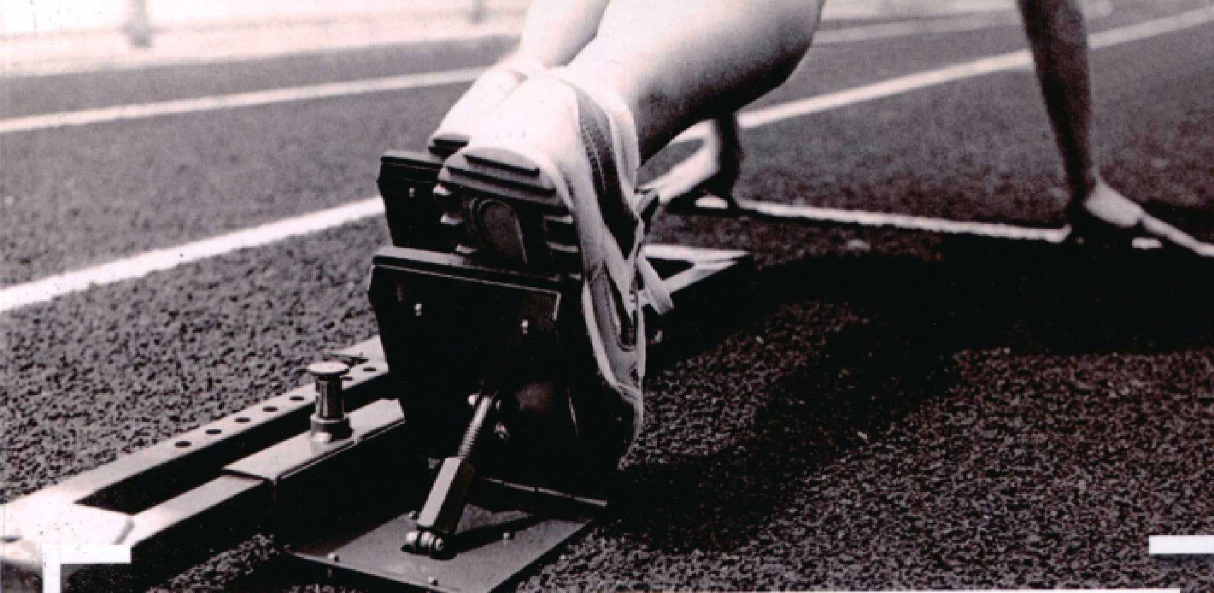

奥赛经典

专题研究系列

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

奥林匹克数学中的组合问题

◇张垚 沈文选 冷岗松/编著

湖南师范大学出版社

奥赛经典

高级教程系列

◎数学奥林匹克教程
◎物理奥林匹克教程
◎物理奥林匹克实验教程
◎化学奥林匹克教程
◎化学奥林匹克实验教程
◎生物奥林匹克教程
◎生物奥林匹克实验教程
◎信息学奥林匹克教程·基础篇
◎信息学奥林匹克教程·提高篇
◎信息学奥林匹克教程·语言篇
◎信息学奥林匹克教程·数据结构篇

初中教程系列

◎初中数学奥林匹克实用教程　第一册
◎初中数学奥林匹克实用教程　第二册
◎初中数学奥林匹克实用教程　第三册
◎初中数学奥林匹克实用教程　第四册

解题金钥匙系列

◎初中数学　◎高中数学
◎初中物理　◎高中物理
◎初中化学　◎高中化学
◎高中生物　◎高中信息学

专题研究系列

◎奥林匹克数学中的代数问题
◎奥林匹克数学中的几何问题
◎奥林匹克数学中的组合问题
◎奥林匹克数学中的数论问题
◎奥林匹克数学中的真题分析

热点专题系列

◎初中数学竞赛热点专题
◎初中物理竞赛热点专题
◎初中化学竞赛热点专题
◎初中生物竞赛热点专题
◎高中数学竞赛热点专题
◎高中物理竞赛热点专题
◎高中化学竞赛热点专题
◎高中生物竞赛热点专题

典型试题系列

◎数学奥林匹克典型试题剖析
◎物理奥林匹克典型试题剖析
◎化学奥林匹克典型试题剖析
◎信息学奥林匹克典型试题剖析

分级精讲与测试系列

◎初一数学　◎初二数学
◎初三数学　◎初二物理
◎初三物理　◎初三化学
◎高一数学　◎高二数学
◎高一物理　◎高二物理
◎高一生物　◎高二生物
◎高一化学　◎高二化学

⊙组　　稿＝廖小刚
⊙责任编辑＝廖小刚
⊙装帧版式＝周基东

定价：28.00元

ISBN 978-7-5648-0028-4

9 787564 800284 >

奥赛经典

专题研究系列

奥林匹克数学中的组合问题

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 | 组编

◇张 垚　沈文选　冷岗松/编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

奥林匹克数学中的组合问题 / 张垚，沈文选，冷岗松编著．—修订本．—长沙：湖南师范大学出版社，2009.7
（奥赛经典丛书·专题研究系列）
ISBN 978-7-5648-0028-4

Ⅰ．奥…　Ⅱ．①张…②沈…③冷…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 074341 号

奥林匹克数学中的组合问题
张　垚　沈文选　冷岗松　编著

◇组　　稿：廖小刚
◇责任编辑：廖小刚
◇责任校对：蒋旭东
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
电话/0731.88853867　88872751　传真/0731.88872636
网址/http://press.hunnu.edu.cn
◇印刷：长沙化勘印刷有限公司

◇开本：730×960　1/16 开
◇印张：25.25
◇插页：0.25
◇字数：545 千字
◇版次：2004 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次修订
2009 年 7 月第 4 次印刷
◇书号：ISBN 978-7-5648-0028-4
◇定价：28.00 元

前 言

组合数学历史悠久,几千年前,我国的《河图》、《洛书》就已经涉及一些简单有趣的组合问题.近20年来,由于计算机科学、编码理论、规划论、数字通讯、试验设计等学科的迅猛发展,提出了一系列需要离散数学解决的理论和实际问题,加上组合数学的自身的逻辑要求提出的问题以及其他数学分支向组合数学提出的问题,促进了组合数学的研究十分活跃而富有成果,解决问题的方法和技巧更富有变化,使这一古老的数学分支成为了一门充满了活力的学科.

数学竞赛中出现的组合问题往往在表达形式上简单明了,而求解这些问题却需要敏锐的洞察力、丰富的想象力和必要的技巧,通常没有一个固定的解题模式可遵循,而且各种难易程度不同的问题都非常富有,所以在各类不同程度的智力训练和数学竞赛中,大都离不开组合问题.

本书分为7章,每章重点讨论和研究了一类在数学竞赛中经常出现的组合问题.除了介绍必要的组合数学的有关知识外,着重介绍了解这类问题的一些基本方法.在介绍解题方法时,配备了一些相当于全国高中数学联赛水平的例题(个别例题为中国数学奥林匹克(CMO)和国际中学生数学奥林匹克(IMO)中较易的问题).每章最后一节为典型例题解题分析,所配备的例题相当于CMO和IMO的水平.

每章配备有一定数量的习题,A类习题相当于高中联赛水平,B类习题相当于CMO和IMO的水平.

在例题、习题的选择方面,我们尽可能选编一些较新颖的,尤其是近几年国内外数学竞赛中有关组合数学的试题,也包括少量作者自己编拟的问题.在本书中我们特别注意引导读者对解决问题的思想方法进行探索、分析和总结,希望通过这部分内容的学习,能使读者的数学修养以及解决有关数学竞赛中组合问题的能力有所提高.

编者

2004年3月

再版前言

第二版与第一版比较,主要作了如下的一些修改和补充:

(1)补充了近几年国内外数学竞赛中出现的一些有代表性的试题作为例题和习题,同时也删去了部分陈旧的例题和习题.

(2)增加了第一章§2-6,第二章§2-3以及第三章§2-4,同时将原书第二章§1-4移至第一章§1-7.

(3)改正了原书中出现的一些错误.

本书出版以来,很多参加竞赛培训的老师和学生热心地指出其中的一些错误并提出一些宝贵意见,这对提高本书的质量有极大的帮助.借此机会致以深深的谢意,并热诚欢迎广大读者给本书提出批评并指正.

编者

2009年7月

目 录

第一章　组合数学中的计数问题

§1　基础知识

1. 加法原理与乘法原理

如果完成一件事情的方法可分成 n 个互不相交的类,且第一类中有 m_1 种方法,第2类中有 m_2 种方法,…,第 n 类中有 m_n 种方法,那么完成这件事一共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法.这就是加法原理,简称为分类相加.

如果完成一件事要分 n 步,且第1步有 m_1 种方法,第2步有 m_2 种方法,…,第 n 步有 m_n 种方法,那么完成这件事一共有 $m_1m_2\cdots m_n$ 种方法.这就是乘法原理,简称为分步相乘.

2. 无重复的排列与组合

(1)无重复的排列

从 n 个不同元素中,任取 $m(\leqslant n)$ 个不同元素,按照一定的顺序排成一列(或者从 n 个不同元素中,有序地任取 $m(\leqslant n)$ 个不同元素),叫做从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的一个排列.

从 n 个不同元素中取出 $m(\leqslant n)$ 个不同元素的排列的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的排列数,用符号 P_n^m 或 A_n^m 表示.由乘法原理得

$$P_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1).$$

(取第1个元素放在第1个位置有 n 种方法,取定第一位后,由于元素不允许重复,选择第二位有 $n-1$ 种方法,…,选择第 m 位有 $n-m+1$ 种方法).

特别 $m=n$,就得到 n 个不同元素的全排列数公式

$$P_n^n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!.$$

为了方便起见,约定 $0!=1$,则上面的公式可写为 $P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

(2)无重复的组合

从 n 个不同元素中任取 $m(\leqslant n)$ 个不同元素并成一组(或者从 n 个不同元素中,无

序地任取 $m(\leqslant n)$ 个不同元素),叫做从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素的组合.

从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的所有组合的个数,叫做从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的组合数,用符号 C_m^n 表示,其计算公式为

$$C_m^n=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}.$$

事实上,对于每一个从 n 个不同元素取 m 个不同元素的组合,将其元素作全排列可产生 $m!$ 个不同的排列.显然不同的组合产生的排列互不相同,且每个排列都可以分 2 步得到.由乘法原理可得 $P_n^m=C_n^m\cdot m!$,于是 $C_n^m=\dfrac{P_n^m}{m!}$.

3. 可重复的排列与组合

(1)可重复的排列

从 n 个不同元素中任取(允许重复)$m(\geqslant 1)$个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复排列.

由乘法原理易知,从 n 个不同元素中取 $m(\geqslant 1)$个元素的所有可重复排列个数为 n^m(选第 1 位元素有 n 种方法,选定第 1 位后,选第 2 位仍有 n 种方法,…,最后,选第 m 位也有 n 种方法).

(2)有限个重复元素的全排列

设 n 个元素由 k 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 组成,其中 a_1 有 n_1 个,a_2 有 n_2 个,…,a_k 有 n_k 个($n_1+n_2+\cdots+n_k=n$),那么这 n 个元素的全排列称为有限个重复元素的全排列,其排列数为 $\dfrac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$.

事实上,若 n 个元素互不相同,则全排列数为 $n!$,但其中 a_i 有 n_i 个,它们之间任意交换顺序(共有 $n_i!$ 种交换顺序的方法),得到的是同一排列($i=1,2,\cdots,k$).故不同的排列个数为 $\dfrac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$.

(3)可重复的组合

从 n 个不同元素中,任意可重复地选取 $m(\geqslant 1)$个元素,称为 n 个不同元素取 m 个元素的可重复的组合,其不同组合的个数为 C_{n+m-1}^m.

事实上,不妨设 n 个元素为 $1,2,\cdots,n$,设取出的 m 个元素为

$(1\leqslant)a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_m(\leqslant n)$,

则显然 $(1\leqslant)a_1+0<a_2+1<\cdots<a_m+m-1(\leqslant n+m-1)$.

将 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 与 $(a_1+0,a_2+1,\cdots,a_m+m-1)$ 对应,后者为从 $n+m-1$ 个不

同元素1,2,3,…,$n+m-1$ 中取 m 个不同元素的组合,且不同的$(a_1,a_2,\cdots,a_m)$对应的$(a_1+0,a_2+1,\cdots,a_m+m-1)$是不同的.反过来,从 1,2,…,$n+m-1$ 中任取 m 个不同的数的组合

$$(1\leqslant)b_1<b_2<\cdots<b_m(\leqslant n+m-1)$$

也恰好对应于一个从 n 个元素 1,2,…,n 中取 m 个可重复元素的组合

$$(1\leqslant)b_1-0\leqslant b_2-1\leqslant\cdots\leqslant b_m-m+1(\leqslant n).$$

因此,上面所说对应是一一对应,故所求组合数等于从 $n+m-1$ 个不同的元素 1,2,…,$n+m-1$ 中取 m 个不同元素的组合数,即 C_{n+m-1}^{m}.

4. 圆排列与项链数

从 n 个不同元素中取 m 个不同元素排在一个圆周上,称为从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的圆周排列,其排列数为

$$\frac{P_n^m}{m}=\frac{n!}{m\cdot(n-m)!}.$$

事实上,对每一个固定的 m 个元素的圆排列,在任意两个元素之间将圆周剪开,沿顺时针方向拉直恰产生 m 个直线排列,且不同的圆排列所产生的直线排列互不相同.又易见从 n 个不同元素取 m 个不同元素的排列都可以这样从圆排列中得到,所以,所求圆排列数的 m 倍恰是从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的排列数 P_n^m,由此得出上述结论.

特别地,将 n 个不同元素排成一个圆周的圆排列数为$\frac{P_n^n}{n}=(n-1)!$.

若将 n 粒不同的珍珠,用线串成一根项链的不同方法数记为 D_n,则

$$D_n=\begin{cases}1(n=1\text{ 或 }2),\\ \frac{1}{2}(n-1)!\ (n\geqslant 3).\end{cases}$$

这是因为将一个按顺时针方向排列的 $n(\geqslant3)$个不同元素的圆排列,改为逆时针方向排列时,得到的是不同的圆排列,而项链则没有顺时针方向与逆时针方向排列的区别,故 $n\geqslant3$ 时,n 粒不同珠子的项链数等于 n 粒不同珠子的圆排列数的一半.而 $n=1$ 或 2 时,显然项链数等于 1.

5. 容斥原理

对于有限集合 S,我们用 $|S|$ 表示 S 中元素的个数,若 S_1 是 S 的子集,则 $\overline{S_1}=S\setminus S_1$表示 S_1 在 S 中的补集.

定理 1(容斥原理) 设 S 是有限集合,$S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是 S 的子集,则

$$\begin{aligned}|\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\cdots\cap\overline{S}_n| = |S| - \sum_{i=1}^{n}|S_i| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|S_i\cap S_j| - \cdots +\\ (-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap\cdots\cap S_{i_k}| + \cdots +\\ (-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.\end{aligned} \qquad ①$$

证明(贡献法) 只要对任意 $x\in S$,证明①式两边计算 x 的次数是相同的即可.

若 x 不属于 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 中任何集合,则 x 在①式左边计算了 1 次,x 在①式右边第 1 项 $|S|$ 中计算了 1 次,而在①式右边其余各个和式项中计算的次数为 0,故 x 在①式右边计算的总次数也为 1.

若 x 恰属于 $S_1,\cdots,S_n$ 中 k 个集合,这里 $k\geqslant 1$,则 x 在①式左边计算的次数为 0,而在右边的第一项,第二项,$\cdots$,第 $k+1$ 项,$\cdots$,最后一项中,x 计算的次数分别为 $1,C_k^1,C_k^2,\cdots,C_k^k,0,0,\cdots,0$.故 x 在①式右边计算的总数为

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^k C_k^k + 0 + \cdots + 0 = (1-1)^k = 0.$$

综合上面的讨论,我们知道对任意 $x\in S$,①式两边计算 x 的次数(即 x 对等式两边所作的贡献)相等.故①式成立.

对 S 的任意子集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,因

$$\overline{S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n} = \overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\cdots\cap\overline{S}_n,$$

故 $|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n| + |\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\cdots\cap\overline{S}_n| = |S|$.于是,由定理 1 可推出下面定理 2.

定理 2(容斥原理的对偶形式) 对任意有限集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,我们有

$$\begin{aligned}|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n| = \sum_{i=1}^{n}|S_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|S_i\cap S_j| + \cdots +\\ (-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap\cdots\cap S_{i_k}| + \cdots +\\ (-1)^{n-1}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|.\end{aligned}$$

注 有的书中称定理 1 为包含排斥原理,而将定理 2 称为容斥原理.本书中将定理 1 和 2 都称为容斥原理.

6. 算二次原理(富比尼原理)

所谓算二次原理(又称富比尼原理)就是对同一个量,如果用两种不同的方法去计算,所得的结果应相等.

例如一个 $m\times n$ 的数表(数学中称之为 $m\times n$ 矩阵):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

若先算第 i 行元素之和 $r_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(i=1,2,\cdots,m)$，再把各行的和加起来，得到表内各数的总和为$\sum\limits_{i=1}^{m}r_i=\sum\limits_{i=1}^{m}(\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij})$.

另一种算法是先算出第 j 列元素之和 $l_j=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}$，$l_j=1,2,\cdots,n$，再把各列的和加起来，也得到表内各数的总和$\sum\limits_{j=1}^{n}l_j=\sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij})$. 于是，我们有$\sum\limits_{i=1}^{m}r_i=\sum\limits_{j=1}^{n}l_j$. 即

$$\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij})=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}).$$

一般说来，设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$是两个有限集合，我们称 $S=A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$为 A 与 B 的笛卡尔乘积. 对任意 $a_i\in A$，设 $C_i=\{(a_i,b)\mid b\in B\}(i=1,2,\cdots,m)$，对任意 $b_j\in B$，设 $D_j=\{(a,b_j)\mid a\in A(j=1,2,\cdots,n)$. 于是$|S|=\sum\limits_{i=1}^{m}|C_i|=\sum\limits_{j=1}^{n}|D_j|$.

计数中的富比尼原理是富比尼(G. Fubini)最先证明的关于测度空间中二重积分交换次序的富比尼定理之特例. 在应用富比尼定理时，关键在于按照适当的条件，选择集合 A 和 B 并将 A 中元素与 B 中元素配对，然后用两种不同的方法进行计算，故又称为算二次原理.

7. 母函数

定义 我们称形式幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$为数列 a_0，$a_1,\cdots,a_n\cdots$的母函数，当且仅当 $a_n=b_n(n=0,1,2,\cdots)$时，称$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，且还有下列定义：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n,$$

$$\alpha(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha\cdot a_nx^n,$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k})x^n.$$

母函数方法是计数的一种重要方法，在应用母函数方法解题时，除了应用二项式定理外，还要用到下列公式：

公式Ⅰ(无穷递缩等比数列求和公式)

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots(|x|<1).$$

公式Ⅱ 对任意正整数 k，有

$$\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{k-1}x^n=1+C_k^{k-1}x+C_{k+1}^{k-1}x^2+\cdots+C_{n+k-1}^{k-1}x^n+\cdots(|x|<1).$$

公式Ⅱ可由公式Ⅰ两边求 $k-1$ 次导数后，除以 $(k-1)!$ 而得到，也可利用公式 $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$ 和公式Ⅰ并应用数学归纳法来证明.

§2 解组合计数问题的基本方法

1. 枚举法和利用基本计数原理及基本公式

所谓枚举法，就是把要计数的集合 M 中的元素逐一列举出来，不重复不遗漏，从而计算出 M 中元素的个数. 在枚举的过程中，常常要适当地分类和分步枚举，这就还要用到加法原理和乘法原理以及计数的基本公式.

例 1 过正方体的任意 2 个顶点作一直线，在这些直线中，不互相垂直的异面直线共有________对. （2000 年湖南省中学生奥林匹克夏令营试题）

解 首先，与一条棱不垂直且异面的直线有 6 条(4 条侧面对角线及 2 条体对角线所在直线)，12 条棱可生成 $12\times6=72$ 对异面直线.

其次，与一条面对角线不垂直且异面的直线有 8 条(4 条棱及 4 条侧面对角线所在直线)，12 条侧面对角线可生成 $12\times8=96$ 对异面直线.

最后，与一条体对角线不垂直且异面的直线有 6 条(6 条棱所在直线)，4 条体对角线可生成 $6\times4=24$ 对异面直线.

因为上述计数中，每对异面直线计算了 2 次，故不互相垂直的异面直线共有 $\frac{1}{2}(72+96+24)=96$ 对.

例 2 设 $ABCDEF$ 为正六边形，一只青蛙开始在顶点 A 处，它每次可随意跳到相邻两顶点之一. 若在 5 次内跳到 D 点，则停止跳动. 若 5 次内不能到达 D 点，则跳完 5 次也停止跳动. 那么这只青蛙从开始到停止，可能出现的不同跳法共________种.

（1997 年全国高中联赛试题）

解 如图 1－1，显然青蛙不可能经过跳 1 次，2 次，4 次到达 D 点，故青蛙的跳法只有两种情形.

(1)青蛙经过跳 3 次到达 D 点，这时只有 2 种跳法.

(2)青蛙一共跳 5 次后停止，这时跳 3 次的跳法(一定不能到达 D 点)有 2^3-2 种(每次有 2 种跳法，跳 3 次共有 2^3 种跳法，其中有 2 种跳法到达 D 点应去掉)，后 2 次跳法有 2^2 种，故青蛙一共跳 5 次后停止的跳法有 $(2^3-2)\cdot2^2=24$ 种.

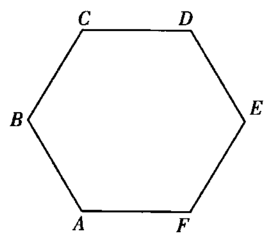

图 1－1

由(1)及(2)知青蛙共有 $2+24=26$ 种跳法.

例 3 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 是 $\{1901,1902,\cdots,2000\}$ 的任意排列,部分和数列 $S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2$, $S_3=a_1+a_2+a_3$, $\cdots$, $S_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}$. 若数列 $S_j(1\leqslant j\leqslant 100)$ 中每一项均不被 3 整除,问这样的数列有多少个? (2000 年加拿大奥林匹克试题)

解 令 $\{1901,1902,\cdots,2000\}=R_0\cup R_1\cup R_2$,这里 R_i 中的任意元素模 3 与 i 同余 $(i=0,1,2)$,则 $|R_0|=|R_1|=33$, $|R_2|=34$. 设 a_i 除以 3 的余数为 $a'_i(i=1,2,\cdots,100)$,于是排列 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$ 的部分和能否被 3 整除由排列 $S'=\{a'_1,a'_2,\cdots,a'_{100}\}$ 来决定,且 S' 中共 33 个 0,33 个 1,34 个 2. 故欲使 S 的任何部分和数列不被 3 整除,则 S' 中 67 个由 1 和 2 组成的数列应为 $1,1,2,1,2,\cdots,1,2$ 或 $2,2,1,2,1,\cdots,2,1$,但 $|R_2|=|R_1|+1$,故只有第 2 种情形才可能. S' 中 33 个 0,除了 $a'_1\neq 0$ 可放在其他任何位置,这样有 C_{99}^{33} 种方式,故满足条件的排列共有 $C_{99}^{33}\cdot 33!\ 33!\ 34!=\dfrac{99!\ 33!\ 34!}{66!}$ 种.

例 4 将 2 个 a 和 2 个 b 共 4 个字母填在 4×4 方格表的 16 个小方格内,每个小方格内至多填 1 个字母,若使相同字母既不同行也不同列,则不同的填法有________种(用数字作答). (2007 年全国高中联赛试题)

解 使 2 个 a 既不同行也不同列的填法有 $C_4^2P_4^2=72$ 种,同样,使 2 个 b 既不同行也不同列的填法也有 $C_4^2P_4^2=72$ 种,故有乘法原理,这样的填法有 72^2 种,其中不符合要求的有两种情况:2 个 a 所在方格内都填有 b 的情况有 72 种;2 个 a 所在方格内仅有 1 个方格内填有 b 的情况有 $C_{16}^1P_9^2=16\times72$ 种. 所以符合题设条件的填法共有 $72^2-72-16\times72=55\times72=3960$ 种.

例 5 某城市的机动车牌照是从"10000"到"99999"的连续编号,则在这 90000 个牌照中数字 9 至少出现 1 个,并且各位数字之和是 9 的倍数的车牌照共有________个. (2004 年四川省初赛试题)

解 易知,其中能被 9 整除的数有 10000 个. 以下考虑这 10000 个数中不含数字 9 的个数. 设这种牌照的号码为 $ABCDE$,设 $A+B+C+D$ 被 9 除的余数为 T,则只需取 $E=9-T$(当 $T=0$ 时,取 $E=0$)即可满足要求了,于是 A 可取 $1\sim8$, B 可取 $0\sim8$, C 可取 $0\sim8$, D 可取 $0\sim8$,当 A,B,C,D 确定后,E 也确定了,故不含数字 9 的有 $8\times9\times9\times9=5832$ 个. 所以满足条件的车牌照共有 $10000-5832=4168$ 个.

例 6 将一个四棱椎的每一个顶点染上一种颜色,并使同一棱的两端点异色. 如果只有 5 种颜色可供使用,那么不同的染色方法总数是________. (1995 年全国高中联赛试题)

解法一 依题意,四棱锥 $S-ABCD$ 的顶点 S,A,B 互不同色,它们有 $P_5^3=60$ 种染色方法.