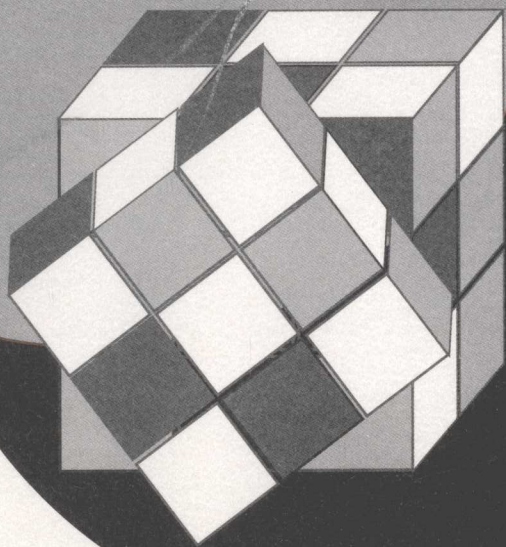


趣味数学丛书

魅力魔方



吴鹤龄 / 著

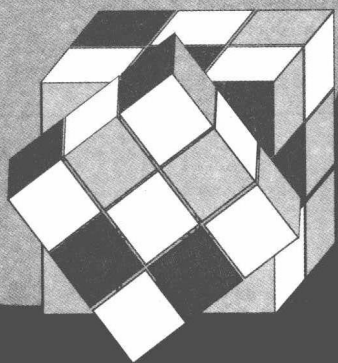


科学出版社
www.sciencep.com

趣味数学丛书

魅力魔方

吴鹤龄 / 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书在简要回顾了魔方的历史、介绍了魔方的内部结构以后,重点围绕以下几个方面展开:魔方六面还原法;在魔方上形成美丽图案;魔方游戏中的难题;魔方中的数学。内容丰富,生动有趣。在魔方六面还原方面,本书除把数学家辛格马斯特提出的方法作为基本方法,作了详细介绍外,还简要介绍了其他学者提出的4种不同方法,读者可根据自身条件予以选用。

本书集知识性、趣味性和实用性于一体,寓教于乐,图文并茂,对广大魔方爱好者有启迪作用和参考价值,适合小学高年级以上文化程度的学生、教师、科技工作者和广大数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

魅力魔方/吴鹤龄著. —北京:科学出版社, 2009

(趣味数学丛书)

ISBN 978-7-03-024992-0

I. 魅… II. 吴… III. 智力游戏 IV. G898.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第117864号

责任编辑:胡升华 张 凡 房 阳 / 责任校对:陈玉凤

责任印制:赵德静 / 整体设计:黄华斌

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

天时彩色印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年9月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2009年9月第一次印刷 印张:7 1/4

印数:1—8 000 字数:220 000

定价:28.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前言

英文“magic cube”有两个意思，一是指三维的幻方（3D magic square），国内学术界一般称之为“幻立方”，笔者在《好玩的数学——娱乐数学经典名题》一书中已作过详尽介绍^①。另一个是指一种 $3 \times 3 \times 3$ 的立体智力玩具，国外常常根据其发明人的名字把它叫做“鲁比克立方体”，国内一般称为“魔方”，这就是本书所要讨论的对象。

魔方是在20世纪70年代中发明的，因此只有三十几年历史。它的发明人埃诺·鲁比克是匈牙利的雕刻家、建筑师和大学教师。他通过十分巧妙的设计，把27个外表涂以各种颜色的小立方体结合成一个绚丽多彩的大立方体，这个大立方体既不会轻易散架，又能灵活地转动。这个小小的玩具问世后，很快风靡全球，成为最畅销的智力玩具。魔方中蕴含的数学问题和算法问题以及它同粒子物理中某些现象之间惊人的相似关系则成为数学家和计算机科学家以及物理学家研究的热点之一，至今兴盛不衰。

笔者1980年到法兰克福大学做访问学者时在德国同事家中第一次见到魔方，立即就被它深深地吸引。但由于学习和工作的压力，在很长一段时间里，并没有为它花费很多时间和精力。退休以后有了闲暇，这才重拾魔方，享受游戏的无穷乐

^① 该书再版时被纳入由张景中院士主编的《好玩的数学》丛书，书名改为《幻方及其他》。2008年该丛书出普及版时，该书经精编后改名为《幻方与素数》。



趣。写这本书，一是为了向喜欢魔方，但苦于不会玩魔方的读者介绍入门的知识；二是为了和“魔友”们交流心得，以期共同提高；三是为了普及魔方中的数学知识。笔者深知，对魔方而言，“入门殊不易，精通难上难”。因此，本书将尽可能用通俗的语言，用浅显易懂的实例，阐明复杂的魔方操作过程和魔方中蕴含的数学问题，为读者提供一本看得懂、用得上，既能指导实践又有理论价值的魔方初级教材。此外，本书还提供了有关魔方的大量信息和丰富资料，因此，对魔方爱好者而言，它也极具参考价值和收藏价值。

笔者对魔方中的数学十分痴迷，平时也喜欢玩玩魔方，但毕竟水平有限，因此，书中难免存有不妥之处，热诚欢迎“魔友”和读者批评指正。对本书的任何意见和建议请发至笔者的电子邮箱 wuhl1937@sina.com。

吴鹤龄

2009年初夏

目 录

前言

1 魔方的历史	1
1.1 魔方诞生记	1
1.2 魔方也疯狂	2
1.3 魔方也学术	7
1.4 “魔友”与“魔网”	11
1.5 魔方在中国	11
2 小魔方的大工艺	14
2.1 尺寸和外观	14
2.2 “解剖”魔方	15
2.3 材质和工艺	18
3 魔方预热	20
3.1 定义魔方	20
3.2 魔方标记法	23
3.3 魔方操作入门	29
3.4 魔方运动的基本规律	34
3.5 魔方的另类操作	36
4 六面还原基本法	39
4.1 魔方还原的基本原理	39
4.2 还原底层的4个边块	45
4.3 还原底层的3个角块	48
4.4 还原中层的3个边块	52



4.5	还原剩余的5个边块	53
4.6	让剩余的5个角块各就各位	60
4.7	将有扭转的角块“正”过来	66
4.8	魔方六面还原法总结	72
5	魔方操作中的“魔法”	79
5.1	等效过程	79
5.2	恒等过程和逆过程	82
5.3	n 循环的性质	84
5.4	一些有用的过程	89
5.5	交换过程	91
5.6	利用共轭过程由老过程建立新过程	95
6	升级六面还原基本法	99
6.1	底层边块的还原	99
6.2	底层3个角块的还原	100
6.3	中层边块的还原	101
6.4	顶层边块的还原	102
6.5	让最后5个角块各就各位	103
6.6	给角块纠偏	105
7	名家妙“方”	107
7.1	剑桥数学家康韦的方法	107
7.2	“神奇小子”博赛特的方法	111
7.3	群论专家乔伊纳的“先角后边法”	125
7.4	计算机科学家考尔夫的方法	127
7.5	妙“方”点评	139
8	魔方之美	145
8.1	魔方图案的美学基础	145
8.2	博赛特的创造	146
8.3	康韦夫人的花样	150

目 录

8.4 德国人的发明	152
8.5 马可先生的创作	159
8.6 对魔方图案的分析和讨论	163
9 魔方难题	175
9.1 六色同堂	175
9.2 180°	179
9.3 超级魔方	184
10 魔方中的数学	191
10.1 什么是群论?	191
10.2 群的定义和基本性质	193
10.3 循环群	198
10.4 子群	201
10.5 置换的结构	208
10.6 魔方群的阶和魔方群中元素的阶	213
参考文献	216
附录1 魔方顶面变换法	218
附录2 国内外魔方网站	221

1 魔方的历史

差不多每个人小时候都玩过积木 (building blocks)。一堆小方块，加上若干长方块，一个三角块（用来做屋顶），可以让孩子随心所欲地搭出他心目中的房子、高楼、大厦、教堂……几百年来，小小的积木在培养孩子的空间立体感方面发挥着重要的作用，至今仍然是一种重要的儿童智力玩具。

传统上，积木是散装的。每个积木块都是独立的，可以任由你摆布。但是到了 20 世纪 70 年代，出现了一种崭新的积木玩具，所有积木被连接成一个大立方体，互相不即不离，但又能灵活地转动。它的玩法十分复杂，但却引人入胜，富有魅力，因而被叫做“魔方” (magic cube)。它在全世界大行其道，至今已售出 2 亿多个，成为人类历史上最广泛流行的智力玩具。根据它的构造，用现在时髦的词汇，笔者认为可以把它叫做“集成的积木” (integrated building blocks)。那么，它是怎么诞生的呢？

1.1 魔方诞生记

魔方的出生地是匈牙利首都布达佩斯。那里的一所应用艺术学院有一个教师叫埃诺·鲁比克 (Erno Rubik, 图 1-1)，当时 30 岁左右，是一个富于幻想和创造力的青年。他原是学雕刻的，后来改学建筑，在学校给学生讲授建筑物的结构和平面图、内部工程设计、家具布置等课程。教学中，他发现学生对空间的复杂关联理解起来十分困难。为了培养学生的立体想象力，尤其是对空间变换的理解能力，他想到了一个办法：把积木块以一定方式连接在一起，让它们上下左右旋转，互相交叉换位。起先，他用 18 个积木块，涂以黑白两种颜色，做成了一个 3×3 、



只有两层的教具，收到了不错的效果，这使他大受鼓舞。在此基础上，经过苦心钻研，克服了许多困难，鲁比克终于把这个教具发展、完善成为 $3 \times 3 \times 3$ 的正立方体形式，其6个外表面分别涂以6种不同颜色，魔方从此诞生。

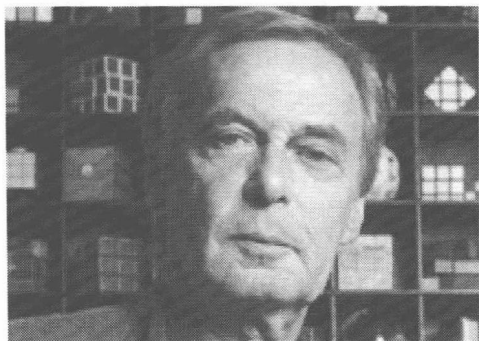


图 1-1 魔方的发明人鲁比克近照

1.2 魔方也疯狂

鲁比克发明魔方的本意是作为辅助教学的教具的。但他在完成设计与做出第一个魔方，自己转了几圈、把魔方打乱以后，却费尽周折，用了一个多月时间才得以让六面还原为原先的颜色（这不禁使我们联想起迷宫的类似故事：希腊神话中的能工巧匠代达罗斯，应克里特王米诺斯的要求，在诺索斯设计并建造了一座石头迷宫，以禁闭米诺斯王的妻子帕西淮同白公牛偷情所生下的牛头人身怪物米诺陶洛斯。石头迷宫建成以后，代达罗斯自己进去也差点找不到路出来。详见笔者的《迷宫趣话》，北京理工大学出版社，2007）。这使鲁比克意识到，他的这个发明可以作为智力玩具。于是他写出了详细的说明书，申请专利，于1977年3月28日获得匈牙利的00170062号专利证书。但在联系厂家生产上，鲁比克遇到很大困难，因为魔方虽然不算太复杂，但十分精细，

1 魔方的历史

对工艺要求很高，它的市场前景则难以预料，因此许多玩具工厂都拒绝了鲁比克。好不容易最后找到了一家工厂，勉强同意生产出 2000 个魔方，于 1977 年圣诞节前夕投放市场，想不到竟在两天内被抢购一空。随后又生产的几千个也十分抢手。这样，魔方在它的故乡匈牙利首先被推广开来。据统计，单是 1980 年，在人口只有 1000 万的匈牙利就出售了 200 万个魔方，平均每两户人家就购买了一个魔方。连同前几年售出的魔方，它已普及每家每户。

但是，神奇的魔方在迈向世界方面却并不顺利。匈牙利当时也属于“社会主义阵营”，实行计划经济。匈牙利的外贸部门虽然曾经把魔方送到一些国际玩具展上去展览，但连展板都不做，只是把魔方同其他上百种玩具混在一起放在一个展柜中，包装盒都不打开，观众根本见不到魔方的“庐山真面目”；参展的工作人员又没有一个会玩魔方（“因为这不是他们的职责”）。此外，美国逻辑游戏公司（Logical Games Inc.）的创始人贝拉·斯扎莱（Bela Szalai，这是一个匈牙利移民）虽然在 1978 年 8 月回故乡时见到魔方，并产生兴趣，曾引进生产，但因为数量少，也缺乏宣传，因此，魔方虽然出过国门，但没有引起人们的注意。到了 1978 年 11 月，事情才出现了转机。维也纳的一个叫梯鲍尔·莱斯济（Tibor Laczi，他也是一个匈牙利移民，见图 1-2）的商人在为奥地利的一家计算机公司作推销旅行途中，在匈牙利一个小镇的咖啡店伙计手中见到了被打乱的魔方（那个伙计不知道该如何复原）。莱斯济是一个数学的爱好者，他一见到魔方，就立刻产生了兴趣，用一美元从那个伙计手中买下了这个玩具。当天晚上，他在旅馆里摆弄



图 1-2 把魔方推向世界的奥地利商人莱斯济



了一个晚上，也没能使魔方还原，于是他意识到这是一个极具市场价值的智力玩具。第二天，他登门拜访了一家名叫 Konsumex 的匈牙利国营外贸公司，提出购买魔方在西方销售的要求。公司的人听了大为惊讶，告诉他公司曾经向生产厂订购了 1 万个魔方，后来砍掉了一半，现在已经没有存货了。莱斯济又获准拜访了鲁比克本人，向他请教复原魔方的秘诀，并告诉他自己愿意在西方国家推广魔方。鲁比克问他：“你能卖出 3 万个魔方吗？”莱斯济回答道：“如果只能卖出 3 万个，我是不会碰它的。”生意谈成以后的几个月，在德国纽伦堡举行的国际玩具博览会上，莱斯济亲自向观众展示和表演魔方——但是他既不租摊位，也不设展柜，他像狂欢节上叫卖商品的流动小贩那样，拿着魔方在博览会上到处走动，一边走，一边转动魔方，一边宣传魔方的神秘和刺激。他走到哪里，他的身边就围起一层又一层的观众。在这届玩具博览会上，魔方被评为最佳玩具，其发明者鲁比克荣获“世界最佳游戏发明奖”。魔方从此蜚声国际。

博览会以后，莱斯济把魔方介绍给与他有密切联系的著名英国玩具专家汤姆·克莱默（Tom Kremer）。克莱默在仔细研究了魔方以后，兴奋地对莱斯济说：“我们两人手里现在握着的是一个真正的世界奇迹！”稍后，在克莱默的推动下，著名的美国玩具公司“理想玩具”（Ideal Toy，其创始人 Teddy Bear）向匈牙利发出了一张 100 万个魔方的订单（另有一种说法是用 100 万美元买断了魔方的所有权利）。从此以后，魔方才得以在世界流行，成为国际时尚。在 1980 年的纽伦堡国际玩具展上，曾经设置了一个奖项，哪个观众能在 5 分钟内把一个拧乱了的魔方还原，就能获得 5000 马克的奖金（当时马克与人民币的比率大约是 1:6，5000 马克相当于约 3 万元人民币。当时国人的月工资水平普遍只有百元上下，因此 5000 马克是一个很大的数额）。但最终无人获奖。仅仅时隔一年，到 1981 年，据统计，在联邦德国，就有超过 1000 人能用远少于 5 分钟的时间解开魔方，可见其普及之迅速。而传媒的介入更是使魔方热不断升温。除了出版社出版了一批有关魔方的畅销书以外，从

1 魔方的历史

1983年9月开始,ABC电视台推出了一档名为“神奇的魔方”(Rubik, The Amazing Cube)的节目,热播了一年,吸引了无数的观众。法国学者 Yves Merane 在其魔方专著 *Le Rubiks Cube* (巴黎 Solar 出版社,1981)中有一幅插图(图 1-3),描写了一对青年男女新婚之夜在洞房里还各自在玩魔方,虽然相当夸张,却正是当时魔方热的一种反映。



图 1-3 洞房花烛夜的“魔方迷”新郎和新娘

(图作者: Joel Berdier)

魔方的走红使鲁比克一夜成名,并腰缠万贯。鲁比克成为东欧剧变前第一个拥有私人别墅的知识分子。图 1-4 就是鲁比克在他的豪宅前的照片。

专家们分析,魔方之所以风靡全球并经久不衰,主要有以下几个原因。一是它的难解性对人的智力是一个极大的考验,而好奇心恰恰是人的共性。越是稀奇古怪、难以解决的问题,人们越想弄个明白,“打破砂锅问到底”,“不到黄河不死心”。正是魔方的难解性激发与调动了人们探索的愿望。二是魔方小巧玲珑,价廉物美,最适应大众的消费需求。魔方是一种掌上玩具,体积很小,便于随身携带,又不需要专门的



图 1-4 鲁比克在他的豪宅前

场地或动力（电池之类），同时，价格非常便宜，人人买得起。你可以带在身上，有空时就玩；不玩的时候随便放在桌子上、柜子里都可以，不占多大空间。这些都使魔方比那些动辄几百上千元、庞大又要插电的大型、高档玩具易于普及。三是魔方的适应人群很广，不管男女老少、知识高低，属于什么阶层，几乎人人都可以玩。当然，作为一种需要较高智力的玩具，除了“幼儿不宜”（虽然国内外都有 2、3 岁幼儿成为魔方高手的报道，但笔者认为这毕竟是个案），三年级（10 岁）左右的少年儿童就可以开始玩魔方；只要用心，就能解开魔方。英国少年帕特里克·博赛特（Patrick Bossert）13 岁就已经成为玩魔方的高手，并写出了魔方专著 *You Can Do the Cube*，由海鹦出版社（Puffin Books）于 1981 年出版，该书有 17 个版本，售出 150 万册，这就是一个明证。

继魔方之后，鲁比克又发明了不少类似玩具，包括最近在 2009 年纽伦堡国际玩具展上推出的球形魔方“鲁比克 360”（图 1-5）。据介绍，鲁比克 360 由 3 个相互包裹的透明塑料球组成，从里到外分出 3 个不同空间。球内装有 6 个带颜色的小球。要求玩家晃动大球，使小球穿过仅有两个孔的中层，从最内层进入最外层的



图 1-5 球形魔方“鲁比克 360”

图片来源：北青网

空位上。虽然鲁比克自认为它“是自魔方以来世界上最有创新性、启发性的智力玩具”，但舆论普遍认为，只有魔方才是鲁比克的巅峰之作。笔者也认为，鲁比克 360 虽然被叫做球形魔方，实际上同魔方毫无关系，它更像是一个立体迷宫（参见笔者的《迷宫趣话》，北京理工大学出版社，2007）。

1.3 魔方也学术

魔方不但是一个绝佳的智力玩具，引起玩家的兴趣，它同时也引起了科学家的兴趣，成为科学研究的对象。首先是匈牙利的数学家注意到魔方中蕴含着丰富的数学问题，对它进行研究。早在 1978 年 8 月于芬兰首都赫尔辛基召开的有约 4000 人参加的第 18 届国际数学家会议（18th International Congress of Mathematician, ICM1978）上，就有匈牙利数学家把魔方带到会上并把它介绍给同行，引起各国数学家的重视。其中，在加利福尼亚大学伯克利分校取得数学博士学位、供职于伦敦南岸多科性技术学院（Polytechnic of South Bank, London）的美国数学家大卫·辛格马斯特（David Singmaster）从匈牙利数学家那里获得一个魔方以后，就痴迷其中，写出了 *Notes on Rubiks Magic Cube*、*Handbook of Cubik Math* 等专著，提出了一套魔方的标准符号记法和解法，从组合学和群论的角度出发对魔方进行深入剖析，成为世界公认的魔方数学的权威。自 20 世纪 70 年代末、80 年代初以来，世界上一些主要的数学杂志如《美国数学月刊》（*American Mathematical Monthly*）、《数学杂志》（*Mathematics Magazine*）、《数学学报》（*Mathematics Gazette*），以及一些主要的数学学术组织如美国数学会、数学及其应用学会等出版的期刊上，竞相发表学者研究魔方数学所获得的成果的论文。这些研究成果表明，魔方与群论之间有着十分密切的关系，魔方是已有的有限群的具体实例中最令人感兴趣的一个，通过魔方学习、了解、掌握群论的基本概念是一个最直接与有效的途径。1994 年由彼得·诺伊曼（Peter Neu-



mann)、格勃利尔·斯托伊 (Gabrielle A. Stoy) 和汤姆泼逊 (E. C. Tompson) 著的《群和几何学》(*Groups and Geometry*, Oxford Uni. Pr.) 一书中, 就专门包括一章讨论“魔方中的群论”(the group theory of the hungarian magic cube)。而美国海军学院数学教授大卫·乔伊纳 (David Joyner) 的专著《群论探索》(*Adventures in Group Theory*, The Johns Hopkins Uni. Pr., 2002), 更是完全以魔方及其他类似数学玩具为基础进行论述的。有关魔方数学的具体内容将在第 10 章中展开。

继数学家发现魔方同群论的密切关系之后, 物理学家发现魔方的转动规律同量子物理中的一些重要基本概念有着惊人的相似之处。这一点首先由南加利福尼亚大学电气工程系教授所罗门·高洛姆 (Solomon W. Golomb) 发现并于 1981 年 11 月在《美国物理学报》(*American Journal of Physics*) 上发表。高洛姆注意到, 在魔方的转动中, 让处于魔方八个角上的任一小块扭转 $1/3$ 圈的话 (关于角块扭转, 我们将在后面详细说明), 那么其他的所有小块中至少有一块要相应发生变动。换句话说, 不可能找到这样一个操作序列, 它使一个角块扭转 $1/3$ 圈, 而其他所有小块都保持不动。而在粒子物理学中, 人们把具有 $+1/3$ 电荷的基本粒子称为夸克 (quark), 把具有 $-1/3$ 电荷的基本粒子称为反夸克 (anti-quark)。夸克和反夸克都是不能独立存在的, 即不可能找到孤立的自由夸克或反夸克。夸克和反夸克只能以结合在一起的方式存在。一个夸克和一个反夸克结合在一起就是介子, 3 个夸克结合在一起就是重子, 具有单位电荷。以上特性被叫做“夸克禁闭原理” (the principle of quark confinement)。夸克和反夸克的结合模式共有 2187 种, 见表 1-1 左侧 (表中 Q 表示夸克, Q^- 表示反夸克)。魔方中角块扭转 $1/3$ 的各种可能组合方式正好也是 2187 种, 见表 1-1 右侧。因此, 可以把顺时针方向扭转 $1/3$ 的角块叫做魔方夸克, 逆时针方向扭转 $1/3$ 的角块叫做魔方反夸克。这样, 魔方若具有 2 个相反方向扭转的角块就是一个魔方介子, 而具有 3 个同方向扭转的角块就是一个魔方重子, 如此等等, 成为反映“夸克禁闭原理”的精确模型, 你说奇妙不奇妙。由于粒子物理比较深

1 魔方的历史

奥, 关于这个问题我们就简单介绍这一些。感兴趣的读者可参阅高洛姆的文章或李世春所著的《魔方的科学与计算机表现》(石油大学出版社, 2002)。

表 1-1 魔方角块扭转和夸克的对应关系

夸克和反夸克的可能结合模式	模式数量	魔方扭转 $1/3$ 角块数 ^①	可能组合数 ^②
$0Q + 0Q^{-}$	1	0	1
$1Q + 1Q^{-}$	56	2	56
$3Q + 0Q^{-}$ $0Q + 3Q^{-}$	56 56	3	112
$2Q + 2Q^{-}$	420	4	420
$4Q + 1Q^{-}$ $1Q + 4Q^{-}$	280 280	5	560
$6Q + 0Q^{-}$ $3Q + 3Q^{-}$ $0Q + 6Q^{-}$	28 560 28	6	616
$5Q + 2Q^{-}$ $2Q + 5Q^{-}$	168 168	7	336
$7Q + 1Q^{-}$ $4Q + 4Q^{-}$ $1Q + 7Q^{-}$	8 70 8	8	86
总计	2187		2187

①魔方中只有一个角块扭转 $1/3$ 的情况不可能存在, 如同单个夸克不能存在, 因此表中缺“1”这一栏。

②可能组合数指扭转 $1/3$ 的 n 个角块是哪几个角块, 哪个为正扭转, 哪个为逆扭转等各种可能组合的情况。

对魔方感兴趣的第三类科学家是计算机科学家。他们研究的问题有两个方面: 一是解魔方的算法, 尤其是最佳算法; 二是解魔方所需的最少转动次数是多少。对第一个方面的问题, 已经获得的解魔方算法很多, 各有优劣, 但是至今没有公认的最佳算法问世, 以至于人们把解魔