$\ddot{x}+p(t,x,\dot{x})=q(t),\quad x\in\mathbf{R} \tag{1.6}$$

其中 p,q 是已知函数,许多著名的振动方程都是式(1.6)的特殊情形,例如单自由度强迫线性谐振子方程:

$$\ddot{x}+2\mu\dot{x}+k^2x=A\cos\omega t$$

李纳德(Lienard)方程:

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$$

范德坡(Van der Pol)方程:

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0$$

瑞利(Rayleigh)方程:

$$\ddot{x}-\mu f(\dot{x})+k^2x=0$$

强迫杜芬(Duffing)方程:

$$\ddot{x}-2\mu\dot{x}+k^2x+ax^3=A\cos\omega t$$

希尔(Hill)方程:

$$\ddot{x}+[a+\varphi(t)]x=0,\quad \varphi(t+T)=\varphi(t)$$

马修(Mathieu)方程:

$$\ddot{x}+2\mu\dot{x}+(a+b\cos\omega t)x=0$$

等等，将在第 3 章 3.9 节中进一步讨论。二阶方程(1.6)可以写成标准形方程组：

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-p(t,x,y)+q(t)\end{cases},\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2 \tag{1.7}$$

例 1.3　生态学问题。

若有两个相互作用的种群，它们的成员数分别为 x 和 y。由于种群之间的相互作用和内部制约作用的影响，一般来说，x 和 y 的增长率都会与 x 和 y 有关，即有

$$\begin{cases}\dot{x}=f_1(x,y)\\ \dot{y}=f_2(x,y)\end{cases},\quad x\geqslant 0, y\geqslant 0 \tag{1.8}$$

一个重要的例子是伏泰拉-洛特卡(Volterra - Lotka)方程

$$\begin{cases}\dot{x}=x(A-By)\\ \dot{y}=y(Cx-D)\end{cases} \tag{1.9}$$

例 1.4　化学和生物化学问题。

普里戈京(Prigogine)和列费尔(Lefever)在 1968 年提出著名的布鲁塞尔振子(Brusselator)的三分子化学反应模型。设浓度分别为 x 和 y 的两种反应物质是空间均匀的，则有化学反应速率方程：

$$\begin{cases}\dot{x}=a-(b+1)x+x^2y\\ \dot{y}=bx-x^2y\end{cases},\quad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \tag{1.10}$$

贝洛索夫-查波丁斯基(Belousov - Zhabotinsky，1958)反应是一种存在周期性化学振荡行为的化学反应。费尔德(Field)和诺伊斯(Noyes)在 1974 年提出著名的俄勒冈振子(Oregonator)模型去描述这种化学反应。它包含三种化学反应物质，假设其浓度 x,y,z 是空间均匀的，则有反应速率方程

$$\begin{cases}\dot{x}=k_1Ay-k_2xy+k_3Ax-2k_4x^2\\ \dot{y}=-k_1Ay-k_2xy+k_5Bz\\ \dot{z}=k_3Ax-k_5z\end{cases} \tag{1.11}$$

式中：$x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0, A, B, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ 都是正常数。

例 1.5　生物学问题。

在细胞中，令 x 代表一种稳定蛋白质，y 代表这个蛋白质的活性形态。于是，两个耦合的细胞中 x_i 与 y_i 的变化满足下面的方程组：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=A-Bx_1-x_1y_1^2+\delta_1(x_2-x_1)\\ \dot{x}_2=A-Bx_2-x_2y_2^2+\delta_1(x_1-x_2)\\ \dot{y}_1=Bx_1+x_1y_1^2-y_1+\delta_2(y_2-y_1)\\ \dot{y}_2=Bx_2+x_2y_2^2-y_2+\delta_2(y_1-y_2)\end{cases} \tag{1.12}$$

已经知道，微分方程的基本问题在于求解和研究解的各种属性。在常微分方程课程的初等部分中，读者已经学过一些求微分方程通解的方法。但是，经过深入的研究后发现，绝大多数微分方程都求不出通解。例如黎卡提(Riccati)方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

除了个别特殊情形之外，对于一般的函数 P,Q,R，其通解不可能用初等函数或初等函数的积

分表示。当然，对于一般非线性微分方程更是如此。在物理、力学和工程技术等领域提出的微分方程问题中，大多数是寻求满足某些附加条件的特解，即所谓**定解问题**的解。因此，人们重视定解问题的研究。

最基本的定解问题是**初值问题**，也称为**柯西**(Cauchy)**问题**。微分方程(1.2)的初值问题就是对给定的$(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$，求方程(1.2)的一个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$，它在包含 t_0 的某个区间 I 上可微，并满足条件

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1.13}$$

$(t_0, \boldsymbol{x}_0)$称为**初值**，条件式(1.13)称为**初始条件**。若存在满足上述条件的函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，则 $\boldsymbol{\varphi}(t)$称为方程(1.2)的满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$（或过$(t_0, \boldsymbol{x}_0)$点）的一个解，或简称为这个初值问题方程的一个解。$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$的图形是过点$(t_0, \boldsymbol{x}_0)$的一条积分曲线。

在解的属性研究中，最根本的是定解问题的解的存在性和唯一性。显然，如果解根本不存在，那么这个定解问题就没有意义。如果解虽然存在但不唯一，因为这时有多个解甚至无穷多个解同时出现，所以这个定解问题是不明确的。因此，解的存在性和唯一性定理是求解的前提，也是整个微分方程理论的基础。

由于在用微分方程描述实际过程时，方程本身和定解条件往往只能是近似的，因此自然关心当方程本身或定解条件发生变化时，相应的解发生怎样的变化。这是**解对初值或参数的依赖性问题**。此外，还特别关心解的各种稳定性问题。值得注意的是，由于能够求出解的解析表达式的情形很少，因此需要根据微分方程本身的结构而不是靠解的表达式去研究解的各种属性。

1.2 解的存在性和唯一性

本节研究初值问题

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{1.14}$$

式中：$t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{f}: \Omega \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$。

首先看下面两个例子。

例 1.6 $\dot{x}=x^2, x(0)=a, (t,x) \in \mathbf{R}^2$。

利用初等积分法，得知此初值问题方程的特解为：当 $a \neq 0$ 时，$x(t)=\dfrac{a}{1-at}$；当 $a=0$ 时，$x(t)=0$。

由图 1.1 可见，当 $a=0$ 时，初值问题方程的解在$(-\infty, +\infty)$上存在；而当 $a<0$ 时，此解在$(1/a, +\infty)$上存在；当 $a>0$ 时，此解在$(-\infty, 1/a)$上存在。由此可见，虽然对于任何 $a \in \mathbf{R}$，本例的初值问题方程的解都是存在且唯一的，但它的存在区间与 a 有关，并且可能不是整个实轴。

例 1.7 $\dot{x}=\sqrt{x}(-\infty<t<+\infty, x \geqslant 0), x(0)=0$。

显然，$x=0(-\infty<t<+\infty)$是此初值问题方程的一个解。此外，对任何 $c \geqslant 0$，函数

$$x(t)=\begin{cases} \dfrac{(t-c)^2}{4}, & t \geqslant c \\ 0, & t<c \end{cases}$$

也都是本例的初值问题方程的解，故有无穷多个解，即解的唯一性破坏(见图 1.2)。

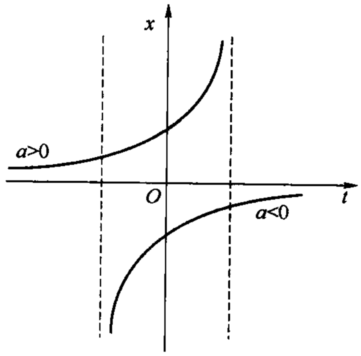

图 1.1

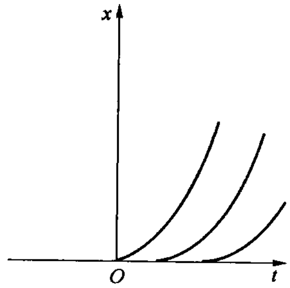

图 1.2

在叙述解的存在性和唯一性定理的时候，要用到函数的李普希兹(Lipschitz)条件的概念。

定义 1.1　假设向量函数 $\boldsymbol{f}(x)$ 定义在区域 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 上，且存在 $L>0$，使得对于任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$，有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \tag{1.15}$$

则称 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上满足**李普希兹条件**(以后简称**李氏条件**)，并称 L 为 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上的一个**李氏常数**。

如果 f 在 D 上满足李氏条件，显然它是 D 上的连续函数。但是即使 f 在区域 D 上一致连续，它也不一定满足李氏条件。例如取

$$f(x)=|x|^{\alpha},\quad x\in(-1,1)$$

其中 $\alpha\in(0,1)$ 是一个常数。它是一致连续的，但是对 $|x|\neq0$，有

$$|f(x)-f(0)|=|x|^{\alpha}=|x|^{\alpha-1}\cdot|x-0|$$

由于 $|x|\to0$ 时，$|x|^{\alpha-1}\to+\infty$，因此 $f(x)$ 不满足李氏条件。

下面给出 $\boldsymbol{f}$ 满足李氏条件的一个充分条件：

命　题　设在凸域 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 上，n 维向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的所有一阶偏导数存在且有界，则 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上满足李氏条件。

证　由假设知道有常数 $K>0$，使得在 D 上有

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\leqslant K\qquad(i,j=1,\cdots,n)$$

利用微分中值定理，对于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$ 有

$$|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\xi})\right||x_j-y_j|$$

式中：$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}+\theta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$，$0<\theta<1$。因为 D 是凸域，所以当 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$ 时，$\boldsymbol{\xi}\in D$。于是，由上面的不等式得到

$$|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})|\leqslant nK\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

从而

$$\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant n^{\frac{3}{2}}K\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \tag{1.16}$$

由此可见，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上满足李氏条件。证毕。

注　即使 $\boldsymbol{f}$ 的一阶偏导数在 D 上不是处处存在的，它也可能满足李氏条件。例如，在 $\mathbf{R}$

上的函数 $f(x)=|x|$ 就是如此。

现在给出解的存在性和唯一性定理。

定理 1.1 设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在闭区域

$$G=\{(t,\boldsymbol{x})\mid |t-t_0|\leqslant a,\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant b\}\subset \mathbf{R}^{n+1}$$

上连续，且对 $\boldsymbol{x}$ 满足李氏条件：

$$\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})\|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,\quad \forall (t,\boldsymbol{x}),(t,\boldsymbol{y})\in G \tag{1.17}$$

式中：$L>0$ 是与 t 无关的常数。令

$$M=\max_{(t,\boldsymbol{x})\in G}\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\|,\quad h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right) \tag{1.18}$$

则初值问题(1.14)在区间 $I=\{t\mid |t-t_0|\leqslant h\}$ 上有一个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$，并且它是唯一的。

证 用毕卡逐次近似法证明这个定理。整个证明可以分成 5 个步骤：

① 把初值问题方程(1.14)化为等价的积分方程。

设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是初值问题方程(1.14)的解，即有

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$$

且 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$。对 t 积分之后，得到

$$\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}(s))\mathrm{d}s$$

即 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 满足积分方程

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}(s))\mathrm{d}s \tag{1.19}$$

反之，如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程(1.19)的解，由上式知道 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是连续的，从而 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$ 也是连续的。于是 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是可微的，把式(1.19)对 t 求导，得到

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$$

此外在式(1.19)中令 $t=t_0$，有 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$。由此可见，$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 确实是初值问题方程(1.14)的解。

② 构造毕卡近似函数序列 $\{\varphi_k(t)\}$。

在区间 I 上按以下方法构造一个函数序列（当 $x\in\mathbf{R}$ 时，参看图 1.3）：

令零阶近似函数 $\boldsymbol{\varphi}_0(t)\equiv\boldsymbol{x}_0$，$t\in I$。由于当 $t\in I$ 时，$\boldsymbol{\varphi}_0(t)$ 的图形始终在域 G 内，因此可以令一阶近似函数

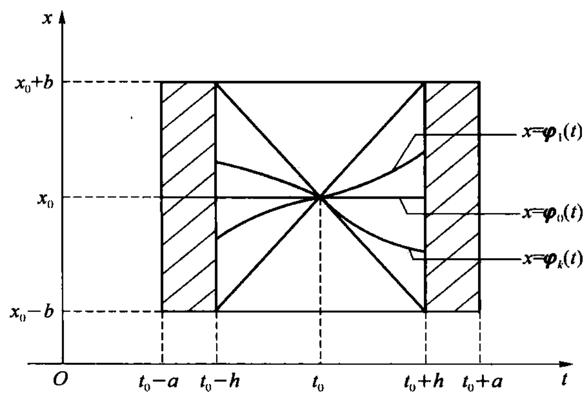

图 1.3

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}_0(s))\mathrm{d}s,\quad t\in I$$

由于当 $t\in I$ 时，

$$\|\boldsymbol{\varphi}_1(t)-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}_0(s))\|\mathrm{d}s\right|\leqslant M\cdot|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$的图形也在域 G 内。利用归纳的程序继续构造近似函数。如果 $\boldsymbol{\varphi}_k(t)$已经得到，并且当 $t\in I$ 时，$\|\boldsymbol{\varphi}_k(t)-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant b$，即 $\boldsymbol{\varphi}_k(t)$的图形在域 G 内，则令$(k+1)$阶近似函数为

$$\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}_k(s))\mathrm{d}s,\quad t\in I \tag{1.20}$$

由于当 $t\in I$ 时，

$$\|\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(t)-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}_k(s))\|\mathrm{d}s\right|\leqslant M\cdot|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b$$

可见，这个近似函数序列可以继续构造下去，于是得到毕卡近似函数序列$\{\boldsymbol{\varphi}_h(t)\}$。它们都是 t 的连续函数。

③ 证明序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在 I 上的一致收敛性。

函数序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$的收敛问题等价于级数

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t)+\sum_{k-0}^{\infty}[\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(t)-\boldsymbol{\varphi}_k(t)] \tag{1.21}$$

的收敛问题，因此只要用维尔斯特拉斯的 M-判别法去证明式(1.21)在 I 上一致收敛即可。

记 $d_k(t)=\|\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(t)-\boldsymbol{\varphi}_k(t)\|$，用归纳法证明对于 $k=0,1,2,\cdots$有

$$d_k(t)\leqslant\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!},\quad t\in I \tag{1.22}$$

式中：L 为式(1.17)中的李氏常数。事实上，对 $k=0$ 有

$$\begin{aligned}d_0(t)&=\|\boldsymbol{\varphi}_1(t)-\boldsymbol{\varphi}_0(t)\|=\|\boldsymbol{\varphi}_1(t)-\boldsymbol{x}_0\|\\&=\left\|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}_0(s))\mathrm{d}s\right\|\\&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}_0(s))\|\mathrm{d}s\right|\leqslant M\cdot|t-t_0|\end{aligned}$$

假设对 $t\in I$ 有

$$d_k(t)\leqslant\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}$$

则

$$\begin{aligned}d_{k+1}(t)&=\|\boldsymbol{\varphi}_{k+2}(t)-\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(t)\|\\&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(s))-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}_k(s))\|\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}L\|\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(s)-\boldsymbol{\varphi}_k(s)\|\mathrm{d}s\right|=L\left|\int_{t_0}^{t}d_k(s)\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant L\cdot\frac{M}{L}\cdot\frac{L^{k+1}}{(k+1)!}\left|\int_{t_0}^{t}|s-t_0|^{k+1}\mathrm{d}s\right|=\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|t-t_0|)^{k+2}}{(k+2)!}\end{aligned}$$

于是对 $t\in I$，级数

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(t)-\boldsymbol{\varphi}_k(t)\|&=\sum_{k=0}^{\infty}d_k(t)\leqslant\frac{M}{L}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(L|t-t_0|^{k+1})}{(k+1)!}\\&\leqslant\frac{M}{L}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Lh)^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{M}{L}(\mathrm{e}^{Lh}-1)\end{aligned} \tag{1.23}$$

由维尔斯特拉斯的 M-判别法知道级数式(1.21)在 I 上绝对且一致收敛,从而函数序列 $\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$ 亦在 I 上一致收敛,记 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varphi}_k(t),t\in I$。由数学分析的定理知道,因为 $\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$ 在 I 上连续且一致收敛,所以 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 也在 I 上连续。此外,$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant b(t\in I)$,故对 $t\in I$ 的 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的图形在域 G 内。

④ 证明 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程(1.19)的解,从而它就是初值问题方程(1.14)的一个解。

在式(1.20)的两端令 $k\to\infty$,得到

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{x}_0+\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}_k(s))\mathrm{d}s \tag{1.24}$$

利用李氏条件式(1.17)证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}_k(s))\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}(s))\mathrm{d}s \tag{1.25}$$

事实上,任意给 $\varepsilon>0$,总可找到 $N=N(\varepsilon)>0$,使得当 $t\in I$ 时,对 $k\geqslant N$ 有

$$\|\boldsymbol{\varphi}_k(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{Lh}$$

于是当 $t\in I$ 时,对 $k>N$ 有

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}_h(s))\mathrm{d}s-\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}(s))\mathrm{d}s\right\|\\ \leqslant&\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}_k(s))-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}(s))\|\mathrm{d}s\right|\\ \leqslant&L\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\varphi}_k(s)-\boldsymbol{\varphi}(s)\|\mathrm{d}s\right|\leqslant L\cdot\frac{\varepsilon}{Lh}\cdot h=\varepsilon\end{aligned}$$

即式(1.25)成立。由式(1.24)和式(1.25)可见,$x=\varphi(t)$ 满足积分方程(1.19)。

⑤ 证明积分方程的解的唯一性,从而 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是初值问题方程(1.14)在 I 上的唯一解。

事实上,如果初值问题方程(1.14)有两个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\psi}(t)$,则它们分别满足积分方程(1.19),即

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}(s))\mathrm{d}s$$

和

$$\boldsymbol{\psi}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\psi}(s))\mathrm{d}s$$

因为 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 都在 I 上连续,故存在 $A>0$,使得对 $t\in I$ 有

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\|\leqslant A \tag{1.26}$$

但是由李氏条件式(1.17)有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\|&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}(s))-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\psi}(s))\|\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\varphi}(s)-\boldsymbol{\psi}(s)\|\mathrm{d}s\right|\end{aligned} \tag{1.27}$$

将式(1.26)用于式(1.27)右端,便得到

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\|\leqslant LA|t-t_0| \tag{1.28}$$

再将式(1.28)用于式(1.27)右端,如此继续下去,可以用归纳法证明对 $t\in I$ 有

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\|\leqslant\frac{A(L|t-t_0|)^m}{m!} \tag{1.29}$$

式中:m 为任意正整数。由于 m 的任意性,只有