

題 解 中 心
三角法辭典

日本長澤龜之助 原著
薛德炯 吳載耀 編譯

上海新亞書店印行

中心解題
三角法辭典

日本 長澤龜之助 原著
薛德炯 吳載耀 編譯

上海新亞書店印行

127329

I. 三角法公式集 平面

測 角 法

◎度與法度之比較.

$$D = G - G/10, G = D + D/9.$$

◎分與法分之關係. $27\mu = 50m.$

◎秒與法秒之關係. $81\sigma = 250s.$

◎度與弧度之比較. $180\theta = \pi x.$

◎法度與弧度之比較. $200\theta = \pi y.$

餘角之三角函數

◎ $\sin(90^\circ - A) = \cos A.$

◎ $\cos(90^\circ - A) = \sin A.$

◎ $\tan(90^\circ - A) = \cot A.$

注意 cosec A, sec A, cot A 分別爲 sin A, cos A, tan A 之逆數,故從略.

三角函數之定義

◎ $\sin A = \frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$

◎ $\text{cosec} A = \frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$

◎ $\cos A = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$

◎ $\sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$

◎ $\tan A = \frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$

◎ $\cot A = \frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$

◎ $\text{vers} A = 1 - \cos A. \quad \text{◎ covers} A = 1 - \sin A.$

補角之三角函數

◎ $\sin(180^\circ - A) = \sin A.$

◎ $\cos(180^\circ - A) = -\cos A.$

◎ $\tan(180^\circ - A) = -\tan A.$

負角之三角函數

◎ $\sin(-A) = -\sin A.$

◎ $\cos(-A) = \cos A.$

◎ $\tan(-A) = -\tan A.$

三角函數之基本關係

◎ $\sin A \times \text{cosec} A = 1. \quad \text{◎} \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$

◎ $\cos A \times \sec A = 1. \quad \text{◎} \sec^2 A = 1 + \tan^2 A.$

◎ $\tan A \times \cot A = 1. \quad \text{◎} \text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A.$

◎ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}. \quad \text{◎} \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}.$

◎ $\sin A < \tan A < \sec A.$

◎ $\cos A < \cot A < \text{cosec} A.$

$90^\circ + A$ 之三角函數

◎ $\sin(90^\circ + A) = \cos A.$

◎ $\cos(90^\circ + A) = -\sin A.$

◎ $\tan(90^\circ + A) = -\cot A.$

180°+A 之三角函數

$$\odot \sin(180^\circ + A) = -\sin A.$$

$$\odot \cos(180^\circ + A) = -\cos A.$$

$$\odot \tan(180^\circ + A) = \tan A.$$

270°-A 之三角函數

$$\odot \sin(270^\circ - A) = -\cos A.$$

$$\odot \cos(270^\circ - A) = -\sin A.$$

$$\odot \tan(270^\circ - A) = \cot A.$$

270°+A 之三角函數

$$\odot \sin(270^\circ + A) = -\cos A.$$

$$\odot \cos(270^\circ + A) = \sin A.$$

$$\odot \tan(270^\circ + A) = -\cot A.$$

360°-A 之三角函數

$$\odot \sin(360^\circ - A) = -\sin A.$$

$$\odot \cos(360^\circ - A) = \cos A.$$

$$\odot \tan(360^\circ - A) = -\tan A.$$

二角之三角函數

$$\odot \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

$$\odot \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

$$\odot \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

$$\odot \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

$$\odot \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

$$\odot \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}.$$

$$\odot \cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}.$$

$$\odot \cot(A-B) = -\frac{\cot A \cot B + 1}{\cot A - \cot B}.$$

$$\odot \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B.$$

$$\odot \sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B.$$

$$\odot \cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B.$$

$$\odot \cos(A+B) - \cos(A-B) = -2 \sin A \sin B.$$

$$\odot \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}.$$

$$\odot \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}.$$

$$\odot \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}.$$

$$\odot \cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}.$$

三角之三角函數

$$\odot \sin(A+B+C)$$

$$= \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C \\ + \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C.$$

$$\odot \cos(A+B+C)$$

$$= \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C \\ - \sin A \cos B \sin C - \sin A \sin B \cos C.$$

$$\odot \tan(A+B+C) = (\tan A + \tan B + \tan C \\ - \tan A \tan B \tan C) / (1 - \tan A \tan B \\ - \tan B \tan C - \tan C \tan A)$$

$$\odot \cot(A+B+C) = (\cot A \times \cot B \times \cot C \\ - \cot A - \cot B - \cot C) / (\cot B \cot C \\ + \cot C \cot A + \cot A \cot B - 1).$$

$$\odot \text{若 } A+B+C=90^\circ, \text{ 則}$$

$$1 = \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A.$$

$$\cot A \cot B \cot C = \cot A + \cot B + \cot C.$$

$$\odot \text{若 } A+B+C=180^\circ, \text{ 則}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

$$\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1.$$

倍角之三角函數

$$\odot \sin 2A = 2 \sin A \cos A.$$

$$\odot \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A.$$

$$\odot \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

$$\odot \cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}.$$

$$\odot \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A.$$

$$\odot \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A.$$

$$\odot \tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}.$$

$$\odot \cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3 \cot A}{3 \cot^2 A - 1}.$$

分角之三角函數

$$\odot \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}.$$

$$\odot \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}.$$

$$\odot 2 \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A}.$$

$$\odot 2 \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin A} \mp \sqrt{1 - \sin A}.$$

$$\odot \sqrt{2} \sin \left(\frac{A}{2} + 45^\circ \right) = \pm \sqrt{1 + \sin A}.$$

$$\odot \sqrt{2} \cos \left(\frac{A}{2} + 45^\circ \right) = \pm \sqrt{1 - \sin A}.$$

$$\odot \tan \frac{A}{2} = (-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 A}) / \tan A$$

$$= (-1 \pm \sec A) \cot A.$$

普偏角之三角函數

$$\odot \cos(n \cdot 360^\circ \pm A) = \cos A.$$

$$\odot \sin\{n \cdot 180^\circ + (-1)^n A\} = \sin A.$$

$$\odot \tan(n \cdot 180^\circ + A) = \tan A.$$

三角形四邊形等

$$\odot \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$\odot a = b \cos C + c \cos B$$

$$\odot b = c \cos A + a \cos C$$

$$\odot c = a \cos B + b \cos A$$

$$\odot a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\odot b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$\odot c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\odot \cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc$$

$$\odot \cos B = (c^2 + a^2 - b^2) / 2ca$$

$$\odot \cos C = (a^2 + b^2 - c^2) / 2ab$$

次式中假定 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

$$\odot \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\odot \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$$

$$\odot \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\odot \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\odot \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$\odot \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\odot \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\odot \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\odot \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$\odot (b+c) \sin \frac{1}{2}A = a \cos \frac{1}{2}(B-C)$$

$$\odot (c+a) \sin \frac{1}{2}B = b \cos \frac{1}{2}(C-A)$$

$$\odot (a+b) \sin \frac{1}{2}C = c \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\odot \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} = \tan \frac{B-C}{2}$$

$$\odot \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2} = \tan \frac{C-A}{2}$$

$$\odot \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} = \tan \frac{A-B}{2}$$

$$\odot \sin A = \frac{2\Delta}{bc}, \quad \sin B = \frac{2\Delta}{ca}, \quad \sin C = \frac{2\Delta}{ab}$$

$$\text{但 } \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\odot r = (s-a) \tan \frac{A}{2}, \quad r_1 = s \tan \frac{A}{2}$$

$$\odot r_2 = s \tan \frac{B}{2}, \quad r_3 = s \tan \frac{C}{2}$$

$$\odot \text{至 } a \text{ 之中線} = \frac{1}{2} \sqrt{(b^2 + c^2 + 2bc \cos A)}$$

$$\odot \text{角 } A \text{ 之內二等分線} = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

$$\odot \text{角 } A \text{ 之外二等分線} = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b \sim c}$$

$$\odot \Delta = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rs$$

$$= r_1(s-a) = r_2(s-b) = r_3(s-c)$$

$$= \frac{1}{2} h_a a = \frac{abc}{4R}$$

$$\odot \text{圓之內接四邊形之面積}$$

$$= \sqrt{\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\}}.$$

$$\odot \text{任意四邊形之面積}$$

$$= \sqrt{\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \times \cos^2 \frac{A+C}{2}\}}.$$

$$\odot \text{外切四邊形之面積} = \sqrt{abcd} \cdot \sin \frac{A+C}{2}.$$

$$\odot \text{內接且外切四邊形之面積} = \sqrt{abcd}.$$

$$\odot \text{正多角形之邊心距 } r = a/2 \tan \frac{\pi}{n}.$$

$$\odot \text{正多角形之半徑 } R = a/2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

$$\odot \text{同面積} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} = nr^2 \tan \frac{\pi}{n}.$$

De Moivre 氏定理

$$\odot (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

$$\odot \cos \alpha = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \dots$$

$$\odot \sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$$

三角函數之展開

$$\odot \sin n\theta = n \sin \theta - \frac{n(n^2-1)}{3!} \sin^3 \theta + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!} \sin^5 \theta \dots$$

$$\odot \cos n\theta = \cos \theta \left\{ 1 - \frac{n^2-1}{2!} \sin^2 \theta + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!} \sin^4 \theta - \dots \right\}$$

三角函數之指數值

$$\odot \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}).$$

$$\odot \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

$$\odot i \tan \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}.$$

級數之和

$$\begin{aligned} \cos a + \cos(a+2\beta) + \cos(a+4\beta) + \cdots + \cos\{a \\ + 2(n-1)\beta\} &= \frac{\cos\{a+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin \beta} \\ \sin a + \sin(a+2\beta) + \sin(a+4\beta) + \cdots + \sin\{a \\ + 2(n-1)\beta\} &= \frac{\sin\{a+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos a + \cos\left(a + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(a + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots \\ + \cos\left\{a + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} &= 0, \\ \sin a + \sin\left(a + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(a + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots \\ + \sin\left\{a + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} &= 0. \end{aligned}$$

三角函數式之因數分解

$$\begin{aligned} \textcircled{\bullet} n \text{ 爲偶數時, } x^n - 1 &= (x-1)(x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{n} + 1\right) \times \cdots \\ &\cdots \left\{x^2 - 2x\cos\frac{n-4}{n}\pi + 1\right\} \left\{x^2 - 2x\cos\frac{n-2}{n}\pi + 1\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\bullet} n \text{ 爲奇數時, } x^n - 1 &= (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{n} + 1\right) \times \cdots \\ &\cdots \left\{x^2 - 2x\cos\frac{n-3}{n}\pi + 1\right\} \left\{x^2 - 2x\cos\frac{n-1}{n}\pi + 1\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\bullet} n \text{ 爲偶數時, } x^n + 1 &= \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{n} + 1\right) \times \cdots \\ &\cdots \left(x^2 - 2x\cos\frac{n-3}{n}\pi + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{n-1}{n}\pi + 1\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\bullet} n \text{ 爲奇數時, } x^n + 1 &= (x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1\right) \times \cdots \\ &\cdots \left(x^2 - 2x\cos\frac{n-4}{n}\pi + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{n-2}{n}\pi + 1\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\bullet} x^n - x^{-n} &= (x - x^{-n})\left(x + x^{-1} - 2\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(x + x^{-1} - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right) \times \cdots \\ &\cdots \left(x + x^{-1} - 2\cos\frac{n-1}{n}\pi\right). \end{aligned}$$

$$\textcircled{\bullet} x^n + x^{-n} = \left(x + x^{-1} - 2\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(x + x^{-1} - 2\cos\frac{3\pi}{2n}\right) \cdots \left(x + x^{-1} - 2\cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right).$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\bullet} x^{2n} - 2x^n\cos\theta + 1 &= \left(x^2 - 2x\cos\frac{\theta}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi+\theta}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi+\theta}{n} + 1\right) \\ &\times \cdots \left\{x^2 - 2x\cos\frac{(2n-4)\pi+\theta}{n} + 1\right\} \left\{x^2 - 2x\cos\frac{(2n-2)\pi+\theta}{n} + 1\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\bullet} x^n + x^{-n} - 2\cos n\theta &= (x + x^{-1} - 2\cos\theta)\left\{x + x^{-1} - 2\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right)\right\} \times \cdots \\ &\cdots \left\{x + x^{-1} - 2\cos\left(\theta + \frac{2n-2}{n}\pi\right)\right\}. \end{aligned}$$

II. 三角法公式集 球面

基本公式

$$\odot \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

$$\odot \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B.$$

$$\odot \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

sin A 之公式

$$\odot \sin A = \sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \times \cos b \cos c) / (\sin b \sin c)}$$

$$= 2n / (\sin b \sin c).$$

$$\text{但 } \{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= n \text{ 及 } 2s = a + b + c.$$

餘切正弦之公式

$$\odot \cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos b \cos C.$$

$$\odot \cot b \sin a = \cot B \sin C + \cos a \cos C.$$

$$\odot \cot b \sin c = \cot B \sin A + \cos c \cos A.$$

$$\odot \cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos b \cos A.$$

$$\odot \cot c \sin a = \cot C \sin B + \cos a \cos B.$$

$$\odot \cot a \sin c = \cot A \sin B + \cos c \cos B.$$

正弦比例

$$\odot \sin A / \sin a = \sin B / \sin b = \sin C / \sin c$$

$$= 2n / (\sin a \sin b \sin c).$$

半角之公式

$$\odot \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}.$$

$$\odot \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}.$$

$$\odot \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}.$$

半弧之公式

$$\odot \sin \frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}}.$$

$$\odot \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-B) \cos(S-C)}{\sin B \sin C}}.$$

$$\odot \tan \frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-B) \cos(S-C)}}.$$

$$\text{但 } 2S = A + B + C.$$

Napier 氏公式

$$\odot \tan \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \frac{C}{2}.$$

$$\odot \tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \frac{C}{2}.$$

$$\odot \tan \frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \tan \frac{c}{2}.$$

$$\textcircled{\bullet} \tan \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \tan \frac{c}{2}$$

Delambre 氏比例式

$$\textcircled{\bullet} \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}C$$

$$\textcircled{\bullet} \sin \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}C$$

$$\textcircled{\bullet} \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C$$

$$\textcircled{\bullet} \cos \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C$$

球面直角三角形

[C 爲直角]

$$\textcircled{\bullet} \sin b = \sin B \sin c$$

$$\textcircled{\bullet} \sin a = \sin A \sin c$$

$$\textcircled{\bullet} \tan a = \cos B \tan c$$

$$\textcircled{\bullet} \tan b = \cos A \tan c$$

$$\textcircled{\bullet} \tan b = \tan B \sin a$$

$$\textcircled{\bullet} \tan a = \tan A \sin b$$

$$\textcircled{\bullet} \tan A \tan B = 1/\cos c$$

$$\textcircled{\bullet} \cot A \cot B = \cos c$$

內切圓傍切圓外接圓

$$\textcircled{\bullet} \tan r = \frac{n}{\sin s} = \tan \frac{A}{2} \sin(s-a)$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A} \sin a$$

$$= \frac{N}{2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}$$

$$\text{但 } N = \{-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B)$$

$$\times \cos(S-C)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\textcircled{\bullet} \cot r = \frac{1}{2N} \{ \cos S + \cos(S-A) + \cos(S-B) + \cos(S-C) \}$$

$$\textcircled{\bullet} \tan r_1 = \frac{n}{\sin(s-a)} = \tan \frac{A}{2} \sin s$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A} \sin a$$

$$= \frac{N}{2 \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}$$

$$\textcircled{\bullet} \cot r_1 = \frac{1}{2N} \{ -\cos S - \cos(S-A) + \cos(S-B) + \cos(S-C) \}$$

$$\textcircled{\bullet} \tan R = -\frac{\cos S}{N} = \frac{\sin \frac{1}{2}a}{\sin A \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\tan \frac{1}{2}a}{\cos(S-A)} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{n}$$

$$= \frac{1}{2n} \{ \sin(s-a) + \sin(s-b) + \sin(s-c) - \sin s \}$$

$$\textcircled{\bullet} \tan R_1 = \frac{\cos(S-A)}{N} = \frac{\sin \frac{1}{2}a}{\sin A \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\tan \frac{1}{2}a}{-\cos S} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{n}$$

$$= \frac{1}{2n} \{ \sin s - \sin(s-a) + \sin(s-b) + \sin(s-c) \}$$

$$\textcircled{\bullet} (\cot r + \tan R)^2 = \frac{1}{4n^2} (\sin a + \sin b + \sin c)^2 - 1$$

$$\textcircled{\bullet} (\cot r_1 - \tan R)^2 = \frac{1}{4n^2} (\sin b + \sin c - \sin a)^2 - 1$$

面積

$$\textcircled{\bullet} \text{球面三角形 } ABC = (A+B+C-\pi)r^2$$

$$\textcircled{\bullet} \text{多角形} = \{ \Sigma - (n-2)\pi \} r^2$$

[但 Σ 爲多角形各角之和]

Cagnoli 氏 定理

$$\odot \sin \frac{1}{2}E = \frac{\sqrt{\{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)\}}}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}, \text{ 但 } E = A + B + C - \pi.$$

Lhuillier 氏 定理

$$\odot \tan \frac{1}{4}E = \sqrt{\{\tan \frac{1}{2}s \tan \frac{1}{2}(s-a) \tan \frac{1}{2}(s-b) \tan \frac{1}{2}(s-c)\}}.$$

III. 三角法諸表

三角函數相互之關係

	$\sin \theta = x$	$\cos \theta = x$	$\tan \theta = x$	$\cot \theta = x$	$\sec \theta = x$	$\operatorname{cosec} \theta = x$
$\sin \theta =$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos \theta =$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
$\tan \theta =$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\cot \theta =$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$
$\sec \theta =$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{cosec} \theta =$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x

逆三角函數相互之關係

	$\sin^{-1}$	$\cos^{-1}$	$\tan^{-1}$	$\cot^{-1}$	$\sec^{-1}$	$\operatorname{cosec}^{-1}$
$\sin^{-1}x =$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$
$\cos^{-1}x =$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1}x =$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
$\cot^{-1}x =$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$
$\sec^{-1}x =$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{cosec}^{-1}x =$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x

雙曲線函數相互之關係

	$\sinh u = x$	$\cosh u = x$	$\tanh u = x$	$\coth u = x$	$\operatorname{sech} u = x$	$\operatorname{cosech} u = x$
$\sinh u =$	x	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cosh u =$	$\sqrt{1+x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
$\tanh u =$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\coth u =$	$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1+x^2}$
$\operatorname{sech} u =$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{cosech} u =$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	x

三角函數之符號及變化

象限 函數	第一		第二		第三		第四	
正弦	正	由 0 至 1	正	由 1 至 0	負	由 0 至 -1	負	由 -1 至 0
餘割		由 ∞ 至 1		由 1 至 ∞		由 $-\infty$ 至 -1		由 -1 至 $-\infty$
餘弦	正	由 1 至 0	負	由 0 至 -1	負	由 -1 至 0	正	由 0 至 1
正割		由 1 至 ∞		由 $-\infty$ 至 -1		由 -1 至 $-\infty$		由 ∞ 至 1
正切	正	由 0 至 ∞	負	由 $-\infty$ 至 0	正	由 0 至 ∞	負	由 $-\infty$ 至 0
餘切		由 ∞ 至 0		由 0 至 $-\infty$		由 ∞ 至 0		由 0 至 $-\infty$

三角函數大小

度 函數	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	度 函數
sin.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	正弦
cos.	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	餘弦
tan.	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	正切
cot.	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	餘切
sec.	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	正割
cosec.	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	餘割

特別角之三角函數

	sin	cos	tan	cot	
$\frac{1}{12}\pi = 15^\circ$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}\pi = 75^\circ$
$\frac{1}{10}\pi = 18^\circ$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{4}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}+2\sqrt{5}$	$\frac{2}{5}\pi = 72^\circ$
$\frac{1}{5}\pi = 36^\circ$	$\frac{\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5}-2\sqrt{5}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{3}{10}\pi = 54^\circ$
	cos	sin	cot	tan	

特別角之正弦

$\sin\left(3^\circ = \frac{1}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5}+\sqrt{5}\}$
$\sin\left(6^\circ = \frac{1}{30}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30}-6\sqrt{5}-\sqrt{5}-1)$
$\sin\left(9^\circ = \frac{1}{20}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{5})$
$\sin\left(12^\circ = \frac{1}{15}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}+2\sqrt{5}-\sqrt{15}+\sqrt{3})$
$\sin\left(15^\circ = \frac{1}{12}\pi\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$\sin\left(18^\circ = \frac{1}{10}\pi\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$
$\sin\left(21^\circ = \frac{7}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5}-\sqrt{5}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\}$
$\sin\left(24^\circ = \frac{2}{15}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10}-2\sqrt{5})$
$\sin\left(27^\circ = \frac{3}{20}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(2\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{2})$
$\sin\left(30^\circ = \frac{1}{6}\pi\right)$	$\frac{1}{2}$
$\sin\left(33^\circ = \frac{11}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5}+\sqrt{5}\}$

索引例言

●本辭典以問題解法爲中心，翻檢之時，有待於靈便之索引，自屬必要。●但本辭典與他種辭典不同，帶有練習問題之性質，故全書順序，不論在平面三角法之部，或球面三角法之部，皆始自初步問題，逐步遞進，由淺入深，以期單用本書，即能進窺堂奧，而無事他求。爲完成辭典專有之特質，故另編索引，分冊裝訂，俾使用辭典者，得隨時檢得所需之問題。●索引之編製，一以問題之種類爲歸；分類之法，詳於索引目次，讀者可先詳覽一過，以期瞭然於胸。●檢索之時，明辨所查問題，係屬何種性質，先就目次得其所屬，檢明頁數，再查索引本文，自能檢得所求之題。●但關於本書分類方法，有下列若干條項，應予特別注意。●單角及複角之三角函數中，如恆等式，三角形之性質等問題，爲數至夥，故又就 $\sin.$, $\cos.$, $\tan.$, 或其組合，或其次數，而爲之分類。●三角形之性質中，關於複雜解法之問題，按其所究之形，以爲類別標的，故分爲三角形，平行四邊形，梯形等。●測量應用之理論，問題之數，亦不在少，故或則依其所求之目的物，而區分爲高，距離等，或則依其題文中之主要物，而區分爲仰角，俯角，輕氣球等。●平面三角法中，自 De Moivre 氏定理以後，及球面三角法全部，問題之數，不能謂多，故索引之順序，一仍辭典之舊貫。

三角法辭典索引

目次

第一門 平面三角之部

第一 測角法 1

I. 六十分法 1 II. 弧度法 3

III. 六十分法與百分法 4 IV. 六十分法與弧度法 5

V. 百分法與弧度法 6

VI. 六十分法, 百分法, 與弧度法 6

VII. 雜 6

第二 銳角之三角函數 7

I. 關於直角三角形之三角函數 7

(1) 算術的數值 7 (2) 代數的數值 8

II. 關於正方形四邊形之三角函數 8

III. 餘角之三角函數 8

IV. 三角形之證明的關係 9

V. 角之三角函數 9

VI. 知函數之一求其他 9

(1) sin. 已知 9 (2) cos. 已知 10

(3) tan. 已知 10 (4) cot. 已知 10

(5) sec. 已知 11 (6) cosec. 已知 11

(7) vers. 已知 11

VII. 單角之恆等式 11

(1) sin. cos. 二次 11 (2) sin. cos. 三次 12

(3) sin. cos. 四次 12 (4) sin. cos. 六次 12

(5) sin. cos. 八次 12 (6) sin. cos. 分數式 13

(7) sin. tan. 13 (8) sin. cot. 13

(9) sin. sec. 13 (10) cos. sec. 13

(11) cos. tan. 13 (12) cos. cot. 13

(13) cos. cosec. 14 (14) tan. sec. 14

(15) tan. cosec. 14 (16) cot. cosec. 14

(17) sec. cosec. 14 (18) sin. cos. tan. 14

(19) sin. cos. cot. ...	...15	(20) sin. cos. cosec. ...	15
(21) sin. tan. sec. ...	15	(22) tan. cot. ...	15
(23) sin. cot. sec. ...	15	(24) sin. cot. cosec. ...	15
(25) cos. cot. cosec. ...	16	(26) tan. sec. cosec. ...	16
(27) sin. cos. tan. cot. ...	16	(28) sin. cos. tan. sec. ...	16
(29) sin. cos. cot. cosec. ...			16
(30) sin. cos. sec. cosec. ...			17
(31) sin. tan. sec. cosec. ...			17
(32) sin. tan. cot. sec. ...	17	(33) cos. tan. cot. sec. ...	17
(34) cos. cot. sec. cosec. ...			17
(35) tan. cot. sec. cosec. ...			18
(36) 含五函數者 ...	18	(37) 含六函數者 ...	18
(38) 含 vers. 者 ...			19
VIII. 餘角 ...	19	(1) 恆等式 ...	19
(2) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$...	19	(3) 式之值 ...	20
IX. 關係式 ...	20	X. 等式 ...	20
(1) 條件等式 ...	20	(2) 等式 ...	21
XI. 式之表示 ...	22		

第三 普徧角 22

I. 關於象限者 ...	22	II. 以最小正角表示 ...	23
III. 求三角函數之值 ...	23	IV. 簡化 ...	24
V. 求 ...	25	VI. 追跡 ...	25
VII. 求證 ...	26		
VIII. 作角 ...	28	IX. 求公式 ...	28

第四 和及差之公式 28

I. 恆等式 ...	28	(1) sin. ...	28
(2) cos. ...	30	(3) tan. ...	33
(4) cot. ...	33	(5) sec. 或 cosec. ...	34
(6) sin. cos. ...	34	(7) sin. tan. ...	40
(8) sin. cot. ...	40	(9) sin. sec. ...	41
(10) cos. tan. ...	41	(11) cos. cot. ...	41
(12) tan. cot. ...	41	(13) tan. sec. ...	42
(14) tan. cosec. ...	42	(15) cot. sec. ...	42
(16) cot. cosec. ...	42	(17) sin. cos. tan. ...	43
(18) sin. cos. cot. ...	44	(19) 其他三角函數 ...	45
(20) 四函數或 vers. ...	46	II. 簡化 ...	47

III. 求值47	(1) 求 $\sin$47
(2) 求 $\cos$48	(3) 求 $\tan$49
(4) 求 $\cot$50	(5) 求 $\sec$50
(6) 求 cosec51	(7) 求式之值51
IV. 式之表示51	(1) 表51
(2) 表爲和爲差52	(3) 表成積之形52
V. 條件等式53	(1) 知角之關係者53
(2) 等式不含三角函數者54	
(3) 含一三角函數者55	(4) 含 $\sin$. $\cos$. 者56
(5) 含 $\sin$. $\tan$. 者57	(6) 含 $\sin$. $\cot$. 者58
(7) 含 $\cos$. $\tan$. 者59	(8) 含他二函數者60
(9) 含 $\sin$. $\cos$. $\tan$. 者60	
(10) 含他三函數者62	
(11) 含四以上之函數者62	
VI. 特別角63	
(1) 含 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 之函數之式之值63	
(2) 含 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 之函數之等式63	
(3) 含 $15^\circ, 18^\circ, 75^\circ, 72^\circ$ 之函數者64	
(4) 含 $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ$ 之函數者64	
(5) 其他特別角之函數65	
(6) 雜題66	VII. 雜67

第五 三角形之性質69

I. $A+B+C=180^\circ, a+\beta+\gamma=\pi$69	
(1) $\sin$69	(2) $\sin$. $\cos$70
(3) $\cos$73	(4) $\tan$. 或 $\cot$74
(5) $\sin$. $\tan$74	(6) $\sin$. $\cot$75
(7) 其他二函數75	(8) 三個函數76
II. 恆等式[角有限制者]77	
III. 直角三角形79	IV. 任意三角形81
(1) $\sin$81	(2) $\cos$83
(3) $\sin$. $\cos$86	(4) $\tan$87
(5) $\cot$88	(6) 他一函數88
(7) 他二函數89	(8) 三函數90
(9) 雜題90	
V. 內切圓外接圓面積等91	
(1) 面積(一)91	(2) 面積(二)92
(3) 內切圓外接圓等之半徑93	
(4) 重心中線96	(5) 二等分線96