

算學小叢書



三角法

三角形之性質及其解法

森吉太郎著

崔朝慶譯



商務印書館發行

算學小叢書

三角法

三角形之性質及其解法

森吉太郎著

崔朝慶譯

商務印書館發行

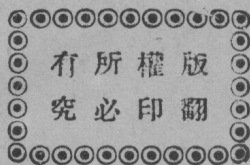
中華民國二十九年六月初版

(51230)

算學三角法——三角形之性質及其解法一冊

每冊實價國幣柒角

外埠酌加運費匯費



版權所必究
翻印必究

原著者 森吉太郎

譯述者 崔朝慶

發行人 王雲五
長沙南正路

印刷所 商務印書館

發行所 商務印書館
各埠

目次

第一章 直角三角形之解法	1
定義	1
知斜邊及一銳角求其餘之邊角	1
問題 1	3
問題 2	5
問題 3	7
知斜邊及直角旁之一邊求其餘之邊角	8
問題 4	9
問題 5	10
問題 6	12
知一銳角及其對邊求其餘之邊角	13
問題 7	13
問題 8	15
問題 9	16
知夾直角之一邊及其邊與斜邊所夾之一銳角求其	

餘之邊角.....	16
問題 10	17
問題 11	19
問題 12	20
知夾直角之二邊求其餘之邊角.....	20
問題 13	21
問題 14	22
問題 15	23
幾何學之應用.....	24
問題 16	27
雜例題.....	29
問題 17	31
第二章 測量高與距離.....	34
測量之名辭及測量之器械.....	34
測在平地上之物體之高.....	37
問題 18	40
測能望見之物體之距離.....	42
問題 19	48

測能望見之物體之高	50
問題 20	58
雜例題	59
問題 21	62
第三章 斜角三角形角與邊之關係	66
角之關係	66
問題 22	67
問題 23	70
問題 24	71
邊與角之關係	72
問題 25	76
問題 26	79
問題 27	80
問題 28	82
問題 29	84
證 $a = b \cos C + c \cos B$	85
問題 30	88
證 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	89

問題 3193

$$\text{證 } \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C} \dots\dots\dots 94$$

問題 3296

$$\text{證 } \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C} \dots\dots\dots 97$$

問題 3398

$$\text{證 } \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)} \dots\dots\dots 99$$

問題 34101

半角之正弦與三邊之關係101

問題 35103

半角之餘弦與三邊之關係104

問題 36104

半角之正切與三邊之關係105

問題 37107

三角形之面積	108
問題 38	111
三角形之內切圓半徑	111
問題 39	113
傍切圓之半徑	114
問題 40	116
雜例題	116
問題 41	119
 第四章 斜角三角形之解法	121
知二角及二角間之邊求其餘之邊角	121
問題 42	123
問題 43	123
問題 44	124
知二邊及其夾角求其餘之邊角	125
問題 45	127
問題 46	128
問題 47	130
知二邊及其夾角先求夾角之對邊	130

問題 48	131
知二邊及對此二邊中之一邊之角求其餘之邊角	132
問題 49	135
問題 50	136
問題 51	138
知二邊及對此二邊中之一邊之角先求第三邊	138
問題 52	139
知三邊求三角	140
問題 53	141
問題 54	142
問題 55	144
知三邊求各角之餘弦	144
問題 56	145
知三邊求外接圓之半徑	145
問題 57	146
求圓內接四邊形之面積	146
知四邊形之四邊及相對二角之和求面積	149
求正多角形外接圓之半徑及內切圓之半徑	151
幾何學之應用	152

問題 58	156
雜例題	157
問題 59	159
第五章 測量應用	162
測能望見之點之距離	162
問題 60	165
測二點之距離	166
問題 61	169
測能望見之物體之高	170
問題 62	174
物體之上有物體測兩物體之高	175
問題 63	179
關於俯角之問題	180
問題 64	182
公共一邊之兩三角形知一形之三邊及又一形之頂角 爲對角線所分之二角求又一形之二邊	182
測能望見之圓半徑	184
求視界半徑	185

三角測量	188
三角測量之等級	190
問題 65	193
雜例題	194
問題 66	197
問題之答及解法指南	201

三角法 三角形之性質及其解法

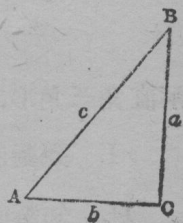
第一章

直角三角形之解法

1. 定義. 凡平面三角形之三邊三角中, 知其三〔必須有一爲邊, 若三者俱爲角, 不能求得各邊之長, 因互相似之三角形之三角互相等故也〕, 則其餘之邊角皆可推求而得. 由所知之邊角, 求未知之邊角, 稱爲解三角形. 其計算之方法, 稱爲三角形之解法.

2. 直角三角形之直角爲 90° 即已知其一角, 故三邊之中, 祇須知其二邊, 或僅知其一邊及一銳角, 由次之公式, 可求得其餘之邊角.

以代數之式, 明三角形邊角之關係, 恆用 A, B, C 表三角形之角, 用 a, b, c 表對 A, B, C 各角之邊. 右圖爲直角三角形, C 爲直角〔本篇中, 皆以 C 爲直角三角形



之直角], c 爲對直角之邊, A 與 B 皆爲銳角, a 與 b 爲對銳角之邊.

直角三角形邊角之關係式:

$$A + B = 90^\circ,$$

$$\sin A = \cos B = \frac{a}{c},$$

$$\cos A = \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\tan A = \cot B = \frac{a}{b}.$$

從上之公式, 化得次之諸式:

$$a = c \sin A = c \cos B = b \tan A = b \cot B,$$

$$b = c \cos A = c \sin B = a \cot A = a \tan B,$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\cos A} = \frac{b}{\sin B}.$$

又 $C = 90^\circ$, 依畢達哥拉 (Pythagoras) 之定理,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

解直角三角形之問題, 有次之四種:

- I. 知對直角之邊及一銳角.
- II. 知對直角之邊及直角旁之一邊.
- III. 知一銳角及對此角之邊.

(知一銳角及對他銳角之邊,可轉移歸於第 III 種.)

IV. 知直角旁之二邊.

3. I. 知 c 邊及 A 角,求其餘之邊角.

解 因 $A + B = 90^\circ$, 則 $B = 90^\circ - A$, 故易知 B 之值.

又從 $a = c \sin A$ 及 $b = c \cos A$, 即得 a 與 b 之值.

4. 例一. 設 $c = 100$ 尺, $A = 30^\circ$, 求 B, a, b .

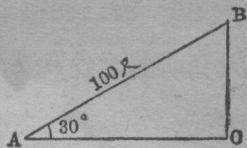
解 $B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

$$a = c \sin A = 100 \sin 30^\circ$$

$$= 100 \times \frac{1}{2} = 50 \text{ 尺.}$$

$$b = c \cos A = 100 \cos 30^\circ$$

$$= 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ 尺.}$$



問題 1

求次之(1)至(5)各直角三角形之 a, b .

(1) $c = 100, A = 60^\circ$.

(2) $c = 25, A = 45^\circ$.

(3) $c = 124, A = 18^\circ$.

(4) $c = 4p, A = 36^\circ$.

(5) $c = 4, A = 15^\circ$

(6) 設直角三角形之 $c = 250, \sin A = .6$, 求 b .

(7) 設直角三角形之 $c = 120, A = 30^\circ$, 問此三角形之面積如何.

(8) 設直角三角形之 $c = 50, A = 60^\circ$, 問其內切圓半徑如何.

(9) 設三角形之 A, B, C 各角之比為 $1:2:3$, 其最大角所對之邊為 1 尺, 求他二邊至分位止, 分位以下四捨五入.

(10) 有人以長 600 尺之線放紙鳶, 其線與地面成 36° 之角, 問紙鳶距地面之高幾何.

5. 例二. 設直角三角形之 $c = 200$ 尺, $A = 18^\circ 24'$, 檢三角函數真數表解之.

解 $B = 90^\circ - 18^\circ 24' = 71^\circ 36'$.

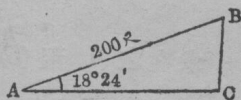
$$a = c \sin A = 200 \sin 18^\circ 24'.$$

檢表得 $\sin 18^\circ 30' = .3173$,

$$\sin 18^\circ 20' = .3145.$$

從比例 $10' : 4' = .3173 - .3145 : x$, 得 $x = .0011$.

$$\therefore \sin 18^\circ 24' = .3145 + .0011 = .3156.$$



則 $a = 200 \times .3156 \doteq 63.1$ 尺.

又 $b = 200 \cos 18^\circ 24'$.

檢表得 $\cos 18^\circ 20' = .9492$,

$\cos 18^\circ 30' = .9483$.

從比例 $10':4' = .9492 - .9483 : x$, 得 $x = .0004$.

$\therefore \cos 18^\circ 24' = .9492 - .0004 = .9488$.

則 $b = 200 \times .9488 \doteq 189.8$ 尺.

問題 2

求次之 (1) 至 (5) 各直角三角形之 a, b (用三角函數真數表):

(1) $c = 200, A = 31^\circ 20'$.

(2) $c = 25.6, A = 45^\circ 30'$.

(3) $c = 372.8, A = 26^\circ 30'$.

(4) $c = 356.7, A = 42^\circ 18.3'$.

(5) $c = 457.2, A = 60^\circ 12.6'$.

(6) 設汽車路線與地平面成 $7^\circ 20'$ 之角, 問行 5400 尺之後, 其地比前高若干尺.

(7) 有避雷針長 72 尺, 其針與地面成 $75^\circ 30'$ 之角, 求

針尖距地之高.

(8) 設直角三角形之二銳角之比爲 $5:7$, 其對直角之邊爲 3 尺, 求對銳角之邊之長至分位止, 分位以下四捨五入.

(9) 有直角三角形之地面, 斜邊長 60 尺, 其一銳角 20° , 問面積幾何.

6. 例三. 直角三角形之 c 邊 200 尺, A 角 $35^\circ 26'$, 用對數表解之.

$$\text{解 } B = 90^\circ - 35^\circ 26' = 54^\circ 34'.$$

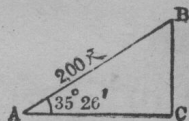
$$a = 200 \sin 35^\circ 26'.$$

$$\therefore \log a = \log 200 + \log \sin 35^\circ 26'$$

$$= 2.30103 + \bar{1}.76324$$

$$= 2.06427.$$

$$a = 115.5 \text{ 尺.}$$



$$\text{從表得 } \log \sin 35^\circ 30' = \bar{1}.76395,$$

$$\log \sin 35^\circ 20' = \bar{1}.76218.$$

$$10' : 6' = .00177 : x.$$

$$x = .00106.$$

$$\therefore \log \sin 35^\circ 26' = \bar{1}.76218$$

$$+ .00106$$

$$= \bar{1}.76324.$$

$$\text{又 } \log 116 = 2.06446,$$

$$\log 115 = 2.06408.$$

$$\therefore 38 : 19 = 1 : x.$$

$$x = .5.$$

$$a = 115 + .5$$

$$= 115.5$$