p进数

p—ADIC NUMBERS

走向数学丛书

冯克勤 著

走向数学丛书

P 进数

冯克勤　著

湖南教育出版社

p 进 数

p-adic numbers

冯克勤 著

Feng Ke-qin

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行（东风路附1号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

787×1092毫米　32开　印张：5.875　字数：120,000

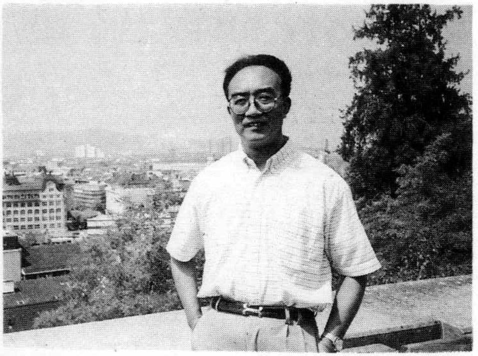
1995年8月第1版　1995年8月第1次印刷

ISBN 7—5355—2247—5/G·2242

定价：7.10元

"走向数学"丛書

陳省身题



作者简介

冯克勤，男，1941 年生，天津宁河人。教授，1968 年中国科学技术大学研究生毕业，1973 年在中国科学技术大学任教至今，现任该校副校长，理学院院长。1979 至 1981 年在美国威斯康辛大学、马里兰大学和普林斯顿大学作访问学者，1987 以来在波恩马普（Max-Planck）数学研究所，香港中文大学，莫斯科大学，加拿大拉瓦尔大学等地作访问教授。

主要兼职有：中国数学会和中国保密通信学会常务理事，《现代数学》丛书和《研究生》丛书编委，《数学年刊》、《数学学报》和《代数集刊》编委，国家教委教学指导委员会和科技委员会成员等。

科研方向为代数数论和代数编码理论，发表论文五十余篇，著作有《交换代数基础》、《代数数论入门》、《近世代数引论》、《初等数论讲义》、《射影几何趣谈》、《平方和》和《有限域》等，曾获中国科学院科技进步二等奖（1988），国家自然科学三等奖（1989）和陈省身数学奖（1990）。

前　言

王　元

从力学、物理学、天文学直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学. 一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三四年有数学课. 可见数学之重要与其应用之广泛.

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏. 我以为要克服这个鸿沟，还是有可能的. 近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握. 我想，如果知道讨论的对象的具体背景，则有可能掌握其实质. 显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到. 若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了解. 这就促使我们

设想出一套“走向数学”小丛书，其中每本小册子尽量用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面，使工程技术人员，非数学专业的大学生，甚至具有中学数学水平的人，亦能懂得书中全部或部分含义与内容．这对提高我国人民的数学修养与水平，可能会起些作用．显然，要将一门数学深入浅出地讲出来，决非易事．首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解．从整体上说，我国的数学水平还不高，能否较好地完成这一任务还难说．但我了解很多数学家的积极性很高，他们愿意为“走向数学”撰稿．这很值得高兴与欢迎．

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社支持，得以出版这套“走向数学”丛书，谨致以感谢．

序

每个小学生都知道什么是一个有理数的绝对值，并且知道，对于两个有理数 a 和 b，绝对值 $|a-b|$ 愈小，这两个数的距离就愈近. 大多数人在一生中只使用这个绝对值，以至于很少有人会想：我们是否有衡量数的大小和相距远近的其他标准呢？如果有的话，这些别的标准对于人类实践活动和理性探究是否有益呢？

早在 **1900** 年前后，德国数学家汉塞尔（Hensel，**1861—1941**）发现，存在着无穷多种本质上不同的标准来衡量有理数的大小和有理数间距离的远近，而且这些标准非常有用. 这些标准来源于很古老的想法，即正整数的 p 进位表示法. 我们现在表示数是采用十进制. 对于任意整数 $m \geqslant 2$，每个正整数均可表成 m 进制的形式. 事实上，在古代的埃及、印度、中国和巴比伦，人们曾经使用过六十进位制等计数方法. 目前在数字通信和计算机科学中广泛使用二进制. 汉塞尔在本世纪初发现，对每个素数 p，用数的 p 进展开可以做出有理数的新的“绝对值”，并且对不同的素数 p，这些绝对值彼此是衡量有理数大小和远近的完全不同的标准. 由于素数有无穷多个，所以在有理数集合上有无穷多个不同的绝对值！

汉塞尔的 p 进绝对值最早用于数论研究. 后来，它逐渐成为代数学、代数几何学以及数学许多其它分支的十分重要的基本工具. 最近，一些数学物理学家试图用 p 进距离来解释物理中的一些量子化现象和秘密，因为 p 进绝对值比通常的绝对值更具有量子化特征.

在这本小书里，我们打算通俗地讲述 p 进绝对值的基本知识和一些奇妙的性质，也挑选一些方面来介绍 p 进绝对值的应用（主要介绍在数论中的应用）和其中体现的数学思想（如局部—整体原则等）. 大多数内容只需要中学数学知识，有些地方需要一点抽象代数和分析中的知识（如群环域基本概念，连续函数，函数的极限和黎曼积分等）. 在需要这些知识的地方，我们也尽量予以通俗的解释. 我们在书中常常把 p 进绝对值和通常的绝对值加以对比. 如果读者具有好的数学知识背景，就可以更清楚地理解 p 进绝对值的特点以及它与通常绝对值的相似和相异之处.

我们把 p 进数介绍给大家，不仅期望读者感到数学的新奇，更希望在新奇之后，把它变成和通常绝对值一样的家常便饭，成为自己研究和解决问题的有效工具.

冯克勤

目　录

第一章　Q 上的 p 进赋值

§1.1　数的 p 进制表示

本书中采用以下通用的符号：$N=\{0,1,2,\cdots\}$ 表示非负整数集合，$P=\{1,2,3,\cdots\}$ 为正整数集合，Z 为整数环，Q 为有理数域，R 为实数域，C 为复数域.

在通常十进制中，整数 1234 就是 $10^3+2\cdot10^2+3\cdot10+4$. 一般地，整数 $a_na_{n-1}\cdots a_1a_0$ 就是

$$a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot10+a_0, \tag{1.1}$$

其中 a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_0 均是 $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ 当中的整数.

对于每个素数 p，每个正整数 n 都有 p 进展开：

$$n=a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_rp^r, \tag{1.2}$$

其中 $0\leqslant a_0, a_1, \cdots, a_r\leqslant p-1$.

例如对十进制中的 10，它的 2 进制展开为

$$10=2+2^3.$$

我们把 (1.2) 式右边的 p 进展开记成 $(a_0a_1\cdots a_r)_p$. 所以

$$10=(0101)_2.$$

我们把 n 的 p 进制写成 (1.1) 那样按 p 的升幂形式展开，而不是象 (1.1) 那样十进制的降幂方式，是为了今后的方便. 此外，对每个正整数 $m\geqslant 2$，都有 m 进制记数法. 但本书中只需要 m 为素数的情形.

用 p 进表达式做正整数相加，与小学生做十进制的方法是一样的：同位的数字从左到右依次相加，超过 p 的便去掉 p 同时向右边进上一位. 例如采用 3 进制，

$$21+10=(012)_3+(101)_3=(1101)_3. \text{ 算式为}$$

$$\begin{array}{rcccc}
 & 0 & 1 & 2 & \\
+ & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}.$$

正整数相乘则可类似地做：

$$(112)_3\times(102)_3=(111021)_3, \text{算式为：}$$

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 1 & 2 & & & \\
\times & 1 & 0 & 2 & & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & 2 & 2 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1
\end{array}.$$

设 a 和 b 是两个正整数. 如果 $a>b$，则用 p 进展开式做减法 $a-b$ 时，也是采用小学生的规则：从左到右逐位相减，不够时从右边借一位. 例如

$$21-10=(012)_3-(101)_3=(201)_3=11,$$

算式为

$$\begin{array}{rccc}
 & 0 & 1 & 2 \\
- & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 2 & 0 & 1
\end{array}.$$

当 $a<b$ 时，采用上面的减法方式就会出现问题：右边无法借位. 这就涉及到如何把负整数表成 p 进制形式的问题. 为此，我们

要引进“无限”的 p 进展开式. 我们可以把正整数的 p 进展开式 $(a_0a_1\cdots a_r)_p$ 看成是 $(a_0a_1\cdots a_r00\cdots0\cdots)_p$. 特别地，0 的 p 进展开式为 $(00\cdots0\cdots)_p$. 如果正整数 n 的 p 进展开式为

$$n=(0\cdots0\ a_la_{l+1}\cdots a_r0\cdots)_p,$$

用上面的方法，做减法 $0-n$，不断地借位，就得到

$$\begin{array}{rllllll}
0=(0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\ \cdots)_p \\
-)\ n=(0\cdots0 & a_{l+1} & a_l & \cdots & a_r & 0 & 0\ \cdots)_p \\
\hline
-n=(0\cdots0 & p-a_l & p-1-a_{l+1} & & p-1-a_r & p-1 & p-1\cdots)_p,
\end{array}$$

所以 $-n$ 中的 p 进展开式为

$$-n=(\underbrace{0\cdots0}_{l\text{个}},p-a_l,p-1-a_{l+1},\cdots,p-1-a_r,p-1,$$
$$p-1,\cdots)_p.$$

例如

$$-11=10-21=(101)_3-(012)_3=(121222\cdots)_3,$$

算式为

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 0 & 1 & & & \\
- & 0 & 1 & 2 & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2\cdots
\end{array}.$$

于是：

$$-11=1+2\cdot3+3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4+2\cdot3^5$$
$$+\cdots+2\cdot3^n+\cdots \tag{1.3}$$

从通常的眼光来看，这是个荒唐的等式，因为右边的被加项 $2\cdot3^n$ 愈来愈大，所以右边应当是无穷大！我们在本书中，就是要介绍汉塞尔的一种新的眼光，他对于数的大小给一种新的标准，使得对于愈大的 n，3^n 是愈小的数，从而使（1.3）式的右边是有意义的. 我们在下一节严格介绍汉塞尔的新的观点. 现在仍然继续我们形式化的荒唐的运算. 在数学史上，曾经出现过许多在当时被认为是荒唐的事情. 牛顿的微商运算曾被认为

是荒唐的，数 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{-1}$ 到现在还被叫作是“无理”数和“虚”数. 正是这些“荒唐”的事情是数学新思想的萌芽，把数学和人类的认识推进到一个新的境界！

一个有理数如何作 p 进展开呢？首先看有理数 $\frac{1}{1-p^s}$ 的 p 进展开是什么，其中 s 为正整数. 如果认为 n 愈大则 p^n 愈小，那么用 $1-p^s$ 去除 1 的除法算式应当是

$$
\begin{array}{rl}
 & \overline{\ 1 \quad p^s \quad p^{2s} \cdots\ } \\
1-p^s) & 1 \\
 & \underline{1 \quad -p^s} \\
 & \qquad p^s \\
 & \qquad \underline{p^s - p^{2s}} \\
 & \qquad\qquad p^{2s} \\
 & \qquad\qquad \vdots
\end{array}
,
$$

于是

$$\frac{1}{1-p^s}=1+p^s+p^{2s}+p^{3s}+\cdots+p^{ns}+\cdots \tag{1.4}$$

现在考虑任意有理数 $\alpha=\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 是整数，$b\geqslant 1$. 必要时将 α 减去适当的整数，不妨设 α 为正的真分数，即 $1\leqslant a<b$. 先设 $p\nmid b$(表示 p 不整除 b). 由初等数论知道，存在正整数 t，使得 $p^t\equiv 1 \pmod b$(这里 $x\equiv y \pmod b$ 表示 $b\mid x-y$，即 $x-y$ 被 b 整除). 于是

$$p^t-1=bc,$$

其中 c 为正整数. 从而

$$-\alpha=\frac{ac}{-bc}=\frac{ac}{1-p^t}.$$

由于 $1\leqslant ac<bc=p^t-1$，因此，ac 有 p 进展开

$$ac=a_0+a_1p+\cdots+a_{t-1}p^{t-1}.$$

再由 (1.4) 式可知 $-\alpha$ 的 p 进展开为

$$
\begin{aligned}
-\alpha &= ac\cdot\frac{1}{1-p^t}\\
&=(a_0+a_1p+\cdots+a_{t-1}p^{t-1})(1+p^t+p^{2t}+\cdots)\\
&=(a_0a_1\cdots a_{t-1}a_0a_1\cdots a_{t-1}\cdots)_p\\
&=(\dot{a}_0a_1\cdots\dot{a}_{t-1})_p.
\end{aligned}
$$

这里象通常表示循环小数一样，我们用 $(\dot{a}_0\cdots\dot{a}_{t-1})_p$ 表示 $a_0\cdots a_{t-1}$无限地循环下去．再由

$$\alpha=0-(-\alpha)$$

就可算出 α 的 p 进表达式．所以必要时再加上一个整数，可知每个有理数$\frac{a}{b}$，当 $p\nmid b$ 时都可表示成

$$\frac{a}{b}=(a_0a_1a_2\cdots)_p.$$

如果 $p|b$，令 $p^m\parallel b$（这表示 $p^m|b$，但是 $p^{m+1}\nmid b$），则 $b=p^mb'$，其中 $p\nmid b'$．于是$\frac{a}{b'}$有形式 $(a_0a_1a_2\cdots)_p$，而

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b}&=p^{-m}\cdot\frac{a}{b'}=p^{-m}\ (a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots)\\
&=a_0p^{-m}+a_1p^{-m+1}+a_2p^{-m+2}+\cdots
\end{aligned}
$$

注意在展开式中出现了 p 的负幂次．所以任意有理数 α 都可以表示成如下的 p 进形式

$$\alpha=a_mp^m+a_{m+1}p^{m+1}+a_{m+2}p^{m+2}+\cdots\qquad(1.5)$$

其中 $m\in\mathbf{Z}$（m 可以是负整数），

$$0\leqslant a_i\leqslant p-1\ (i=m,\ m+1,\ \cdots),\ a_m\geqslant 1.$$

例 将$-\frac{7}{15}$作 3 进制展开．

解 $$-\frac{7}{15}=\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{5}\right),$$

$$-\frac{7}{5}=-2+\frac{3}{5}.$$

由于 $3^4\equiv1 \pmod{5}$，于是 $3^4-1=5\cdot16$.

从而

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}=\frac{3\cdot16}{5\cdot16}&=-\frac{48}{1-3^4}\\&=-(0121)_3\times(1+3^4+3^8+\cdots)\\&=-(\dot{0}\,12\dot{1})_3.\end{aligned}$$

因此

$$-\frac{7}{5}=-[(2)_3+(\dot{0}12\dot{1})_3]=-(2\dot{1}21\dot{0}_3)=(1\dot{1}01\dot{2})_3.$$

最后

$$-\frac{7}{15}=3^{-1}\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)=3^{-1}\cdot(1\dot{1}01\dot{2})_3=(1.\dot{1}01\dot{2})_3.$$

这里我们用 $(a_{-s}a_{-s+1}\cdots a_{-1}.a_0a_1\cdots)_p$ 表示

$$a_{-s}p^{-s}+a_{-s+1}p^{-s+1}+\cdots+a_{-1}p^{-1}+a_0+a_1p+\cdots$$

$$=\sum_{n=-s}^{\infty}a_np^n.$$

验算：

设 $x=(1.\dot{1}01\dot{2})_3$，

则 $3^4x=(0.0001\dot{1}01\dot{2})_3$，

于是

$$\begin{aligned}x-3^4x&=(1.1012\dot{1}01\dot{2})_3-(0.0001\dot{1}01\dot{2})_3\\&=(1.1011)_3\\&=\frac{1}{3}+1+3^2+3^3\\&=\frac{1}{3}+37=\frac{112}{3},\end{aligned}$$

所以 $x=-\dfrac{112}{3(3^4-1)}=-\dfrac{7}{15}$.