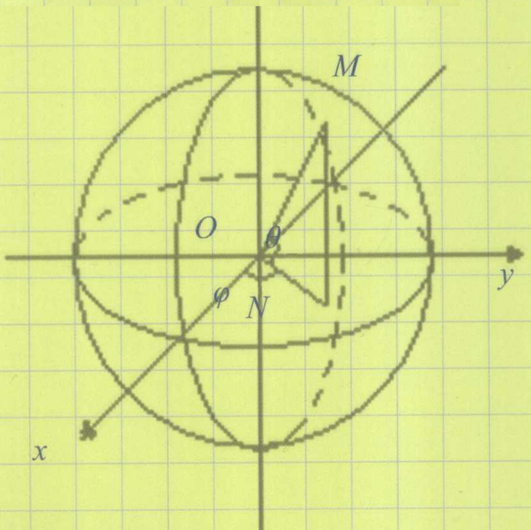
解析几何

JIEXI JIHE

秦　衍　杨勤民◎主编



華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

解析几何

秦 衍 杨勤民 主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

解析几何/秦衍，杨勤民主编. —上海：华东理工大学出版社，2010. 4
ISBN 978-7-5628-2519-7

Ⅰ. 解… Ⅱ. ①秦…②杨… Ⅲ. 解析几何 Ⅳ. O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 206227 号

解析几何

……………………………………

主　　编 / 秦　衍　杨勤民
责任编辑 / 李国平
责任校对 / 金慧娟
封面设计 / 陆丽君
出版发行 / 华东理工大学出版社
社　址：上海市梅陇路 130 号，200237
电　话：(021)64250306(营销部)　(021)64252253(编辑部)
传　真：(021)64252707
网　址：press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 江苏南通印刷总厂有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 11.25
字　　数 / 290 千字
版　　次 / 2010 年 4 月第 1 版
印　　次 / 2010 年 4 月第 1 次
印　　数 / 1—2000 册
书　　号 / ISBN 978-7-5628-2519-7/O·216
定　　价 / 28.00 元

前　言

解析几何是数学类专业大学生的重要基础课程之一.作为一门几何课程,其主要目的是培养学生的几何空间想象、抽象归纳思维和逻辑推理能力,同时也为数学类专业学生今后在数学和物理方面的学习提供所需的基础知识和几何背景.

本着"尊重旧传统教学、吸纳新技术方法"的原则,我们努力使教材的编写既有解析几何的基本思想、几何特征,又有科技发展的时代气息.传承解析几何的基本方法,树立几何思想,教材以解析几何的基本思想方法为主线,注重几何图形与代数方程的结合,既有利用代数方法分析和处理几何问题,又有按几何图形对代数方程分类.在教材的编写中不乏几何思想,对一些重要概念的定义都是从几何本义出发的,而诸如不变量、坐标变换、几何学的分类等等的引入则使读者能充分地认识几何思想方法.教材的最后两章结合变换群的观点简单介绍了欧氏几何、仿射几何和射影几何,使读者对几何学科有个宏观的了解,为进一步学习、研究以及应用几何打下基础.

教材引入了编程显示图形,加强学生几何图形的处理能力.在教学过程中,我们发现仅凭空间想象学习几何不仅枯燥乏味,而且是抽象的.事实上,计算机技术的发展使得几何图形的显示变得越来越简单,把图形显示引入几何课程是必然的,几何图形的这种直观可视不但有助于提高学生的形象理解,而且使学生体验到用代数方法处理几何问题的好处,从而极大地提高了学生的学习兴趣.特别地,近年来随着计算机编程语言的升级和学生计算机使用能力的提高,计算机编程图形显示不仅广泛地用于教学中,而且图形处理也能为学生所掌握,从而为学生自学、复习提供便利.因此我们在编写中添加了几何图形的计算机编程显示,选用简单易学的 MATLAB 为工具,通过一些例子介绍了计算机作图的一般方法.学生只需对这些程序作某些修改,就可以得到教材中讨论的几何图形.同时这部分内容也为学生今后学习重积分作了准备.

本教材主要适用于数学类专业大学生的课程,其中的 MATLAB 编程部分包含了作者多年来在教学与科研中的体会,不但有助读者直观理解几何图形,也可作为高等数学、数学分析教学的参考用书.

本教材的主要内容多次在华东理工大学数学系使用过,感谢学生们在教学过程中给出的意见和建议.教材的编写得到了华东理工大学数学系的大力支持和帮助,特在此表示衷心的感谢,同时感谢华东理工大学优秀教材出版基金的资助.

由于作者水平有限,教材中肯定会有不妥之处,希望广大读者和专家予以指正,作者在此表示真挚的谢意.我们的电子邮件地址是:

yqin@ecust. edu. cn,

qmyang@ecust. edu. cn.

秦　衍,杨勤民

2009 年 9 月

目　　录

第1章 向量代数

解析几何将图形(空间中的点)数字化,然后通过研究函数的关系来研究图形,为了表示空间点之间的关系,我们引入了一个既有大小、又有方向的量,称之为**向量**或**矢量**. 向量在力学、物理学中有着广泛的应用,例如在力学中的力、速度. 本章从向量的定义出发,逐步建立向量的加法、数乘运算,讨论了向量共线(面)的充分必要条件,给出了向量的内积、外积、混合积的定义. 此外,我们把空间上的点与有序数组(坐标)建立起一一对应关系,从而建立空间上坐标的概念,为用代数方法研究空间图形奠定基础.

在第 1.1 节,向量的共线(面)关系的讨论中,我们看到向量的共线(面)的几何问题将与线性代数中的线性相关(无关)的代数问题相对应,当然这种讨论也为理解线性代数中的向量空间提供了具体的几何背景. 第 1.2 节在对向量充分讨论的基础上建立了空间的仿射坐标系,将空间上的点与一个有序数组建立了一一对应关系. 在第 1.3 节,把几何中的角度、长度与向量的内积建立关联. 第 1.4 节定义向量外积为一个特殊的向量,它的长度建立在相应的平行四边形的面积基础上,而方向与所在平面垂直. 这样,通过向量的外积来讨论,就可以计算平行四边形(或三角形)的面积、两个向量的角度,以及与两个向量都垂直的方向. 第 1.5 节介绍向量的混合积,通常可用于研究平行六面体或四面体的体积.

研究几何图形主要有两种方法. 方法一,利用向量(有向线段)及其运算来研究几何图形的性质,称为**向量法**. 在解析几何中可用向量法方便、直观地研究图形. 方法二也称为**坐标法**,借助于坐标系,把空间中的点与坐标(数组)对应,将图形看作空间上有某种规律点的轨迹,并用代数方程表示;反之,也可以通过对代数方程的讨论来研究几何问题. 向量法和坐标法是解析几何中常用的方法,它们不但可以单独使用,而且可以结合起来使用.

1.1 向量及其线性运算

1.1.1 向量的概念

只用一个实数就可以明确表示的量称为**数量**(或**标量**),例如:时间、距离、面积. 数量也就是普通的实数,只有大小没有方向. 而在物质世界中还存在着另一种量,它们既有大小又有方向,例如:力、速度、电磁场等,我们称这种既有大小又有方向的量为**向量**(或**矢量**).

通常用有向线段 AB 表示从 $\boldsymbol{A}$ 点指向 $\boldsymbol{B}$ 点的向量, $\boldsymbol{A}$ 点称为向量的**始点**, $\boldsymbol{B}$ 点称为向量的**终点**. 记为$\overrightarrow{AB}$或 $\boldsymbol{a}$ (如图 1.1). 有向线段既具有几何直观性,同时又刻画出向量的大小和方向. 向量的大小就是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 之间的距离,称为向量的**长度**,记为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$. 特别地,长度为 1 的向量称为**单位向量**. 长度为零的向量称为**零向量**,记为 $\mathbf{0}$. 零向量的方向不确定,可以取任意方向.

图 1.1

对于给定的两个向量$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$,如果经过平移后, $\boldsymbol{A}$ 与A', $\boldsymbol{B}$ 与B'重合(如图 1.2),则称向量$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$**相等**,记为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$. 向量相等就是指向量的长度相等且方向相同. 对于一

般的向量 $\boldsymbol{a}$，由于没有标出它的起点，因此它的起点可以自由选取，称这样的向量 $\boldsymbol{a}$ 为自由向量.

把与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等，但是方向相反的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**(或**负向量**)，记为 $-\boldsymbol{a}$. 显然，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

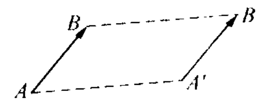


图 1.2

1.1.2 向量的加法

对于任意给定的两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$，下面给出向量加法运算的定义.

定义 1.1.1　对于给定的两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$，从空间任意一点 O 引向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，再从 A 引向量 $\boldsymbol{b}$ 使得 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，定义新向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的和(如图 1.3)，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 于是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

由上述定义表示的向量加法规则通常称为**三角形法则**.

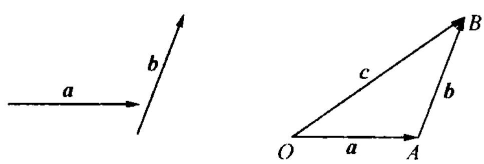


图 1.3

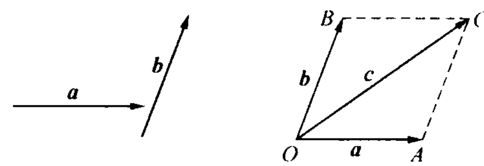


图 1.4

注：若从空间任意一点 O 引向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，再以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$，不难说明对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{c}$(如图 1.4)，用这种方法定义向量加法运算称为向量加法的**平行四边形法则**.

三角形的任意一条边长不超过另两边长的和，因此对于任意的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

称该不等式为**三角不等式**.

向量加法具有下列运算规律：

对于任意的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$，有

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$,

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

证明：(1) 从空间中的任意一点 O，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，再以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$(如图 1.4)，则对角线 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，注意到 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，从而有

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

(2) 作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$(如图 1.5)，则

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

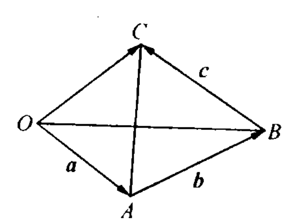


图 1.5

因此

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

(3) 作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}$, 于是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}.$$

(4) 作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, 于是 $-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AO}$, 因此

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OO}=\boldsymbol{0}.$$

利用负向量的定义容易得到向量的减法运算.

定义 1.1.2 称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量的和为向量 $\boldsymbol{a}$ 减去向量 $\boldsymbol{b}$,记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

若从空间任意一点 O 引向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$(如图 1.6),则

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}.$$

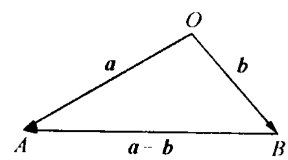


图 1.6

1.1.3 向量的数量乘法

对于任意给定的一个向量 $\boldsymbol{a}$ 和一个实数 λ,下面定义它们的数量乘法运算.

定义 1.1.3 若 $\boldsymbol{a}$ 为向量,λ 为实数,定义它们**数量乘法**(简称**数乘**)$\lambda\boldsymbol{a}$ 为一个向量,它的长度为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$;它的方向为:当 $\lambda>0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同;当 $\lambda<0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反;当 $\lambda=0$ 时,为零向量.

向量的加法和数量乘法统称为向量的线性运算.

设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量可记为 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$, 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量**.

向量的数量乘法具有以下运算规律:

对于任意的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和任意实数 λ, μ 有

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$,

(2) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

(3) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,

(4) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$, $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

证明:(1) 当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中至少有一个为零时,等式(1)显然成立. 下面假设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 λ, μ 都不等于零. 等式两边的长度均为 $|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|$,两边的方向分四种情况说明:

当 $\lambda\mu>0$ (λ、μ 同号) 时,等式右边的 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;等式左边的讨论如下:

① 当 $\lambda>0$, $\mu>0$ 时, $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$与 $\mu\boldsymbol{a}$ 同向;$\mu\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;故 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$与 $\boldsymbol{a}$ 同向;

② 当 $\lambda<0$, $\mu<0$ 时, $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$与 $\mu\boldsymbol{a}$ 反向;$\mu\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;故 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$与 $\boldsymbol{a}$ 同向;

当 $\lambda\mu<0$ (λ、μ 异号)时,等式右边的$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;等式左边的讨论如下:

③ 当 $\lambda>0$, $\mu<0$ 时, $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$与 $\mu\boldsymbol{a}$ 同向;$\mu\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;故 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$与 $\boldsymbol{a}$ 反向;

④ 当 $\lambda<0$, $\mu>0$ 时, $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$与 $\mu\boldsymbol{a}$ 反向;$\mu\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;故 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

因此,有

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

(2) 当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或者 λ, μ 中有一个为零时,第一分配律显然成立.下面假设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 λ, μ 都不等于零.分两种情况说明:

① 当 $\lambda\mu>0$(即 λ、μ 同号)时,如果 $\lambda>0$, $\mu>0$,则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 和 $\mu\boldsymbol{a}$ 都与 $\boldsymbol{a}$ 同向,$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,故 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向;而如果 $\lambda<0$, $\mu<0$,则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 和 $\mu\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向,$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向,同样有 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向.$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 的长度为 $|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|$,$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 的长度为 $(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$,在 λ、μ 同号时,$|\lambda+\mu|=|\lambda|+|\mu|$,因此有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

② 当 $\lambda\mu<0$(即 λ、μ 异号)时,如果 $\lambda+\mu=0$,则 $\mu=-\lambda$.因此

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=(\lambda-\lambda)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

如果 $\lambda+\mu>0$,不妨设 $\lambda>0$, $\mu<0$,则 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,长度为 $(|\lambda|-|\mu|)|\boldsymbol{a}|$;同时有 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,$\mu\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向,由于 $|\lambda||\boldsymbol{a}|>|\mu||\boldsymbol{a}|$,故 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,长度为 $(|\lambda|-|\mu|)|\boldsymbol{a}|$.因此有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

如果 $\lambda+\mu<0$,不妨设 $\lambda<0$, $\mu>0$,则 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向,长度为 $(|\mu|-|\lambda|)|\boldsymbol{a}|$;同时有 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向,$\mu\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,由于 $|\lambda||\boldsymbol{a}|<|\mu||\boldsymbol{a}|$,故 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向,长度为 $(|\mu|-|\lambda|)|\boldsymbol{a}|$.因此有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

(3) 当 $\lambda=0$ 或者 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 中有一个为零时,第二分配律显然成立.下面假设 $\lambda\neq0$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 平行,取实数 $\mu=\pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$(当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 同向时取正号;当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 反向时取负号),则 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,于是

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a})=(\lambda+\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\mu\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不平行,那么当 $\lambda>0$ 时,作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$(如图 1.7),则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,作向量 $\overrightarrow{OC}=\lambda\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CD}=\lambda\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{OD}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.则 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 相似,从而 D 必在直线 OB 上,于是 $\overrightarrow{OD}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.因此有

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

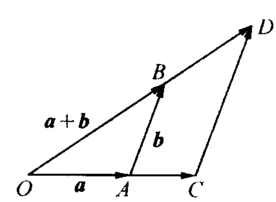


图 1.7

当 $\lambda>0$ 时可以作类似的讨论.

(4) 用定义容易验证 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$, $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

例 1.1.1 已知三角形 ABC 三边 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,三边中点依次为 D、E、F,令 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{d}$, $\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{e}$, $\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{f}$,证明向量 $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ 也组成三角形.

证明: $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$,

$\boldsymbol{e}=\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$f = \overrightarrow{CF} = \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

$\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, $\therefore \boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$.

即从 $\boldsymbol{d}$ 的始点起，在 $\boldsymbol{d}$ 的终点连上 $\boldsymbol{e}$ 的始点，$\boldsymbol{e}$ 的终点连上 $\boldsymbol{f}$ 的始点，最终 $\boldsymbol{f}$ 的终点与 $\boldsymbol{d}$ 的始点重叠而构成一个三角形.

1.1.4 向量组的共线(面)

定义 1.1.4 对于给定的 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 和 n 个数量 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，称向量 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n$ 为 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的**线性组合**，称其中的数量 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为这个组合的**组合系数**.

定义 1.1.5 如果向量组中的每个向量都平行于同一条直线(不论长度和方向正或反)，则称它们是**共线向量**(**平行向量**). 如果向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 如果向量组中的每个向量都平行于同一平面，则称它们是**共面向量**.

定理 1.1.1 若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的充分必要条件是 $\boldsymbol{b}$ 可以写成 $\boldsymbol{a}$ 的数乘，即 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，其中 λ 是由 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 唯一确定的一个实数.

证明：必要性. 取 $\lambda = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，

如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 同向，则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 反向，则 $\boldsymbol{b}=-\lambda\boldsymbol{a}$.

如果 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$，则 $(\mu-\lambda)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，由于向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda-\mu=0$，即 $\mu=\lambda$. 故 λ 由 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 唯一确定.

充分性. 由数乘的定义可知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线.

定理 1.1.2 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ, μ，使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

推论 1.1.1 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线的充分必要条件是从等式 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 可以推出 $\lambda=\mu=0$.

定理 1.1.3 若向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{c}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{c}$ 可以写成 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的线性组合，即 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，其中 λ、μ 为被 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 所唯一确定的两个实数.

证明：必要性. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，从空间一点 O 引直线 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 分别平行于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，再从 O 引 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{c}$，由 P 作平行于直线 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的直线分别交 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}$ 于 S 和 Q(如图 1.8)，根据平行四边形法则和定理 1.1.1，得 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，其中 λ、μ 由 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 唯一确定.

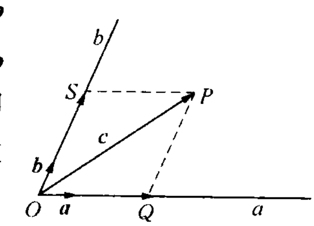


图 1.8

充分性. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线意味着它们都是非零向量. 若 $\lambda=\mu=0$，则 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 显然共面. 若 λ、μ 中有一个为零，则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}$ 中的一个共线，因而 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面；若 $\lambda\mu\neq0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$、$\mu\boldsymbol{b}$ 依次平行于由 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 确定的平面，故 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 是以 $\lambda\boldsymbol{a}$、$\mu\boldsymbol{b}$ 为边向量的平行四边形的对角线向量，因而 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共面.

显然两个向量必共面. 共线的向量组必共面.

定理 1.1.4 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ, μ, ν，使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=0.$$

推论 1.1.2 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共面的充分必要条件是从等式 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=0$ 可以推出

$$\lambda=\mu=\nu=0.$$

例 1.1.2　试证三点 A、B、C 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ、μ、ν，使 $\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ 并且 $\lambda+\mu+\nu=0$，其中 O 是任意取定的一点.

证明：必要性. 根据定义 1.1.2，有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$. 因为 A、B、C 共线，由定理 1.1.2，存在不为零的实数 k、l，使得 $k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$，即

$$-k\overrightarrow{OA}+(k-l)\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}.$$

取 $\lambda=-k$、$\mu=k-l$、$\nu=l$，得

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=\mathbf{0},$$

且 $\lambda+\mu+\nu=0$.

充分性. 不妨设 μ，ν 不全为零，根据条件有 $\lambda=-(\mu+\nu)$，得到

$$-(\mu+\nu)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=0,$$

即 $\mu\overrightarrow{AB}+\nu\overrightarrow{AC}=0$，于是有 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，所以 A、B、C 共线.

例 1.1.3　在 $\triangle ABC$ 中，E，F 分别是 AC，AB 上的点，并且 $CE=\frac{1}{3}CA$，$AF=\frac{1}{3}AB$，设 BE 与 CF 交于 G，证明：$GE=\frac{1}{7}BE$，$GF=\frac{4}{7}CF$.

证明：假设 $\overrightarrow{GE}=\lambda\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{GF}=\mu\overrightarrow{CF}$.

由于 $\overrightarrow{GE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，

所以
$$\overrightarrow{GE}=\lambda(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})=\lambda\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right),$$
$$\overrightarrow{GF}=\mu(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF})=\mu\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right),$$
$$\overrightarrow{AG}=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG})=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(1-\lambda)\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{AG}=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG})=\frac{1}{3}(1-\mu)\overrightarrow{AB}-\mu\overrightarrow{AC},$$

得到方程 $\begin{cases}\frac{1}{3}(1-\mu)=\lambda\\ \mu=\frac{2}{3}(1-\lambda)\end{cases}$，求解得到 $\lambda=\frac{1}{7}$，$\mu=\frac{4}{7}$. 故 $GE=\frac{1}{7}BE$，$GF=\frac{4}{7}CF$.

定理 1.1.5　若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为三个不共面的向量，则空间中的任意一个向量 $\boldsymbol{d}$ 都可以写成 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的线性组合，即存在不全为零的实数 λ，μ，ν 使得

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c},$$

其中数量 λ，μ，ν 由 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 唯一确定.

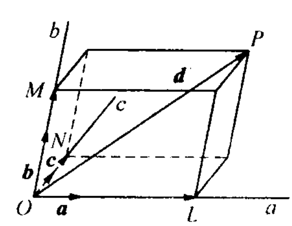


图 1.9

证明：如图 1.9 所示，经过空间一点 O 作三条直线 a、b、c 依次平行于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，由于给定的三个向量不共面，故 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 也不共面，而且两两构成一个过 O 点的平面 bOc、aOc、aOb，从 O 引向

量 $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OP}$，经过向量的终点 P 作分别平行于平面 bOc、aOc、aOb 的平面，交直线 a、b、c 于 L、M、N，故上述六个平面构成一个以 $\overrightarrow{OL}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OM}=\mu\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{ON}=\nu\boldsymbol{c}$ 为边的平行六面体，其中 λ，μ，ν 为常数. 显然 $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OP}$ 为该平行六面体的对角线，于是

$$\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c} \tag{1.1.1}$$

现要证 λ，μ，ν 由 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 唯一决定. 假设存在数量 λ_1，μ_1，ν_1，使得

$$\boldsymbol{d}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}+\nu_1\boldsymbol{c} \tag{1.1.2}$$

将式(1.1.1)减去式(1.1.2)，得到

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{a}+(\mu-\mu_1)\boldsymbol{b}+(\nu-\nu_1)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

根据条件 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共面以及推论 1.1.2 得到

$$\lambda=\lambda_1,\ \mu=\mu_1,\ \nu=\nu_1.$$

上面的定理是第 1.2 节中建立空间坐标的理论依据. 通过对向量组共线(共面)的讨论，可以抽象出线性代数的一个重要基本概念——线性相关. 在线性代数中向量组线性相关的几何意义就是向量组共线(共面).

定义 1.1.6 给定 n $(n\geqslant 1)$个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$ $\boldsymbol{a}_n$，若有不全为零的 n 个实数 k_1，k_2，$\cdots$，k_n，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n=0$，则称这 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ **线性相关**. 否则称这 n 个向量**线性无关**.

习题 1.1

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$ 和 $\overrightarrow{DA}$.

2. 已知一个正六边形 $ABCDEF$，相邻两边为 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{p}$，$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{q}$，试用向量 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ 表示其他的边 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$.

3. 已知平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 的中点分别为 K，L，且 $\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{AL}=\boldsymbol{l}$，求 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$.

4. 设 M 是线段 AB 的中点，试证：对于空间中的任意一点 O，有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

5. 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点，试证对于任意一点 O，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

6. 设 A，B，C，D 是一个四面体的顶点，M，N 分别是边 AB，CD 的中点，试证：

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

7. 试问下列关系式

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

在什么条件下成立?

8. 证明:若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面,则其中至少有一个向量可以表示成其余两个向量的线性组合. 请问是否其中每一个向量都可以表示成其余两个向量的线性组合?

9. 设 O 是点 A 与点 B 的连线外的一点,证明三点 C 和 A, B 共线的充要条件是

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},$$

其中 $\lambda+\mu=1$.

10. 证明:四点 A, B, C, D 共面的充分必要条件是:存在不全为零的实数 λ, μ, ν, ω,使得

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}+\omega\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$$

且 $\lambda+\mu+\nu+\omega=0$.

11. 证明:点 M 在 $\triangle ABC$ 内(包括三条边)的充分必要条件是存在非负实数 λ, μ,使得 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$, 且 $\lambda+\mu\leqslant 1$.

12. 证明:点 M 在 $\triangle ABC$ 内(包括三条边)的充分必要条件是存在非负实数 λ, μ, ν 使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}$, 且 $\lambda+\mu+\nu=1$. 其中 O 是任意取定的一点.

13. 用向量法证明:平行四边形的对角线互相平行.

14. 用向量法证明:四面体 $ABCD$ 的对棱中点连线交于一点 M,并且对于任意一点 O 有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

15. 用向量法证明:三角形的三条中线相交于一点 M 并且对任意一点 O,有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

16. 证明:点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心的充要条件为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

17. 用向量法证明:三角形 ABC 的三条角平分线交于一点 N,并且对于任意一点 O,有 $\overrightarrow{ON}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$, 其中 a, b, c 分别是 A, B, C 所对的边的边长.

1.2 仿射坐标和直角坐标

1.2.1 向量和点的仿射坐标、直角坐标

在空间任意取定三个不共面的有次序的向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 和一个点 O,向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 和点 O 构成了一个**空间仿射坐标系**,记为$[O;\ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$,其中点 O 称为**坐标原点**或**原点**,向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 称为(仿射)坐标系的**基向量**或**基**. 经过 O 分别和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 同方向的有向直线 Ox, Oy, Oz 称为坐标系的 ***x* 轴**、***y* 轴**、***z* 轴**,统称**坐标轴**. 含两个坐标轴的平面称为**坐标面**,含 x 轴和 y 轴(y 轴和 z 轴, x 轴和 z 轴)坐标面称为 xOy 面(yOz 面, xOz 面). 每个坐标面把空间分成两部分,这三个坐标面把空间分成八部分,称为八个**卦限**.

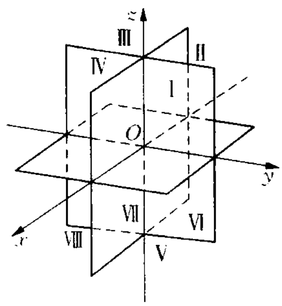
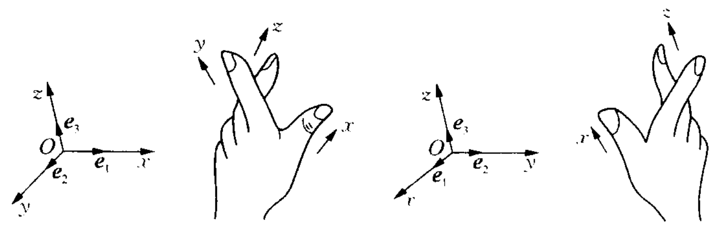


图 1.10



左手系　　　　右手系

图 1.11

坐标系按 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 的相对位置依次和右手的拇指、食指、中指不共面地伸开一样(如图1.11),称坐标为**右手系**,如果 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 依次的相对位置和左手的拇指、食指、中指不共面地伸开一样,则称为**左手系**. 除非特别声明,通常我们采用右手系.

已经给定空间的任意向量 $\boldsymbol{a}$,由定理 1.1.5 知,它必可表为基向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合,即

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \tag{1.2.1}$$

其中 x, y, z 由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}$ 唯一确定. (x, y, z)构成了一个有序三元数组. 反之,对于任意有序三元数组 x, y, z,由式(1.2.1)确定唯一一个向量 $\boldsymbol{a}$, 记作 $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$. 因此在给定了仿射坐标系后,向量 $\boldsymbol{a}$ 和有序三元数组(x, y, z)建立了一个一一对应关系,称(x, y, z)为向量 $\boldsymbol{a}$ 在仿射坐标系$[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$下的坐标,而 x、y、z 依次称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在仿射坐标系下的第一、第二、第三分量或坐标.

对空间上任意一点 P,从原点 O 引到点 P 的向量$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP}$称为 P 点在该坐标系下的**径矢**. 显然点 P 与$\overrightarrow{OP}$一一对应. 若$\overrightarrow{OP}$的坐标为(x, y, z),则点 P 与(x, y, z)一一对应. 有序三元数组(x, y, z)称为点 P 在仿射坐标系$[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$下的仿射坐标或坐标,记作 $P(x, y, z)$. 可见,原点的坐标为$(0, 0, 0)$, x 轴上的点坐标为$(x, 0, 0)$.

特别地,如果三个基向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 两两垂直,并且它们都是单位向量,则称坐标系$[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$为直角坐标系.

称点(或向量)在直角坐标系中的坐标为它的**直角坐标**,在仿射坐标系中的坐标为它的**仿射坐标**.

1.2.2 用坐标作向量的线性运算

在仿射坐标系$[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$下,设向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为(a_1, a_2, a_3)、(b_1, b_2, b_3),则向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的和

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1)\boldsymbol{e}_1 + (a_2 + b_2)\boldsymbol{e}_2 + (a_3 + b_3)\boldsymbol{e}_3,$$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标为$(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$,即两个向量和的坐标等于两个向量对应的坐标(分量)之和.

设 λ 为任意常数,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与数量 λ 的相乘为

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda a_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda a_3\boldsymbol{e}_3,$$

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标为$(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$,即数量乘以向量之积的坐标(分量)等于该数量乘以向量相应的坐标(分量).

下面我们给出点坐标与向量坐标的关系.

定理 1.2.1 空间上任一向量的坐标等于其终点的坐标减去其始点的坐标.

证明：设向量的始点为 $A(x_1, y_1, z_1)$,终点为 $B(x_2, y_2, z_2)$,则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2).$$

1.2.3 向量共线与向量共面的坐标表示

首先在平面仿射坐标系$[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$下讨论. 设有三点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$,给出三点共线的充分必要条件.

定理 1.2.2 A, B, C 三点共线的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

证明：必要性. 根据例 1.1.2 的讨论可知, A, B, C 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ、μ、ν,使得

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0},$$

且 $\lambda+\mu+\nu=0$. 于是有 $\begin{cases}\lambda x_1+\mu x_2+\nu x_3=0\\ \lambda y_1+\mu y_2+\nu y_3=0\end{cases}$. 因为 λ, μ, ν 不全为零,不妨设 λ, μ 不全为零. 取 $\nu=-(\lambda+\mu)$, 得到

$$\begin{cases}\lambda(x_1-x_3)+\mu(x_2-x_3)=0\\ \lambda(y_1-y_3)+\mu(y_2-y_3)=0\end{cases}.$$

λ, μ 不全为零的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1-x_3 & x_2-x_3 \\ y_1-y_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=0.$$

利用行列式的性质,得到

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1-x_3 & x_2-x_3 & x_3 \\ y_1-y_3 & y_2-y_3 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

现在在空间仿射坐标系$[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$中讨论,任意给定两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,其坐标分别为(a_1, a_2, a_3)、(b_1, b_2, b_3).

定理 1.2.3 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是它们的分量成比例.

证明：利用定理 1.1.2, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在不为零的实数 λ, μ,使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 即 $\lambda a_1+\mu b_1=0$, $\lambda a_2+\mu b_2=0$, $\lambda a_3+\mu b_3=0$. 因为 λ, μ 不全为零,故有 $a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3$.

定理 1.2.4 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是它们的坐标行列式为零,即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

证明:设三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的坐标分别为(a_1, a_2, a_3),(b_1, b_2, b_3),(c_1, c_2, c_3). 利用定理 1.1.4,$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的数量λ,μ,ν使得

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}.$$

即

$$\begin{cases} \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 = 0 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 = 0. \\ \lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 = 0 \end{cases}$$

因为λ,μ,ν不全为零,方程组有解的充分必要条件为:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

推论 1.2.1 设四点 A、B、C、D 的仿射坐标分别为(x_i, y_i, z_i),$i = 1, 2, 3, 4$,则 A、B、C、D 共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证明:A、B、C、D 共面的充分必要条件是$\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{DC}$共面,而上述三个向量共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_3 & x_3 - x_4 \\ y_1 - y_2 & y_2 - y_3 & y_3 - y_4 \\ z_1 - z_2 & z_2 - z_3 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

由于

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_3 & x_3 - x_4 & x_4 \\ y_1 - y_2 & y_2 - y_3 & y_3 - y_4 & y_4 \\ z_1 - z_2 & z_2 - z_3 & z_3 - z_4 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_3 & x_3 - x_4 \\ y_1 - y_2 & y_2 - y_3 & y_3 - y_4 \\ z_1 - z_2 & z_2 - z_3 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}.$$

得到推论.

1.2.4 线段的定比分点

对于线段 AB $(A \neq B)$,如果点 C 满足$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$,则称点 C 分线段 AB **成定比**λ. 当$\lambda >$

0 时，C 在 AB 的内部，称 C 为**内分点**；当 $\lambda < 0$ 时，C 在 AB 的外部，称 C 为**外分点**；当 $\lambda = 0$ 时，C 与 A 重合；当 $\lambda = -1$ 时，$\overrightarrow{AB} = 0$，故一般设 $\lambda \neq -1$.

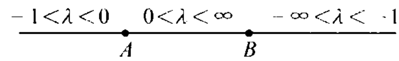


图 1.12

定理 1.2.5 在空间仿射坐标系下，设 A，B 的坐标分别是 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，则分线段 AB 成定比 λ $(\lambda \neq -1)$ 的分点 C 的坐标 (x, y, z) 为：

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

证明：根据定理 1.2.1，$\overrightarrow{AC} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$，$\overrightarrow{CB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$. 因为 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$，所以有

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

求解得到：

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

特别地，当 $\lambda = 1$ 时，$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ 为 AB 的中点.

例 1.2.1 在 $\triangle ABC$ 中，设 P，Q，R 分别为三条边 AB，BC，CA 上的点并且 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{BQ} = \mu \overrightarrow{QC}$，$\overrightarrow{CR} = \nu \overrightarrow{RA}$，证明：$P$，$Q$，$R$ 共线的充分必要条件是 $\lambda\mu\nu = -1$.

证明：以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 为基向量，建立坐标系 $[A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$. 此时 P，Q，R 的坐标分别为：$\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}, 0\right)$，$\left(\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}\right)$，$\left(0, \frac{1}{1+\nu}\right)$. 根据定理 1.2.2，$P$，$Q$，$R$ 共线的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{1+\lambda} & \frac{1}{1+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{1+\mu} & \frac{1}{1+\nu} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

计算行列式，得到：

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{1+\lambda} & \frac{1}{1+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{1+\mu} & \frac{1}{1+\nu} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\lambda\mu\nu + 1}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}.$$

于是得到：P，Q，R 共线的充分必要条件是 $\lambda\mu\nu = -1$.

习题 1.2

1. 在一个仿射坐标系中画出下列各点：