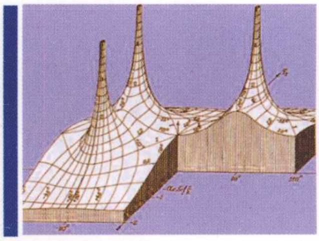
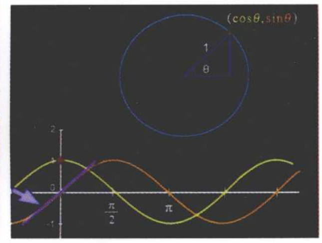
高等教育“十一五”规划教材



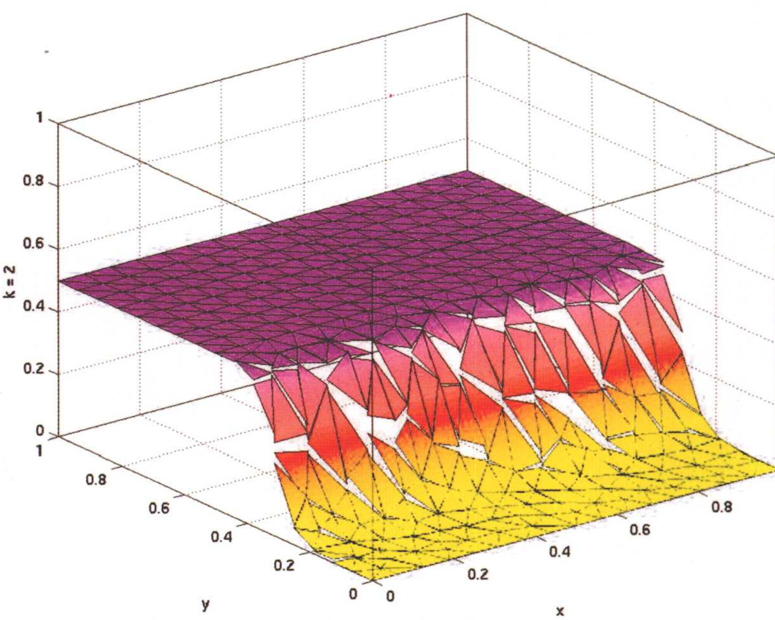


高职高专公共基础课教材系列

微积分

WEI JI FEN

韩田君　陈　宇　主编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

高职高专公共基础课教材系列

微　积　分

韩田君　陈　宇　主编
王志勇　主审

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共分七章，内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学和微分方程. 每章都有相应的经济实例和 Mathematica 实验，注重实用性. 每章均配有适量习题. 附录提供了 Mathematica 软件的内建函数.

本书可以作为高等职业院校经济管理类各专业教材，也可作为经济管理人员学习微积分知识的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/韩田君，陈宇主编. —北京：科学出版社，2009
(高等教育“十一五”规划教材·高职高专公共基础课教材系列)
ISBN 978-7-03-025343-9

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①韩…②陈… Ⅲ. 微积分-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 148776 号

责任编辑：沈力匀 张 斌/责任校对：柏连海
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2009 年 8 月第一次印刷 印张：9 1/4
印数：1—3 200 字数：220 000

定价：17.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235 (VP04)

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

本书编写人员

主　编　韩田君　陈　宇

主　审　王志勇

副主编　徐爱华　李　亮　郑　丽

编　委　韩建华　贯敬堂　杜晓芳　王秀海　王庭瑛
　　　　郑克敏　牛英群

前　　言

本书根据教育部制定的“高职高专数学教学基本要求”，由从事多年高职高专经济数学教学工作的教师执笔编写，注重概念的直观性和方法的启发性，突出了“以应用为目的，以必需、够用为度”的思想，内容通俗易懂，由浅入深，注重应用，体现了高职高专教育特色。

全书系统地讲解了高职高专经济管理专业方面的微积分基础知识和基本方法，内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学和微分方程。每章都有相应的经济实例和 Mathematica 实验，注重实用性。

本书理论系统，举例丰富，讲解透彻，难度适宜，适合作为高职高专经济管理类各专业的微积分课程的教材，也可作为经济管理人员学习经济管理方面微积分知识的参考书。

参加本书编写的有韩田君、陈宇、郑丽、徐爱华、韩建华、李亮、贾敬堂、杜晓芳、王秀海、王庭瑛、郑克敏、牛英群等。王志勇教授对本书的编写给出了很多指导性的建议，使我们受益匪浅。

由于作者水平所限，时间也比较仓促，本书难免有不足、遗漏和差错之处，衷心希望广大读者不吝指正，以使本书在教学实践之中不断完善。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第一章　函数与极限

生活中的各种事物都在一定的空间中运动变化，在运动变化的过程中都存在一定的数量关系. 在对它们进行定量描述和研究的过程中，一般涉及两类基本的量：常量和变量. 函数就是从量上对这种运动变化过程的抽象描述，它是一种描述运动变化过程中变量之间依赖关系的数学模型，微积分主要研究函数的一些局部和整体的性态. 极限是微积分的基本概念之一，微积分中的很多概念都能用极限表述，它们的主要性质和法则也是用极限推导出来的. 本章介绍了有关函数的知识，给出了极限的概念、性质及运算等微积分的基础知识.

第一节　函　　数

一、函数概念

在同一自然现象或社会现象中，一般会有几个变量在同时变化着，这些变量的变化并不是孤立的，而是相互联系并遵循一定的规则. 函数就是描述这种联系的一个规则.

例 1.1　某厂每年最多生产某产品 300 吨，固定成本 20 万元，每生产 1 吨成本增加 0.5 万元，则该厂每年产品的总成本 y(万元)与年产量 x(吨)有如下关系：

$$y = 20 + 0.5x \qquad (0 \leqslant x \leqslant 300)$$

即当 x 在生产能力允许的范围$[0,300]$内取定某一数值时，总成本也随之有一个确定的数值与之对应.

例 1.2　股市是经济的晴雨表. 2007 年，我国股市上证综指收盘价从 2612 点上升到 6092 点，图 1.1 所示是利用 Excel 制作的 2007 年上证综合指数收盘价图.

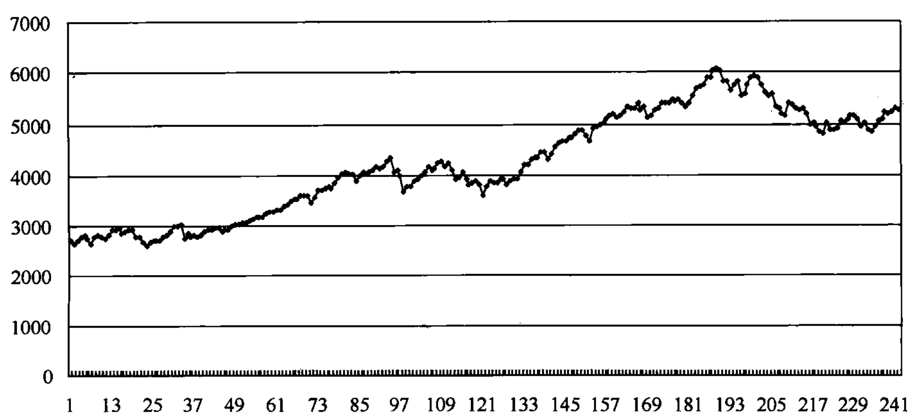


图 1.1

例 1.3 某地区 2001～2008 年人口估计数字如表 1.1 所示：

表 1.1

年份	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
人口/百万人	39.06	40.75	41.22	43.64	44.36	45.19	45.86	46.39

如果将上面这些变量之间的对应关系抽象出来，就可以得到函数的概念.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量按照一定的法则总有唯一确定的 y 值和它对应，则称 **y 是 x 的函数**，记作

$$y=f(x).$$

其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**. x 的变化范围 D 叫做函数的**定义域**，对应的 y 值的变化范围叫做函数的**值域**，记作

$$W=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

要注意的是，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是不同的：前者表示自变量 x 与因变量 y 之间的函数对应关系，后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了方便，习惯上也常用 $f(x)$ 或 $y=f(x)$ 来表示函数.

函数的记号 f 也可以用其他的字母来表示，如 g,h,F,φ 等，有时还直接用因变量的记号来表示函数，即 $y=y(x)$，这时字母 y 既表示因变量，又表示函数.

由函数的定义可以看出，函数概念有两个要素：定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数就是相同的，否则是不同的.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 而在数学中，函数的定义域就是自变量所能取得是算式有意义的一切实数的集合，也就是函数的自然定义域.

函数的表示方法一般有三种：公式法，图示法，表格法. 公式法也叫解析法，常用于理论研究，是我们用得最多的方法.

有些函数对于其定义域内自变量取不同值时，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为**分段函数**.

例 1.4 函数 $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$.

这是绝对值函数，定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，图形如图 1.2 所示.

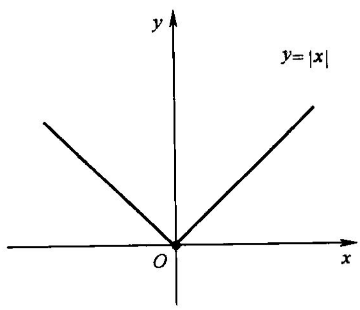


图 1.2

例 1.5　符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 当\ x>0 \\ 0, & 当\ x=0 \\ -1, & 当\ x<0\end{cases}$.

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，图形如图 1.3 所示. 对于任何实数 x，下列关系式成立：

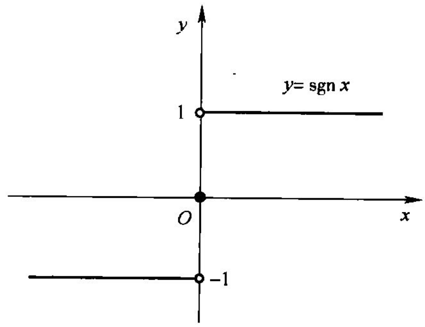


图 1.3

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|.$$

如，$\operatorname{sgn}(-2)\cdot|-2|=-1\cdot 2=-2$.

例 1.6　某商品共有 1000 吨可供销售，每吨售价 80 元，若销售量 x 不超过 800 吨，则按原价出售；若销售量 x 超过 800 吨，则超过部分按 9 折的价格优惠出售. 试求收益函数 $R(x)$.

解　由题意得，在不同销售量(需求量)范围售价也不同，应该分段考虑.
由于收益＝需求量×售价，则

当 $0\leqslant x\leqslant 800$ 时，售价为 80 元，收益 $R(x)=80x$.

当 $800<x\leqslant 1000$ 时，售价为 $80\times 0.9=72$ 元，超过部分为 $x-800$，此时

$$R(x)=80\times 800+72(x-800)=6400+72x,$$

即分段函数

$$R(x)=\begin{cases}80x, & 0\leqslant x\leqslant 800 \\ 6400+72x, & 800<x\leqslant 1000\end{cases},$$

该函数的定义域为$[0,1000]$.

二、函数的特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果存在正数 M，使得对于任意 $x\in I$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

显然，如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，是上述不等式成立的常数 M 不是唯一的，有界性体现在常数 M 的存在性.

函数的有界性依赖于区间，例如函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间(1,2)内是有界的，而在区间(0,1)内是无界的.

函数的有界性还可以等价表述为：如果存在正数 M_1 和 M_2 使得对于任意 $x\in I$，恒有

$$M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，M_1 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的下界，M_2 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的上界.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调增加**的(简称**递增**)；如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调减少**的(简称**递减**).

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数. 使函数保持单调的区间叫做单调区间.

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的，可以用↗表示；单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的，可以用↘表示.

如 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的. $y=x^2$ 定义域为$(-\infty,+\infty)$，而$(-\infty,0)$是它的单调减区间，$(0,+\infty)$是它的单调增区间.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则 $-x\in D$). 如果对于任意 $x\in D$，有

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对于任意 $x\in D$，有

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如，$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=\tan x$ 等都是奇函数；$y=x^2$，$y=\cos x$ 等都是偶函数.

奇函数的图形是关于原点中心对称的，偶函数的图形是关于 y 轴对称的.

容易证明，两个奇函数之和仍是奇函数，两个偶函数之和仍是偶函数，两个奇函数之积是偶函数，两个偶函数之积也是偶函数，一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

4. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的数 T，使得对于定义域 D 内的任意 x 值，$x\pm T$ 仍在 D 内，且 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为函数的**周期**. 而习惯上，函数的周期是指使 $f(x)=f(x+T)$ 成立的最小正数，即**最小正周期**.

如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

周期函数.

三、反函数与复合函数

1. 反函数

在函数关系中，自变量和因变量的地位往往是相对的，可以把任意一个变量看作是自变量或因变量.

如某种商品的单价为 p，销售量为 x，则销售总收入 R 是 x 的函数

$$R = px.$$

此时 x 是自变量. 而如果已知总收入 R，反过来求销售量 x，则有

$$x = \frac{R}{p}.$$

此时 R 是自变量. 这时我们称后一函数是前一函数的**反函数**.

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 W. 如果对于 W 中的每一个 y，都有唯一的 $x\in D$，使 $f(x)=y$，此时得到一个定义在 W 上的新函数，此函数称为 $y=f(x)$的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，而 $y=f(x)$称为**直接函数**.

由定义 1.2 可见，反函数 $x=f^{-1}(y)$的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域.

函数的实质在于它的定义域和对应法则，而用什么字母表示自变量和因变量是无关紧要的. 习惯上常以 x 表示自变量，y 表示因变量，因此常常对调 x 和 y，把反函数 $x=f^{-1}(y)$改写成 $y=f^{-1}(x)$. 今后提到的反函数，一般就是指这种经过改写的反函数.

如 $y=10^x$ 的反函数是 $x=\lg y$，或改写成 $y=\lg x$.

一般来讲，求 $y=f(x)$的反函数要先从中解出 x，再交换 x 和 y 即可.

并不是所有的函数都存在反函数，但是在某区间上单调的函数在该区间上一定存在反函数.

由于 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的关系是 x 与 y 互换，所以它们的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1.4 所示.

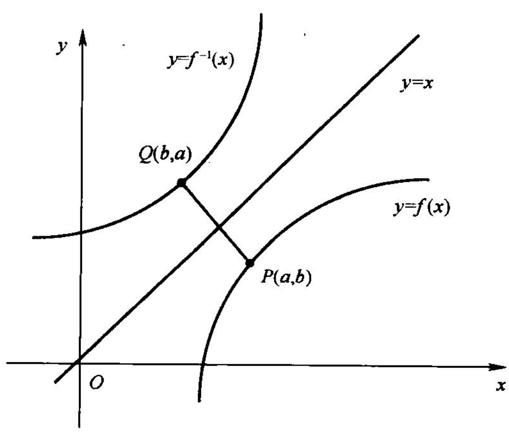


图 1.4

2. 复合函数

设

$$y=u^3,\quad u=1+2x,$$

把 $u=1+2x$ 代入 $y=u^3$ 可以得到函数

$$y=(1+2x)^3,$$

这个函数就是由 $y=u^3$ 及 $u=1+2x$ 复合而成的复合函数.

一般来说,若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D,而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z;若 $D\cap Z\neq\varnothing$,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数. 其中 x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量.

例如,$y=\sqrt{1-x^2}$ 可以看作由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成的,它的定义域为 $[-1,1]$,是 $u=1-x^2$ 定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的子集;$y=\arctan x^2$ 可以看作由 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成的,它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,也就是 $u=x^2$ 的定义域.

要注意的是,不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 如 $y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能构成一个复合函数. 因为 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 与 $u=2+x^2$ 的值域 $[2,+\infty)$ 的交集为 $\varnothing$.

另外,复合函数不仅可以由两个函数复合而成,也可以有更多个函数复合而成. 例如,$y=(\sin\ln x)^2$ 可以看作由三个函数:$y=u^2$,$u=\sin v$,$v=\ln x$ 复合而成;$y=\sqrt{\ln(\sin x^2)}$ 可以看作由四个函数:$y=\sqrt{u}$,$u=\ln v$,$v=\sin w$,$w=x^2$ 复合而成.

上面这种将一个复合函数分解成多个简单函数的复合,在后面函数的导数运算中是十分重要的.

四、初等函数

1. 基本初等函数

(1)幂函数 $y=x^\mu$.

其中,μ 是常数. 对于任意的 μ,x^μ 在 $(0,+\infty)$ 内都有定义;对于不同的 μ,x^μ 的定义域有所不同. 幂函数的图形过点(1,1),如图 1.5 所示.

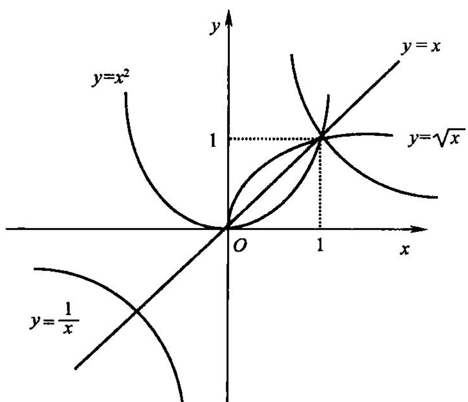


图 1.5

(2)指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$.

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$,图形过点$(0,1)$. 当 $0<a<1$ 时,a^x 是单调减少函数;当 $a>1$ 时,a^x 是单调增加函数(图 1.6).

(3)对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$.

它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数,定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,图形过点$(1,0)$. 当 $0<a<1$ 时,$\log_a x$ 单调减少函数;当 $a>1$ 时,$\log_a x$ 是单调增加函数(图 1.7).

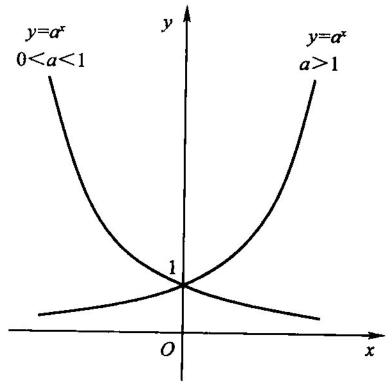


图 1.6

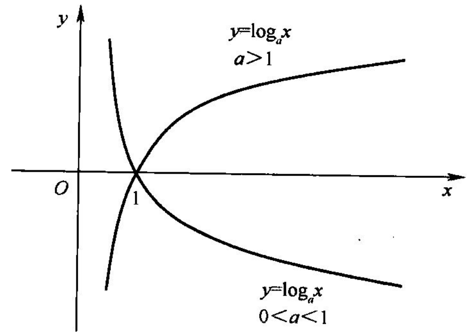


图 1.7

(4)三角函数包括正弦函数,余弦函数,正切函数,余切函数,正割函数,余割函数.

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,它是奇函数,是周期为 2π 的周期函数(图 1.8).

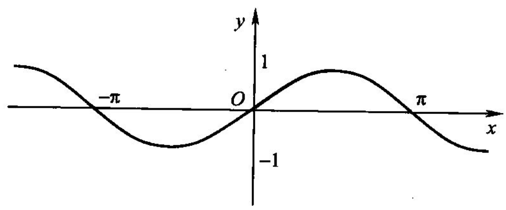


图 1.8

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,它是偶函数,是周期为 2π 的周期函数(图 1.9).

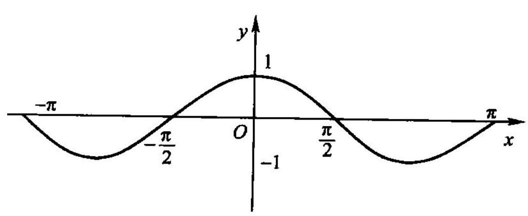


图 1.9

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为不含 $n\pi+\frac{\pi}{2}$（n 为整数）的其他实数，值域为 $(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，是周期为 π 的周期函数（图 1.10）.

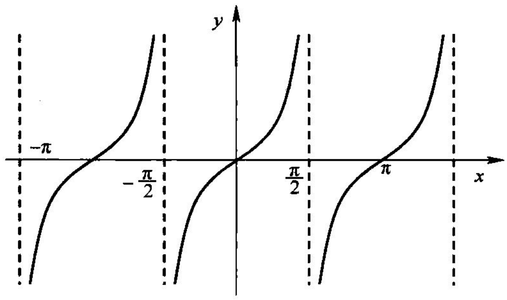


图 1.10

余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为不含 0 及 π 的整倍数的实数，值域为 $(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，是周期为 π 的周期函数（图 1.11）.

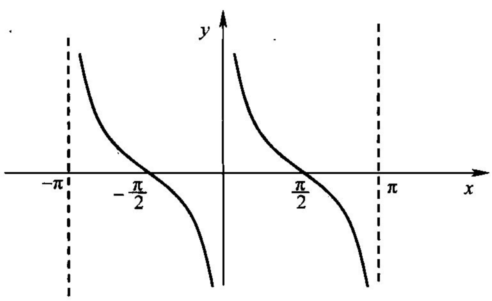


图 1.11

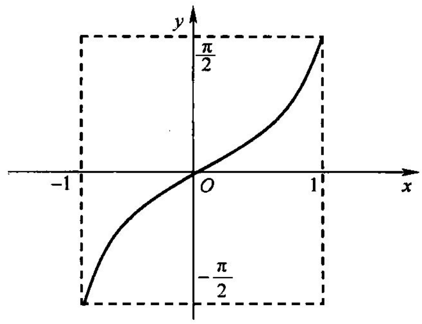


图 1.12

正割函数 $y=\sec x$ 的定义域为不含 $n\pi+\frac{\pi}{2}$（n 为整数）的其他实数，值域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，它是偶函数，是周期为 2π 的周期函数.

余割函数 $y=\csc x$ 的定义域为不含 0 及 π 的整倍数的实数，值域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，它是奇函数，是周期为 2π 的周期函数.

(5)反三角函数有：反正弦函数，反余弦函数，反正切函数，反余切函数.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的反函数，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，是单调增加的奇函数（图 1.12）.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是 $y=\cos x(x\in[0,\pi])$ 的反函数，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，是单调减少的函数（图 1.13）.

反正切函数 $y=\arctan x$ 是 $y=\tan x\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 的反函数，其定义域为 $(-\infty,$

$+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，是单调增加的奇函数(图 1.14).

反余弦函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 是 $y=\cot x(x\in(0,\pi))$ 的反函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，是单调减少的函数(图 1.15).

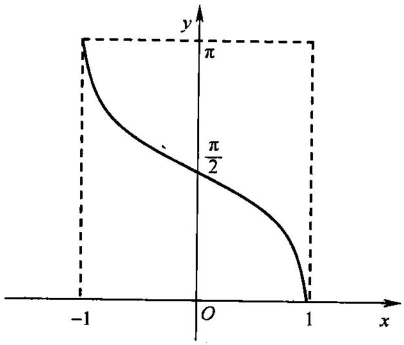


图 1.13

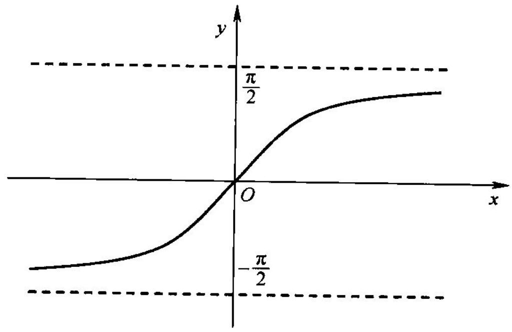


图 1.14

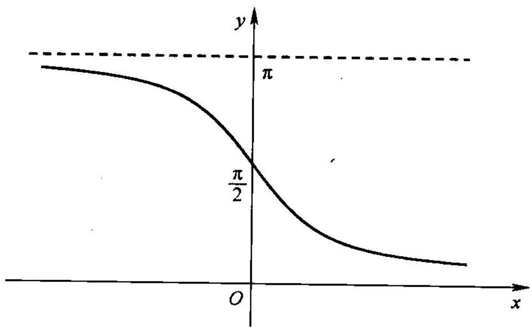


图 1.15

2. *初等函数*

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的函数复合步骤所构成并且可以用一个式子表示的函数，称为初等函数. 例如

$$y=\sqrt{1+x^2},\quad y=x^3e^{x^2},\quad y=2^{\sin x}+\ln\sqrt{3^x+2}+4\cos 5x$$

等都是初等函数. 而分段函数一般不是初等函数，如符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 就不是初等函数. 绝对值函数 $y=|x|$ 虽可分段表示，但由于$|x|=\sqrt{x^2}$，故仍是初等函数. 今后我们遇到的函数有许多不是初等函数，但在本课程中具体讨论的大都是初等函数.

五、常用经济函数

1. *需求函数和供给函数*

一种商品的市场需求量和市场供给量与产品的价格密切相关. 一般来讲，价格上涨会

使需求量下降,供给量上升;价格下降会使需求量上升,供给量下降.

市场需求量用 Q 表示,市场供给量用 S 表示,p 表示价格,如果不考虑市场其他因素的影响,则 Q 和 S 均是 p 的函数,即

$$Q=Q(p) \quad 和 \quad S=S(p).$$

$Q(p)$称为**需求函数**,$S(p)$称为**供给函数**.

一般来说,需求函数是价格的单调减少函数,常见的需求函数有:

线性需求函数:$Q=a-bp$,其中 $a\geqslant0,b\geqslant0$;

二次需求函数:$Q=a-bp-cp^2$,其中 $a\geqslant0,b\geqslant0,c\geqslant0$;

指数需求函数:$Q=Ae^{-bp}$,其中 $A\geqslant0,b\geqslant0$.

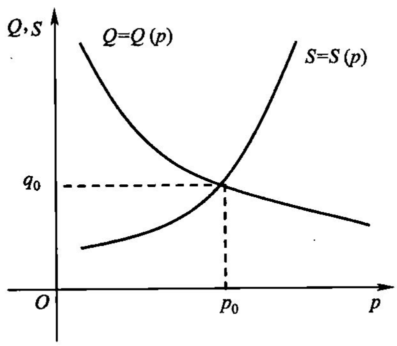


图 1.16

有时也将需求函数 $Q=Q(p)$的反函数价格函数 $p=p(Q)$称为需求函数.

供给函数一般是价格的单调增加函数,常见的需求函数有线性函数、二次函数、幂函数、指数函数等.

如果市场上某商品的需求量恰好等于供给量,则称某商品市场处于均衡状态.此时的商品价格称为市场均衡价格,需求量(供给量)就是市场均衡量.

某商品的需求曲线与供给曲线的交点,称为该商品的市场均衡点.显然市场均衡点的坐标就是均衡价格和市场均衡量(图 1.16).

例 1.7 已知某商品的需求函数为

$$Q=50-\frac{4}{3}p,$$

而它的供给函数为

$$S=\frac{2}{3}p-4,$$

求该商品的均衡价格和市场均衡量.

解 由市场均衡条件 $Q=S$,可得

$$50-\frac{4}{3}p=\frac{2}{3}p-4,$$

解得 $p=27$.

所以均衡价格 $p_0=27$,市场均衡量 $q_0=50-\frac{4}{3}p_0=14$.

2. 成本函数、收益函数和利润函数

在生产和经营活动中经营者最关心产品的成本、销售收入(收益)和利润.

产品的**总成本**是指生产和经营产品的总投入,通常用 C 表示;**总收益**是指产品售出后所得到的收入,通常用 R 表示;**总利润**就是总收益减去总成本的差,通常用 L 表示.

我们以 x 表示产量或销售量,在不计市场其他因素影响的情况下,C,R,L 都可以简单看作 x 的函数,$C(x)$称为**总成本函数**,$R(x)$称为**总收益函数**,$L(x)$称为**总利润函数**.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com