重

难点

基点

前　言

本书作为中学生课程辅导读物，旨在配合中学数学教师帮助学生更好地理解、消化教材的内容，起到落实“双基”、培养能力的作用。

我们根据多年从事教学、教研实践所积累的经验，依照教材的章节顺序，从教学重点、自学难点、训练基点三个方面对教材内容进行了深入的挖掘。教学重点中根据数学教学大纲精神列出了知识点和应达到的认知层次，对本单元的知识结构进行了图解，并对要点进行简要分析；自学难点中针对学生在学习过程中概念的模糊处、知识的难懂处、应用时的易错处进行了深入浅出的讲解；训练基点中对本单元知识的应用进行了归类、例举了题型，并提供了巩固本单元知识的若干训练题和形成性测试题。每章之后配有一套总结性测试题，用以反馈教与学的信息。训练题、测试题的答案附书后。

由于时间仓促，本书难免存在不足之处，诚望广大师生批评指正。

目　　录

第五章　不等式

【教学重点】

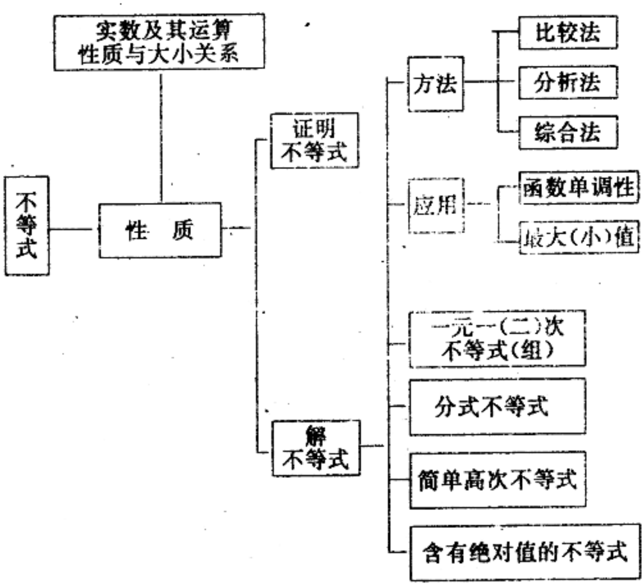
一、教学目标

节次	知识要点	认知层次			
		了解	理解	掌握	熟练运用
5.1 不等式	不等式的等价关系		√		
5.2 不等式的性质	不等式性质的推导			√	
5.3 不等式的证明	证明不等式的几种方法(比较法、分析法、综合法)			√	
	两个或三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理的推导与应用			√	
5.4 不等式的解法	不等式的解的有关概念	√			
	不等式组、二次不等式、高次不等式、分式不等式、指数不等式、对数不等式的解法			√	

节次	知识要点	认知层次			
		了解	理解	掌握	熟练运用
5.5 含有绝对值的不等式	两个数之和(或差)的绝对值不超过此两个数的绝对值的和，不小于此两个数的绝对值的差的定理的推导与应用			√	
	含有绝对值的不等式的解法			√	

二、内容剖析

(一)知识结构



(二)要点分析

1. 在初步建立不等式概念的基础上，证明它的一系列性质，

证明的出发点是根据实数大小的比较及减法的意义而直观得出的一组等价关系：$a-b>0\Longleftrightarrow a>b$

$$a-b=0\Longleftrightarrow a=b$$

$$a-b<0\Longleftrightarrow a<b.$$

这也是以后在不等式证明中进行同解变形的根据之一.

2. 不等式的证明，常用的方法有比较法、综合法、分析法、数学归纳法等. 要熟悉各种证法中的推理思路. 对它们的基本形式及其变形都要熟练掌握.

3. 不等式的解法，是根据两个不等式间的同解概念和一不等式的同解变形，将求解的不等式化到最简同解不等式：解不等式组也是这样. 解含有绝对值的不等式，常是根据绝对值概念将它化为同解的不等式组：

$|x|<a\Longleftrightarrow -a<x<a(a>0)$

$|x|>a\Longleftrightarrow x>a$，或 $x<-a(a>0)$. 不等式的解集往往是无限集，不能像解方程那样检验增根和失根. 因此在解不等式的过程中必须保持同解. 所谓同解，是指有相同的解集合（不只是有共同的一些解），这与不等式的解的概念、解集合的概念有关，也有集合的概念及其运算有关.

4. 实数大小的比较. 任意两个实数都可比较大小，常用的方法是差比较法：$A-B>\Rightarrow A>B$；$A-B=0\Rightarrow A=B$；$A-B<0\Rightarrow A<B$. 但有时也用商比较法：$\frac{A}{B}>1(B>0)\Rightarrow A>B$；$\frac{A}{B}=1(B>0)\Rightarrow A=B$；$\frac{A}{B}<1(B>0)\Rightarrow A<B$.

5. 有利用基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$求函数的最大最小值时，要注意不等式成立的条件，判明是否能取到等号.

【自学难点】

一、模糊处

1. 不等式的性质是解不等式和证明不等式的根据. 不等式的性质在初中已经接触到了，但对不等式的性质，在当时不可能给出证明. 因此高中阶段有必要全面深刻地学习不等式的性质，而决不是简单的重复. 课本首先介绍了不等式的意义、五个性质定理和三个推论，并给出了严格的数学证明. 这就使得这些性质更加系统化、理论化.

2. 关于绝对值的两个基本不等式

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$$

取等号的条件问题.

(1) $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$. 当 $ab\leqslant0$ 且 $|a|>|b|$，前者取等号；当 $ab\geqslant0$ 时，后者取等号.

(2) $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$. 当 $ab\geqslant0$ 且 $|a|>|b|$ 时，前者取等号；当 $ab\leqslant0$ 时，后者取等号.

3. 研究不等式的性质时，要特别注意不等式性质的条件.

同向可乘性：$a>b>0$、$c>d>0\Rightarrow ac>bd$，这就是说两个正的(不等式中各项都大于零)同向不等式可乘. 这个不等式的性质的条件很重要，a、b、c、d 都是正数，否则命题不成立. 例如：$3>2$，$-2>-3$，我们只能得到 $3\times(-2)=2\times(-3)$，而得不到 $3\times(-2)>2\times(-3)$.

可乘方：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n>1,n\in z)$.

可开方：$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\,(n>1,n\in z)$.

在上述这两条性质中的 a、b 都是正数的条件也很重要. 在不等式的证明中经常需要把不等式两边乘方，特别在作偶次乘方时. 但只有不等式两边都是正的时候才能施行. 同样，在不等

式两边同时求 n 次方根时，也要特别注意条件是否许可.

二、难懂处

1. 解指数不等式、对数不等式、无理不等式的关键是将其转化为解等价不等式(组).

(1) 指数不等式：$a^{f(x)}>a^{g(x)}$.

当 $a>1$ 时，则转化为解不等式 $f(x)>g(x)$.

当 $0<a<1$ 时，则转化为解不等式 $f(x)<g(x)$.

(2) 对数不等式：$\log_a f(x)>\log_a g(x)$.

当 $a>1$ 时，则转化为解不等式组

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x). \end{cases}$$

当 $0<a<1$ 时，则转化为解不等式组

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x). \end{cases}$$

(3) 无理不等式：

① $\sqrt{f(x)}>g(x)$. 则转化为解 $\begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)\geqslant 0 \\ f(x)>g^2(x). \end{cases}$

$U\begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)<0. \end{cases}$

② $\sqrt{f(x)}<g(x)$. 则转化为解不等式组 $\begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)\geqslant 0 \\ f(x)>g^2(x). \end{cases}$

③ $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}$. 则转化为解不等式组

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)\geqslant 0 \\ f(x)>g(x). \end{cases}$$

2. 证明不等式的方法，比较法是重点. 比较法是将大小的比较转化为判断数或式的正负，这是证不等式的基本方法. 分析法是难点，难在初学时不易理解它的本质是从结论分析出结论成立的“充分”条件；不易掌握分析推理的步骤和语言特点；不易正确使用连接有关分析推理步骤的关键词“只需”. 综合法与分析法是对立统一的两个方法，为了进行对比，教材中多次对于同一个命题，分别用这两种方法加以证明. 证明不等式的方法，除上述三种基本方法外，还有其他一些方法. 我们应针对具体问题，进行具体分析，灵活地运用各种证法. 在运用时，不仅可以考虑实际情况灵活选择，而且必要时，也可以综合运用多种方法去证明同一个问题.

3. 在利用算术平均数与几何平均数的关系求某些函数的最大值、最小值时，应注意以下三点：

（1） 函数式中，各项（必要时，还要考虑常数项）必须都是正数. 例如对于函数式 $x+\frac{1}{x}$，当 $x<0$ 时，绝不能错误地认为关系式 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ 成立，并进而由此得出 $x+\frac{1}{x}$ 的最小值是 2. 事实上，当 $x<0$ 时，$x+\frac{1}{x}$ 最大值是 -2，此时 $x=-1$.

（2） 定值条件，函数式中，含变数的各项的和或积必须是常数.

（3） 取等号的条件是否具备，即只有各项相等时才能取等号. 如果有一个条件不具备，应设法进行处理后再用.

三、易错处

1. 求不等式(组)的解集时,并集与交集两者容易混淆. 如果一个不等式转化为 n 个并列的不等式或不等式组,每一个不等式或不等式组则应是独立的,每一个不等式或不等式组的解集都是原不等式的解集,这种情况的解集是并集,而不是交集;如果是解不等式组,则不等式组中的每一个不等式的解集的公共部分才是原不等式组的解集,这种情况的解集是交集. 而不是并集.

2. 用同底法解指数不等式和对数不等式时,往往容易忽视底数 $a>1$ 和底数 $0<a<1$ 两种情形.

3. 解绝对值不等式时,往往容易把解集写错. 例如解不等式 $|x|\leqslant 3$,错解为 $x\leqslant 3$ 或 $x\geqslant -3$.

4. 解分式不等式容易出现的错误是,不管分母是正数、负数或零,首先就去分母,将其转化为解整式不等式. 解分式不等式应先移项、通分,再转化为整式不等式或不等式组求解,但必须注意原分式分母不能为零.

5. 解含有参数的不等式时,容易出错的地方是,不注意对参数进行讨论. 例如解不等式 $ax>b$,错解为:$x>\frac{b}{a}$. 在这里应分三种情况进行讨论:(1) $a>0$ 时,则 $x>\frac{b}{a}$;(2) $a=0,b\geqslant 0$ 时,则 $x\in\varnothing$;$a=0$ $b<0$ 时,则 $x\in R$;(3) $a<0$ 时,则 $x<\frac{b}{a}$.

【训练基点】

一、题型举例

(一)实数大小的比较

例 (1) 设 a、b、x、y 是正数,且 $a\neq b$,$x+y=1$,试比较 $P=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ 与 $R=\frac{1}{ax+by}$ 的大小;

(2) 设 $a>b>0$，试比较 $a^a b^b$ 与 $b^a a^b$ 的大小；

(3) 设 $a>0, b>0, a\neq b$，试比较 $P=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$、$Q=\frac{1}{a+b}$ 与 $R=\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 的大小.

解：(1) $P-R=\frac{(ax+by)(bx+ay)-ab}{ab(ax+by)}$ 由条件可知分母为正数，而分子为：

$$ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)-ab$$
$$=ab(x+y)^2-2abxy+xy(a^2+b^2)-ab.$$

$\because$ $x+y=1, a\neq b$. 故上式 $=xy(a-b)^2>0$. 从而 $P-R>0$，$\therefore$ $P>R$.

(2) $\because$ $\frac{a^a b^b}{b^a a^b}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\frac{a^{a-b}}{b^{a-b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，

$\therefore$ $a^a b^b>b^a a^b$.

(3) 由于 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}>\sqrt{ab}$，很明显 $R>Q$.

又$\because$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{2}{\sqrt{ab}}$，$\therefore$ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)>\frac{1}{\sqrt{ab}}$，

即 $P>R$. $\therefore$ $P>R>Q$.

注 比较实数的大小一般采用差比较法，但有时用商比较法或其它方法较为方便. 例(1)用差比法，(2)用商比较法，(3)用基本不等式.

(二)解某些高次不等式

例 解不等式 $(x+1)^3(x^2-x-6)<0$.

解法一 显然 $x\neq -1$，$\therefore$ 原不等式与 $(x+1)(x^2-x-6)<0$ 同解，于是得到

$$\begin{cases}x+1>0\\ x^2-x-6<0\end{cases} \quad \text{或} \begin{cases}x+1<0\\ x^2-x-6>0.\end{cases}$$

解之得：$-1<x<3$ 或 $x<-2$.

故原不等式的解集$\{x|x<-2$ 或 $-1<x<3, x\in R\}$.

解法二 原不等式与 $f(x)=(x+2)(x+1)(x-3)<0$ 同解. 零点 -2, -1, 3 把数轴分成四个区间，如图 5-1.

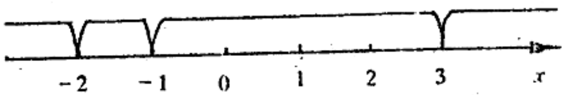


图 5-1

取 $f(x)$为负值的区间，得原不等式的解集为：$\{x|x<-2$ 或 $-1<x<3, x\in R\}$.

注 本例解法一是将解原不等式转化为解两个不等式组，解法二是标根法. 所谓标根法是：若 $f(x)$在实数集内可分解为一次因式的乘积

$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ $(n\geqslant 2)$. 且 $x_1<x_2\cdots<x_n$，则对不等式 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$)可采用标根法，把 $x_1, x_2\cdots x_n$ 加标在实数轴上. 它们把数轴分成 $n+1$ 个区间，则 $f(x)$从最右一个区间(x_n, ∞)至最左一个区间$(-\infty, x_1)$内的取值必定是正负相间的. 对于不等式 $f(x)>0$ 而言，则取 $f(x)$为正值的区间. 本例还可用列表法求解.

(三)解分式不等式

例 已知 $\cos\theta=\dfrac{x^2-x+3}{2x^2+x+5}$，其中 $0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{3}$，求式中 x 的取值范围.

解：因为 $0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\dfrac{1}{2}<\cos\theta\leqslant 1$，即

$$\frac{1}{2}<\frac{x^2-x+3}{2x^2+x+5}\leqslant 1.$$

又∵ $2x^2+x+5$ 恒大于零，

从而原不等式可化为不等式组

$$\begin{cases}x^2-x+3\leqslant 2x^2+x+5\\2x^2+x+5<2(x^2-x+3).\end{cases}$$

解之得：$x<\frac{1}{3}$.

故原式中 x 的取值范围是$(-\infty,\frac{1}{3})$.

注 解分式不等式，先要考虑分母的取值范围，然后根据具体情况将原不等式转化为不等式组，或作其他解法.

(四)解无理不等式

例 1 解不等式：$\sqrt{3x+5}>\sqrt{x-1}$.

解： 原不等式与下列不等式组同解.

$$\begin{cases}3x+5\geqslant 0\\x-1\geqslant 0\\3x+5>x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant -\frac{5}{3}\\x\geqslant 1\\x>-3.\end{cases}$$

故原不等式的解集为：$\{x|x\geqslant 1\}$.

例 2 解不等式 $\sqrt{x^2-3x+2}>x-3$

解： 解原不等式转化为解下列不等式组

$$\begin{cases}x^2-3x+2\geqslant 0\\x-3\geqslant 0\\x^2-3x+2>(x-3)^2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x<3\\x^2-3x+2\geqslant 0\end{cases}$$

解之得：$x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 1$

故原不等式的解集为：$\{x|x\leqslant 1 \text{ 或 } x\geqslant 2\}$

例 3 解不等式：$\sqrt{4-\log_{0.3}x}<\log_{0.3}x-2$

解： $\because$ $4-\log_{0.3}x\geqslant 0\Rightarrow\log_{0.3}x\leqslant 4$ (1)

又 $\because$ $\log_{0.3}x-2>0\Rightarrow\log_{0.3}x>2$ (2)

由(1)、(2)得： $2<\log_{0.3}x\leqslant 4$ (3)

将原不等式两边平方得：

$4-\log_{0.3}x<(\log_{0.3}x)^2-4\log_{0.3}x+4.$

即 $(\log_{0.3}x)^2-3\log_{0.3}x>0.$

$\therefore$ $\log_{0.3}x>0$ 或 $\log_{0.3}x>3.$

再由(3)得：$3<\log_{0.3}x\leqslant 4$，

$\therefore$ $0.3^4\leqslant x<0.3^3.$

故原不等式的解集为：$\{x|\frac{81}{10000}\leqslant x<\frac{27}{1000}\}$.

注 解无理不等式要考虑根式有意义，两边平方去根号时要注意不等号两边为非负.

(五)解指数不等式和对数不等式

例1 解不等式$(1.25)^{1-(\log_2x)^2}<(0.64)^{2+\log_{\sqrt{x}}x}$

解：变形：$\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{(\log_2x)^2}<\left(\frac{4}{5}\right)^8.$

即 $\left(\frac{4}{5}\right)^{(\log_2x)^2}<\left(\frac{4}{5}\right)^9$ $\therefore$ $(\log_2x)^2>9.$

$\therefore$ $\log_2x>3$ 或 $\log_2x<-3.$

解之得：$x>8$ 或 $0<x<\frac{1}{8}$

故原不等式的解集为：$\left\{x|0<x<\frac{1}{8}\text{或 }x>8\right\}$

例2 解关于 x 的不等式：

$x^{\log_ax}>\frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^2}$ $(a>0, a\neq 1)$

解： 当 $a>1$ 时，两边取以 a 为底的对数得：

$(\log_ax)^2>\frac{9}{2}\log_ax-2$

即 $2(\log_ax)^2-9\log_ax+4>0$

解得：$\log_a x<\frac{1}{2}$，或 $\log_a x>4$.

$\therefore\quad 0<x<a^{\frac{1}{2}}$，或 $x>a^4$.

当 $0<a<1$ 时，得：$\frac{1}{2}<\log_a x<4$

解之得：$a^4<x<a^{\frac{1}{2}}$.

例 3 解不等式 $\log_x 5-2\log_{\sqrt{x}} x>3$.

解：$\frac{1}{\log_5 x}-2\log_5 x^2-3>0 \quad (x>0, x\neq 1)$

即 $\quad \frac{1}{\log_5 x}-4\log_5 x-3>0$.

(1) 当 $x>1$ 时，$\log_5 x>0$，则 $4(\log_5 x)^2+3\log_5 x-1<0$

解之得：$-1<\log_5 x<\frac{1}{4} \quad \therefore \quad \frac{1}{5}<x<5^{\frac{1}{4}}$

(2) 当 $0<x<1$ 时，$\log_5 x<0$，

则 $\quad 4(\log_5 x)^2+3\log_5 x-1>0$

解得 $\quad \log_5 x<1 \quad$ 或 $\quad \log_5 x>\frac{1}{4}$.

$\therefore \quad x<\frac{1}{5} \quad$ 或 $\quad x>5^{\frac{1}{4}}$(舍之).

故原不等式解集为：$\{x\,|\,0<x<\frac{1}{5}$，或 $1<x<\sqrt[4]{5}\}$.

注 解指数与对数不等式的基本思路是：可考虑把不等式的两边化成同底数的幂或同底数的对数的形式，然后再根据指数与对数函数的单调性，把它化为代数不等式，但要注意使指数、对数有意义.

(六)解有绝对值的不等式

例 1 解不等式 $\quad |2x-5|-|x+1|<2$.

解： (1) $x\leqslant -1$ 时，则 $-2x+5+x+1<2$，得 $x>4$，此时原不等式无解.

(2) $-1<x\leqslant\frac{5}{2}$时，则$-2x+5-x-1<2$

得 $x>\frac{2}{3}$. ∴ 原不等式的解是：$\frac{2}{3}<x\leqslant\frac{5}{2}$.

(3) $x>\frac{5}{2}$时，则 $2x-5-x-1<2$，得 $x<8$， ∴ 原不等式的解是$\frac{5}{2}<x<8$. 故原不等式的解集为：$\{x|\frac{2}{3}<x<8\}$.

注 解含有两个以上的绝对值符号的不等式一般可以采用分区间讨论(即零点分域法)，去绝对值，转化为不含绝对值的不等式求解.

例 2 解不等式 $3\leqslant|5-2x|<9$.

解：这个不等式等价于不等式组

$$\begin{cases}|5-2x|\geqslant3 & (1)\\ |5-2x|<9 & (2)\end{cases}$$

不等式(1)可化为 $5-2x\geqslant3$ 或 $5-2x\leqslant-3$.

解之得：$x\leqslant1$ 或 $x\geqslant4$.

不等式(2)可化为$-9<5-2x<9$. 解之得：$-2<x<7$.

故原不等式的解集为：$\{x|-2<x\leqslant1$ 或 $4\leqslant x<7\}$

注 解含有一个绝对值符号的不等式，关键是运用以下性质将绝对值化去. 当 $a>0$ 时，

$|f(x)|\geqslant a\Longleftrightarrow f(x)\geqslant a$，或 $f(x)\leqslant-a$；

$|f(x)|\leqslant a\Longleftrightarrow -a\leqslant f(x)\leqslant a$.

同时也可通过分区间讨论，或者两边平方去绝对值符号，但往往次数升高，运算较繁.

(七)解含有参数的不等式

例 1 解关于 x 的不等式 $2x-a<bx+3$.

解：移项：$(2-b)x<a+3$.

(1) 当 $b<2$ 时，解为：$x<\frac{a+3}{2-b}$

(2) 当 $b>2$ 时，解为：$x<\frac{a+3}{2-b}$

(3) 当 $b=2$ 时，若 $a>-3$，解为：$x\in R$；若 $a\leqslant-3$，解为：$x\in\varnothing$.

例 2 解关于 x 的不等式 $2x^2+ax+2>0$

解： 对判别式 $\triangle=a^2-16$ 的不同情形进行讨论.

(1) 当 $a>4$ 或 $a<-4$ 时，则不等式的解集为：

$$\left\{x\,\middle|\,x>\frac{-a+\sqrt{a^2-16}}{4}\text{或}x<\frac{-a-\sqrt{a^2-16}}{4}\right\}.$$

(2) 当 $a=4$ 时，解集为：$\{x|x\neq-1\}$.

(3) 当 $a=-4$ 时，解集为：$\{x|x\neq1\}$.

(4) 当 $-4<a<4$ 时，解集为：$x\in R$.

（八）利用二次函数的图象解有关的不等式问题

例 m 取何范围的实数时，不等式

$$\frac{mx^2-x+m}{1-x+x^2}<0$$

对于 x 取任何实数值都成立？

解： 因为 $1-x+x^2$ 恒大于 0，

所以 $mx^2-x+m<0$.

$\because\ x\in R\quad\therefore\ \begin{cases}m<0\\ \triangle=1-4m^2<0\end{cases}$

解之得：$m<-\frac{1}{2}$.

故当 $m<-\frac{1}{2}$ 时，不等式的解集为：$x\in R$.

注 本例实质上是一元二次不等式图象解法逆向思维的体现.