初等算學史

（上）

卡約黎著
曹丹文譯

漢譯世界名著

序

人羣之進化，率由野蠻而趨於文明，學科之發達，率由簡淺而趨於高深；各科皆然，算學亦何獨不然。夫人類之有算學，蓋自世界之有人類始，一若粟米布帛，與人生相終始，不能須臾離去。然皆先簡後繁，先淺後深，舉世同軌，莫之或異。若學者徒驚近世算學之新奇，而不尋流溯源，一考其隨時變遷之陳迹，又何能探索算學之本原，窺視其推陳出新之妙用耶？鄙人不揣簡陋，爰取美國卡約黎氏，『初等算學史』而譯之，以餉學者。若學者不棄而取閱之，則於初等算學變遷之大勢，或能了然於心歟！

中華民國十四年仲秋固始曹丹文誌

例言

一、是書爲美國卡約黎氏所著。引證之書，爲數甚多。內於各國（博引遠古近今）之初等算學，原原本本，歷述其變遷之情勢，文詞整潔，詳簡合宜。惟譯者無文，恐失本來面目。

一、書內引述之書名，無論爲英國，或他國文字，悉斟酌原義，譯成中文，俾便記憶。

一、書內引述之西曆年代，悉註以中國年代，俾便對照。

一、譯文內句讀，人名，地名，書名，及其他重要名詞，悉用新式記號及標點，以圖醒目。

一、書內小註，關係重要者，擇譯於每面之下，以資考證。

一、鄙人學識簡陋，詞句之間，錯誤必多，深願海內外算學同志進賜教正，將不勝感謝之至。

目錄

第二編 中古時代……九九

初等算學史

第一編 上古時代

第一章 記數法與數目字

世界記數之法，時無論古今，殆皆以五進位，以十進位，或以二十進位。此其故不難知之。小兒初習算數，往往用及手指，甚至足趾。推之有史以前，未開化之野人，其利用手指與足趾以計數，蓋無疑義。卽今日之阿非利加人，伊士企摩人（*Eskimo*），及南太平洋之島人，（The South Sea Islander）亦皆實行利用其手指足趾者也。人之借助於手指，常由於手勢記數法多少之發達，若聾啞字母之類。手指記數之法，其流行之明徵，可於古時之埃及人，巴比倫人，希臘人，羅馬人間考得之；又可於中

世紀歐洲人間考得之；卽在今日之東方諸民族間，亦皆可考得之也。華人之記數也，在十萬以內者，能以左手表之；其法以右手大指之指甲，遍觸左手小指之節，先起小指外邊，由下而上，次依中路由上而下，次依內邊，由下而上，藉以表自一至九單位之數；同式表十位之數以無名指；百位之數以中指；千位之數以食指；萬位之數以大指。若欲推此記數之法，以表更多之數，祇需推及於右手斯可矣。而商界中人，磋商價値者，嘗用袖中之手，以通彼此之意，用避旁觀之目，亦可想見其術之普通爲何如矣。

若人類手指之數，因人不同，則世界流行之記數法之進位，亦必隨在各異。設人類之一手多生一指，全數爲十二指，則文明各國記數進位之法，將不以十而以十二矣。若然，則必需特別數目字二，以代表十及十一焉。所不幸者，歷盡用算術之人類，實無第六指發生耳。然除需添二特別數目字及習乘法表必增至12×12外，十二進位法，實優於十進位法。何則，蓋十二含有整除數2，3，4，6，而十祇有整除數2及5。在平常事務之間，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，爲常用之分數，進位之根數爲2，3，及4之整倍數，便利良多。對於十二進位法，討論提倡而最具熱心者，爲瑞典國王查理第十二（*Charles XII*），其薨

時猶希望其統轄之境改十進為十二進。但此改變，究未能成為事實耳。法蘭西之革命，一切舊時文物，推翻無餘，獨此十進位法，非特無毫髮之變動，且較往時更加鞏固，亦足見其根深難撼矣。十二進位之便利，惜古時無有知之者，迨算術發達，至今日已不可改矣。雖然，文明民族，其留有上古野蠻生活時蠢蠢之遺迹，又何止此一事耶。

人類依肢體之關係而創設之記數法，其五進位法及二十進位法常見於知識卑陋之種族，至知識較高之人民，則以前者進位之根太小，後者進位之根太大，俱避而不用，特擇其適中之十進位法而用焉。各族之人民，並非一致膠執於任何一種進位法。在五進位法中，5,25,125,625 等數，應為相連各位之單位，但如此五進位法所得之數，並未見諸實用，及其增至更多之數，每每變為十進，或變為二十進。亞美利加洲者，五進位法或二十兼五進位法之安宅也。其法實流行於其北冰洋區之伊士企摩種族，流行於北美洲印第安（*Indian*）種族之一大部分，且更流行於中美及南美焉。此等進位法，北西伯利亞人及非洲之多數種族亦用之。其遺迹也，並可於現用十進位法諸種族之文字中考得之；在詩人荷馬（*Homer*）之希臘文中，可見其例。而羅馬之記數法，如 I, II, … V, VI,

...X,XI,...XV 等等，亦表顯其遺迹者也。

所可異者，五進位之法，往往與二十進位之法相混合；蓋未開化之人，初以一手之指數爲其較高之單位，不足則繼以手指足趾之全數，爲其更高之單位。二十進位之法，其普通較遜於五進位之法，然二者不能純粹獨立則一也。在此法中，20,400,8000,160000，爲初進四位之單位，並於猶戛旦(*Yucatan*)之馬耶人(*Mayas*)得確實考見其特別字體用以代表此等數者焉。阿芝特克人(*Aztec*)之進位法，即表示五進位法及二十進位法之遞嬗，次第列之，即1,2,3,4,5, 5+1...10, 10+1,...10+5,10+5+1,...20,20+1,...20+10,20+10+1,...40，等等。有特別字體以表顯1,2,3,4,5,10,20,40，等數。二十進位之法，盛行於美洲新大陸，但罕見於舊世界之歐洲。歐洲古族遺迹之此一端，可於法蘭西文字中見之，如 *quatre-vingts* 者，即表4×20或80也，*six-vingts* 者，即表6×20或120也，*quinze-vingts* 者，即表15×20或300也。更考之於英文中之 *score* (二十)一字，在 *three-score years and ten* 句內者，亦有二十進位之意焉。

在人類所設之三個進位法中，要以十進位法爲最盛行，其盛行之程度，據古之傳說，實舉世界

之種族而皆用之。僅至近數世紀中，始知其他二個進位法有前人所未及知之種族曾採用之。十進位法，亦嘗用於北美印第安種之多數部落，但罕用於南美耳。

十進法之組成，蓋原於一手十指，數至十而暫停，因以爲第一次較高之單位。在 10 及 100 間之數，可以 $b(10)+a(1)$ 表之，a 及 b 爲小於 10 之整數。但 110 可以兩式表之，一爲 $10\times10+10$，一爲 11×10。然後式亦非勉強，而何以人之稱數，不仿效稱八十，九十等例，而稱一百一十以十一個十耶？於此 $10\times10+10$ 及 11×10 選擇之間，組成進位系統之樞紐，卽在是矣。所幸者，世界各國表顯十進位之法，胥依前式；而表 100 以內之數，10 之一字，與最初之單位 1 受同等之待遇。數在 100 及 1000 之間者表之以 $c(10)^2+b(10)+a$，a, b, c 爲小於10之整數。仿此，數在 10,000 以下者，表之以 $d(10)^3+c(10)^2+b(10)^1+a(10)^0$；並依法可表更大之數。

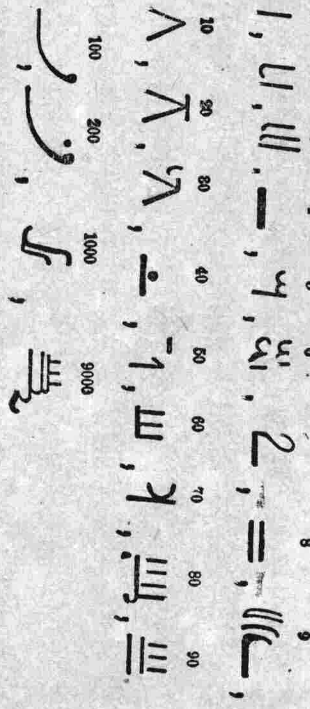
進而解明各種記數之法，吾人端自巴比倫始。尖形字體，及附屬之記數法，殆爲古之蘇美爾人 (*Sumerian*) 所發明。用豎尖劈  以表1，而用  及  以表10及100焉。數之小於 100 者，則各種記號之價值，依加法之例用之。如  表23， 表 30 是也。若然，則表大數者之記

號，常置於表小數者之左。但表百之倍數，則置表小數者於表 100 之前，用以乘100。如 〈▼▼ 表 10×100 或 1000 是也。取此以為新單位，則 〈〈▼▼ 者，依例解之，並非表 20×100，實表 10×1000 者也。此記數法之原理，乃利用加法及乘法而成。因此法所計之數，未見有過百萬者。此外，巴比倫尚有六十進位之一法，當於以後詳之。

埃及之記數法也，由商坡弄氏(*Champollion*)，楊氏 (*Young*)，及其他學者解釋其象形文字而得之。其數目字用 | 以表 1，∩ 以表 10，以表 100，以表 1000，以表 10,000，以表 100,000，以表 1,000,000，及以表10,000,000。考其數目字之形似，表 1 者狀若豎桿；表 10,000 者，若手指；表 100,000 者，若鳥；表 1,000,000 者，若受驚之人。至其他數目字所表之狀，則莫得而知。此等數目字，與其他象形文字同，皆顯然為埃及人習見之動物及物件，蓋默示於人而取其形象焉。卽視為圖畫之優美標本也可。其記數之理，全基於加法而成，如用 ∩ | 以表顯 111 者是也。

象形文字可於記念碑，方尖碑，及廟壁間見之。除此之外，埃及尚有宗教及人民兩類字體，諒皆

爲象形文字之變格，似由於使用久遠及希圖速寫之故而來者。今將宗教數目字列之以見其例：



因宗教一類數目之字多於象形一類數目之字，故凡數皆可由前一類之字以簡明之式表之。至其利用加法之理，則二者皆同，且表大數之字常居於表小數者之前焉。

約當梭倫(*Solon*)時代，希臘人嘗用指示數量形容字之起首字母以代表各種數目。此等記號稱爲『赫洛德(*Herodianic*)記號』(蓋爲紀元後二百年(約後漢獻帝建安五年)拜占庭

(*Byzantium*)文士赫洛德(*Herodianus*)所考定者也。〕亦稱爲雅典(*Attic*)記號，因其常見於雅典文字中也。腓尼基人(*Phœnicians*)，敍利亞人(*Syria*)，及希伯來人(*Hebreus*)，是時已有字母，敍利亞人與希伯來人則已用字母以表數。希臘人於紀元前五百年，(約東周敬王二十年)始採用同式之步驟。希臘各字母，與古時之三字母 ς, ϙ, ϡ，及 M 字，皆用以表數，若 1 至 9，以 α,β,γ,δ,ε,ς,ζ,η,θ，表之；十之倍數 10 至 90，以 ι,κ,λ,μ,ν,ξ,ο,π,ϙ 表之；百之倍數 100 至 900，以 ρ,σ,τ,υ,φ,χ,ψ,ω,ϡ 表之；其餘表千之倍數以 ,α,,β,,γ,,δ,,ε, 等；表 100,000 以 M；表 20,000 以 $\overset{\beta}{M}$；表 30,000 以 $\overset{\gamma}{M}$ 等等是也。夫由雅典記數法而變爲字母記數法，實見其變本加厲，蓋前法究較爲易記耳。吾人讀希臘文法，見其言表數目之字母，上加短撇，以別於尋常之字，但此並非通例；若加一平線於字母之上，亦常具同等之意義，至字母上加撇，乃用以表單位之分數，如 δ′ = $\frac{1}{4}$ 是也。希臘人之記數，利用加法之理，及觀其用 $\overset{\varepsilon}{M}$ 以表 50,000，則亦利用乘法之理矣。

羅馬之記數法，除加法之外，倘利用減法之理。若有二字母於此，前者表小數，後者表大數，則爲後者減去前者之意。如 IV = 4，與 VI = 6 是也。雖此理不見於他種記數法，然有時見於他種數量文

字。如拉丁(*Latin*)字 *duodeviginti* =20減2或18是也。羅馬數目文字殆以伊特拉司坎(*Etruscan*)字爲其根源。

若巴比倫，埃及，希臘，羅馬，及其他上古時之十進位記數法者，皆用少數記號以表數，此等記號或僅利用加法之理，或兼及於乘法或減法之理。但無一及於定位法緊要之理，如吾人今日之所用者。失此一端，古人卽失零號之用，故其距意想之記數法尙甚遠也。就此點言之，卽希臘羅馬人亦始終未能成就，若近百年來始與歐人通聞問之亞洲一遠國所成就之偉績，卽印度是也。未論印度之前，吾人須再論巴比倫之記數法，其進位之可異者，非五，非十，亦非二十，其用意甚近於意想原則爲其他種人所缺乏者，卽六十進位之記數法是也。

此法也，巴比倫人大半用之以組成重量及度量之數。其先之蘇買兒人，無論於整數分數，此六十進位法俱稱發達，實顯其數學之優異焉。此法得之於巴比倫之二冊葉。第一冊葉之紀年，殆爲紀元前一千六百年(商太戊三十八年)，或紀元前二千三百年(唐堯五十八年)，載自1至60平方之數。其最初七數，卽1,4,9,16,25,36,49也。其次則$1\cdot4=8^2$,$1\cdot21=9^2$,$1\cdot40=10^2$,$2\cdot1=11^2$等