題解中心

三角法辭典

日本長澤龜之助　原著
薛德炯　吳載耀　編譯

上海新亞書店印行

題解中心

三角法辭典

日本 長澤龜之助原著
薛德炯 吳載耀 編譯

上海新亞書店印行

I. 三角法公式集　平面

測角法

◉度與法度之比較.

$$D=G-G/10,\quad G=D+D/9.$$

◉分與法分之關係.　$27\mu=50m.$

◉秒與法秒之關係.　$81\sigma=250s.$

◉度與弧度之比較.　$180\theta=\pi x.$

◉法度與弧度之比較.　$200\theta=\pi y.$

三角函數之定義

◉$\sin A=\frac{垂線}{斜邊}$.　◉$\operatorname{cosec} A=\frac{斜邊}{垂線}$.

◉$\cos A=\frac{底邊}{斜邊}$.　◉$\sec A=\frac{斜邊}{底邊}$.

◉$\tan A=\frac{垂線}{底邊}$.　◉$\cot A=\frac{底邊}{垂線}$.

◉$\operatorname{vers} A=1-\cos A.$　◉$\operatorname{covers} A=1-\sin A.$

三角函數之基本關係

◉$\sin A\times\operatorname{cosec} A=1.$　◉$\sin^2 A+\cos^2 A=1.$

◉$\cos A\times\sec A=1.$　◉$\sec^2 A=1+\tan^2 A.$

◉$\tan A\times\cot A=1.$　◉$\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A.$

◉$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.$　◉$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.$

◉$\sin A<\tan A<\sec A.$

◉$\cos A<\cot A<\operatorname{cosec} A.$

餘角之三角函數

◉$\sin(90^\circ-A)=\cos A.$

◉$\cos(90^\circ-A)=\sin A.$

◉$\tan(90^\circ-A)=\cot A.$

注意　$\operatorname{cosec} A$, $\sec A$, $\cot A$ 分別爲 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 之逆數,故從略.

補角之三角函數

◉$\sin(180^\circ-A)=\sin A.$

◉$\cos(180^\circ-A)=-\cos A.$

◉$\tan(180^\circ-A)=-\tan A.$

負角之三角函數

◉$\sin(-A)=-\sin A.$

◉$\cos(-A)=\cos A.$

◉$\tan(-A)=-\tan A.$

90°+A 之三角函數

◉$\sin(90^\circ+A)=\cos A.$

◉$\cos(90^\circ+A)=-\sin A.$

◉$\tan(90^\circ+A)=-\cot A.$

180°+A之三角函數

⊙$\sin(180°+A)=-\sin A.$

⊙$\cos(180°+A)=-\cos A.$

⊙$\tan(180°+A)=\tan A.$

270°−A之三角函數

⊙$\sin(270°-A)=-\cos A.$

⊙$\cos(270°-A)=-\sin A.$

⊙$\tan(270°-A)=\cot A.$

270°+A之三角函數

⊙$\sin(270°+A)=-\cos A.$

⊙$\cos(270°+A)=\sin A.$

⊙$\tan(270°+A)=-\cot A.$

360°−A之三角函數

⊙$\sin(360°-A)=-\sin A.$

⊙$\cos(360°-A)=\cos A.$

⊙$\tan(360°-A)=-\tan A.$

二角之三角函數

⊙$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

⊙$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$

⊙$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

⊙$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$

⊙$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$

⊙$\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$

⊙$\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}.$

⊙$\cot(A-B)=-\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot A-\cot B}.$

⊙$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B.$

⊙$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B.$

⊙$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B.$

⊙$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B.$

⊙$\sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}.$

⊙$\sin C-\sin D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}.$

⊙$\cos C+\cos D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}.$

⊙$\cos C-\cos D=-2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}.$

三角之三角函數

⊙$\sin(A+B+C)$

$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$
$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C.$

⊙$\cos(A+B+C)$

$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$
$-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C.$

⊙$\tan(A+B+C)=(\tan A+\tan B+\tan C$
$-\tan A\tan B\tan C)/(1-\tan A\tan B$
$-\tan B\tan C-\tan C\tan A)$

⊙$\cot(A+B+C)=(\cot A\times\cot B\times\cot C$
$-\cot A-\cot B-\cot C)/(\cot B\cot C$
$+\cot C\cot A+\cot A\cot B-1).$

⊙若 $A+B+C=90°$, 則

$1=\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A.$

$\cot A\cot B\cot C=\cot A+\cot B+\cot C.$

⊙若 $A+B+C=180°$，則

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$

倍角之三角函數

⊙$\sin 2A=2\sin A\cos A.$

⊙$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

$=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A.$

⊙$\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.$

⊙$\cot 2A=\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}.$

⊙$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A.$

⊙$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A.$

⊙$\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}.$

⊙$\cot 3A=\dfrac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}.$

分角之三角函數

⊙$\cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}.$

⊙$\sin\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}.$

⊙$2\cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}.$

⊙$2\sin\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}.$

⊙$\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{A}{2}+45°\right)=\pm\sqrt{1+\sin A}.$

⊙$\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{A}{2}+45°\right)=\pm\sqrt{1-\sin A}.$

⊙$\tan\dfrac{A}{2}=(-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A})/\tan A$

$=(-1\pm\sec A)\cot A.$

普偏角之三角函數

⊙$\cos(n\cdot 360°\pm A)=\cos A.$

⊙$\sin\{n\cdot 180°+(-1)^n A\}=\sin A.$

⊙$\tan(n\cdot 180+A)=\tan A.$

三角形四邊形等

⊙$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}.$

⊙$a=b\cos C+c\cos B$

⊙$b=c\cos A+a\cos C$

⊙$c=a\cos B+b\cos A$

⊙$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

⊙$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

⊙$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

⊙$\cos A=(b^2+c^2-a^2)/2bc$

⊙$\cos B=(c^2+a^2-b^2)/2ca$

⊙$\cos C=(a^2+b^2-c^2)/2ab$

次式中假定 $s=\frac{1}{2}(a+b+c).$

⊙$\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

⊙$\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

⊙$\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

⊙$\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$

⊙$\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}$

⊙$\cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$

◉$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

◉$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$

◉$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

◉$(b+c)\sin\frac{1}{2}A=a\cos\frac{1}{2}(B-C)$

◉$(c+a)\sin\frac{1}{2}B=b\cos\frac{1}{2}(C-A)$

◉$(a+b)\sin\frac{1}{2}C=c\cos\frac{1}{2}(A-B)$

◉$\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\tan\frac{B-C}{2}$

◉$\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}=\tan\frac{C-A}{2}$

◉$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}=\tan\frac{A-B}{2}$

◉$\sin A=\frac{2\Delta}{bc}$. $\sin B=\frac{2\Delta}{ca}$. $\sin C=\frac{2\Delta}{ab}$

但 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

◉$r=(s-a)\tan\frac{A}{2}$. $r_1=s\tan\frac{A}{2}$

◉$r_2=s\tan\frac{B}{2}$. $r_3=s\tan\frac{C}{2}$

◉至 a 之中線$=\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2+2bc\cos A)}$.

◉角 A 之內二等分線$=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

◉角 A 之外二等分線$=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b\sim c}$

◉$\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs$

$=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)$

$=\frac{1}{2}h_a a=\frac{abc}{4R}$.

◉圓之內接四邊形之面積

$=\sqrt{\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\}}$.

◉任意四邊形之面積

$=\sqrt{\left\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\times\cos^2\frac{A+C}{2}\right\}}$.

◉外切四邊形之面積$=\sqrt{abcd}\cdot\sin\frac{A+C}{2}$.

◉內接且外切四邊形之面積$=\sqrt{abcd}$.

◉正多角形之邊心距 $r=a/2\tan\frac{\pi}{n}$.

◉正多角形之半徑 $R=a/2\sin\frac{\pi}{n}$.

◉同面積$=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}=nr^2\tan\frac{\pi}{n}$.

De Moivre 氏定理

◉$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

◉$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\cdots\cdots$.

◉$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\cdots\cdots$.

三角函數之展開

◉$\sin n\theta=n\sin\theta-\frac{n(n^2-1)}{3!}\sin^3\theta+\frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\theta\cdots\cdots$.

◉$\cos n\theta=\cos\theta\left\{1-\frac{n^2-1}{2!}\sin^2\theta+\frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4\theta-\cdots\cdots\right\}$.

三角函數之指數值

◉$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$.

◉$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$.

◉$i\tan\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$.

級數之和

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+4\beta)+\cdots+\cos\{\alpha+2(n-1)\beta\}=\frac{\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}.$$

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+2\beta)+\sin(\alpha+4\beta)+\cdots+\sin\{\alpha+2(n-1)\beta\}=\frac{\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}.$$

$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots\cdots+\cos\left\{\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}=0.$$

$$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots\cdots+\sin\left\{\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}=0.$$

三角函數式之因數分解

◉n 爲偶數時，$x^n-1=(x-1)(x+1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left\{x^2-2x\cos\frac{n-4}{n}\pi+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\frac{n-2}{n}\pi+1\right\}.$

◉n 爲奇數時，$x^n-1=(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left\{x^2-2x\cos\frac{n-3}{n}\pi+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\frac{n-1}{n}\pi+1\right\}.$

◉n 爲偶數時，$x^n+1=\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{5\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{n-3}{n}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{n-1}{n}\pi+1\right).$

◉n 爲奇數時，$x^n+1=(x+1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{n-4}{n}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{n-2}{n}\pi+1\right).$

◉$x^n-x^{-n}=(x-x^{-n})\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\times\cdots\cdots\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{n-1}{n}\pi\right).$

◉$x^n+x^{-n}=\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\cdots\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right).$

◉$x^{2n}-2x^n\cos\theta+1=\left(x^2-2x\cos\frac{\theta}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi+\theta}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi+\theta}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left\{x^2-2x\cos\frac{(2n-4)\pi+\theta}{n}+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\frac{(2n-2)\pi+\theta}{n}+1\right\}.$

◉$x^n+x^{-n}-2\cos n\theta=(x+x^{-1}-2\cos\theta)\left\{x+x^{-1}-2\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right\}\times\cdots\cdots\left\{x+x^{-1}-2\cos\left(\theta+\frac{2n-2}{n}\right)\right\}.$

II. 三角法公式集 球面

基本公式

⦿$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$

⦿$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B.$

⦿$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$

sin A 之公式

⦿$\sin A=\sqrt{}(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \times\cos b\cos c)/(\sin b\sin c)$

$=2n/(\sin b\sin c).$

但 $\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}^{\frac{1}{2}}=n$ 及 $2s=a+b+c.$

餘切正弦之公式

⦿$\cot a\sin b=\cot A\sin C+\cos b\cos C.$

⦿$\cot b\sin a=\cot B\sin C+\cos a\cos C.$

⦿$\cot b\sin c=\cot B\sin A+\cos c\cos A.$

⦿$\cot c\sin b=\cot C\sin A+\cos b\cos A.$

⦿$\cot c\sin a=\cot C\sin B+\cos a\cos B.$

⦿$\cot a\sin c=\cot A\sin B+\cos c\cos B.$

正弦比例

⦿$\sin A/\sin a=\sin B/\sin b=\sin C/\sin c$

$=2n/(\sin a\sin b\sin c).$

半角之公式

⦿$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}.$

⦿$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}.$

⦿$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}.$

半弧之公式

⦿$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}.$

⦿$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}.$

⦿$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}.$

但 $2S=A+B+C.$

Napier 氏公式

⦿$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2}.$

⦿$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2}.$

⦿$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{c}{2}.$

⊙ $\tan\frac{1}{2}(a-b)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\dfrac{c}{2}$.

Delambre 氏比例式

⊙ $\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$.

⊙ $\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$.

⊙ $\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$.

⊙ $\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$.

球面直角三角形

[C 爲直角]

⊙ $\sin b=\sin B\sin c$

⊙ $\sin a=\sin A\sin c$

⊙ $\tan a=\cos B\tan c$

⊙ $\tan b=\cos A\tan c$

⊙ $\tan b=\tan B\sin a$

⊙ $\tan a=\tan A\sin b$

⊙ $\tan A\tan B=1/\cos c$

⊙ $\cot A\cot B=\cos c$

內切圓傍切圓外接圓

⊙ $\tan r=\dfrac{n}{\sin s}=\tan\dfrac{A}{2}\sin(s-a)$

$=\dfrac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a$

$=\dfrac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$.

但 $N=\{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\times\cos(S-C)\}^{\frac{1}{2}}$.

⊙ $\cot r=\dfrac{1}{2N}\{\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)\}$.

⊙ $\tan r_1=\dfrac{n}{\sin(s-a)}=\tan\dfrac{A}{2}\sin s$

$=\dfrac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a$

$=\dfrac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$.

⊙ $\cot r_1=\dfrac{1}{2N}\{-\cos S-\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)\}$.

⊙ $\tan R=-\dfrac{\cos S}{N}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$

$=\dfrac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos(S-A)}=\dfrac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{n}$

$=\dfrac{1}{2n}\{\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s\}$.

⊙ $\tan R_1=\dfrac{\cos(S-A)}{N}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$

$=\dfrac{\tan\frac{1}{2}a}{-\cos S}=\dfrac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{n}$

$=\dfrac{1}{2n}\{\sin s-\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)\}$.

⊙ $(\cot r+\tan R)^2=\dfrac{1}{4n^2}(\sin a+\sin b+\sin c)^2-1$.

⊙ $(\cot r_1-\tan R)^2=\dfrac{1}{4n^2}(\sin b+\sin c-\sin a)^2-1$.

面 積

⊙球面三角形 $ABC=(A+B+C-\pi)r^2$.

⊙多角形 $=\{\Sigma-(n-2)\pi\}r^2$.

[但 Σ 爲多角形各角之和].

Cagnoli 氏 定 理

⊙$\sin\frac{1}{2}E=\frac{\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$. 但 $E=A+B+C-\pi$.

Lhuilier 氏 定 理

⊙$\tan\frac{1}{4}E=\sqrt{\{\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)\}}$.

III. 三角法諸表

三角函數相互之關係

	$\sin\theta=x$	$\cos\theta=x$	$\tan\theta=x$	$\cot\theta=x$	$\sec\theta=x$	$\operatorname{cosec}\theta=x$
$\sin\theta=$	x	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos\theta=$	$\sqrt{(1-x^2)}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$
$\tan\theta=$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\cot\theta=$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\sqrt{(x^2-1)}$
$\sec\theta=$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\operatorname{cosec}\theta=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x

逆三角函數相互之關係

	$\sin^{-1}$	$\cos^{-1}$	$\tan^{-1}$	$\cot^{-1}$	$\sec^{-1}$	cosec^{-1}
$\sin^{-1}x=$	x	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$
$\cos^{-1}x=$	$\sqrt{(1-x^2)}$	x	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
$\tan^{-1}x=$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$
$\cot^{-1}x=$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$
$\sec^{-1}x=$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\mathrm{cosec}^{-1}x=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x

雙曲線函數相互之關係

	$\sin hu=x$	$\cos hu=x$	$\tan hu=x$	$\cot hu=x$	$\sec hu=x$	$\mathrm{cosec}\, hu=x$
$\sin hu=$	x	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos hu=$	$\sqrt{(1+x^2)}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$
$\tan hu=$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$
$\cot hu=$	$\frac{\sqrt{(x^2+1)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\sqrt{(1+x^2)}$
$\sec hu=$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$
$\mathrm{cosec}\, hu=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	x

三角函數之符號及變化

象限 / 函數	第一		第二		第三		第四	
正弦	正	由 0 至 1	正	由 1 至 0	負	由 0 至 -1	負	由 -1 至 0
餘割	正	由 ∞ 至 1	正	由 1 至 ∞	負	由 -∞ 至 -1	負	由 -1 至 -∞
餘弦	正	由 1 至 0	負	由 0 至 -1	負	由 -1 至 0	正	由 0 至 1
正割	正	由 1 至 ∞	負	負 -∞ 至 -1	負	由 -1 至 -∞	正	由 ∞ 至 1
正切	正	由 0 至 ∞	負	由 -∞ 至 0	正	由 0 至 ∞	負	由 -∞ 至 0
餘切	正	由 ∞ 至 0	負	由 0 至 -∞	正	由 ∞ 至 0	負	由 0 至 -∞

三角函數大小

度 / 函數	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	度 / 函數
sin.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	正弦
cos.	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	餘弦
tan.	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	正切
cot.	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	餘切
sec.	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	正割
cosec.	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	餘割

特別角之三角函數

	sin	cos	tan	cot	
$\frac{1}{12}\pi=15^\circ$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}\pi=75^\circ$
$\frac{1}{10}\pi=18^\circ$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{2}{5}\pi=72^\circ$
$\frac{1}{5}\pi=36^\circ$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{3}{10}\pi=54^\circ$
	cos	sin	cot	tan	

特別角之正弦

$\sin\left(3^\circ=\frac{1}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}$
$\sin\left(6^\circ=\frac{1}{30}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1)$
$\sin\left(9^\circ=\frac{1}{20}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}})$
$\sin\left(12^\circ=\frac{1}{15}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3})$
$\sin\left(15^\circ=\frac{1}{12}\pi\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$\sin\left(18^\circ=\frac{1}{10}\pi\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$
$\sin\left(21^\circ=\frac{7}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\}$
$\sin\left(24^\circ=\frac{2}{15}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}})$
$\sin\left(27^\circ=\frac{3}{20}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{10}+\sqrt{2})$
$\sin\left(30^\circ=\frac{1}{6}\pi\right)$	$\frac{1}{2}$
$\sin\left(33^\circ=\frac{11}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}$

索引例言

●本辭典以問題解法為中心，翻檢之時，有待於靈便之索引，自屬必要. ●但本辭典與他種辭典不同，帶有練習問題之性質，故全書順序，不論在平面三角法之部，或球面三角法之部，皆始自初步問題，逐步遞進，由淺入深，以期單用本書，卽能進窺堂奧，而無事他求. 為完成辭典專有之特質，故另編索引，分册裝訂，俾使用辭典者，得隨時檢得所需之問題. ●索引之編製，一以問題之種類為歸；分類之法，詳於索引目次，讀者可先詳覽一過，以期瞭然於胸. ●檢索之時，明辨所查問題，係屬何種性質，先就目次得其所屬，檢明頁數，再查索引本文，自能檢得所求之題. ●但關於本書分類方法，有下列若干條項，應予特別注意. ●單角及複角之三角函數中，如恆等式，三角形之性質等問題，為數至夥，故又就 sin.，cos.，tan.，或其組合，或其次數，而為之分類. ●三角形之性質中，關於複雜解法之問題，按其所究之形，以為類別標的，故分為三角形，平行四邊形，梯形等. ●測量應用之理論，問題之數，亦不在少，故或則依其所求之目的物，而區分為高，距離等，或則依其題文中之主要物，而區分為仰角，俯角，輕氣球等. ●平面三角法中，自 De Moivre 氏定理以後，及球面三角法全部，問題之數，不能謂多，故索引之順序，一仍辭典之舊貫.

三角法辭典索引

目 次

第一門 平面三角之部

第三 普徧角 22

第四 和及差之公式 28