高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版·同济大学数学系编

九章丛书

高等数学
（第六版）
同步辅导及习题全解

主　编　苏志平　郭志梅

· 知识点窍 · 逻辑推理 · 习题全解
· 全真考题 · 名师执笔 · 题型归类

上册

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

高等数学（第六版）同步辅导及习题全解（上册）

主　编　苏志平　郭志梅

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是高教版《高等数学》（第六版）教材的配套学习辅导及习题解答。编写的重点在于提供原教材中各章节全部习题的精解详答，并对典型习题做了详细的分析和提纲挈领的点评。每章都对知识点进行归纳和提炼，帮助读者梳理清楚各章脉络，统揽全局；并在教材给出的习题的基础上，根据每章的知识重点，精选了有代表性的例题，方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书编写思路清晰、逻辑缜密、内容详尽，简明易懂，力求循序渐进地帮助读者分析并解决学习中遇到的问题。

本书可作为各专业本科学生《高等数学》课程教学辅导材料和复习参考用书及考研强化复习的指导书，也可以作为《高等数学》课程教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（第六版）同步辅导及习题全解. 上册 / 苏志平，郭志梅主编.—北京：中国水利水电出版社，2009
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-6751-1

I. 高… II.①苏…②郭… III.高等数学—高等学校—教学参考资料 IV.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 146924 号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：杨元泓　加工编辑：郑秀芹　封面设计：李佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 **高等数学（第六版）同步辅导及习题全解（上册）**
作　　者	主编　苏志平　郭志梅
出版　发行	中国水利水电出版社（北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　　格	148mm×210mm　32 开本　总 15.25 印张　总 518 千字
版　　次	2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0001—7000 册
总 定 价	18.00 元（上册、下册）

编　委　会

前言

《高等数学》是大学数学课程中的一门重要的必修课，是理工科学生学习其他课程的基础和工具，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。然而由于高等数学自身的抽象性及其特有的逻辑方式，使得高等数学成为众多学习者的一大难关。

为了帮助广大读者学好高等数学，掌握更多的知识，我们根据国家教委审定的普通高等学校高等数学课程教学基本要求（教学大纲）和研究生入学考试教学大纲编写了这本辅导书。本书按照《高等数学》（同济大学编，第六版，高等教育出版社）的章节顺序，分为上下两册，共十二章，本册为第一至七章。

本书旨在使广大读者学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。教材中课后习题丰富、层次多样，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法。我们对教材课后的全部习题给了详细的解答。

本书顺应知识经济时代的新要求和素质教育的新形势，力求在讲解基本知识的过程中渗透数学思想方法，通过习题详解提高其读者的综合素质。叙述通俗易懂，思路清晰完整，解法简练灵活，从而使本书成为学生的优秀辅导书，同时也是广大教师的得力参考书。

由于时间较仓促，编者水平有限，难免书中有疏漏之处，敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2009 年 8 月

目录

第一章 函数与极限

知识结构网络图

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义(特点)
    - 性质(有界性、单调性、奇偶性和周期性)
    - 基本初等函数(定义、性质、图形)
    - 反函数、分段函数、隐函数
    - 复合函数(复合函数的分解)
  - 极限
    - 定义
      - 数列极限(ϵ—N 定义)
      - 函数极限(ϵ—δ 定义)
        - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
        - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$
        - 左、右极限
        - 极限存在的充要条件
    - 性质
      - 数列极限(唯一性、有界性、保号性、收敛数列与其子数列间的关系)
      - 函数极限(唯一性、局部有界性、局部保号性、函数极限与数列极限的关系)
    - 无穷小(大)
      - 定义及性质
      - 阶的分类
        - 高阶无穷小
        - 等价无穷小
        - 同阶无穷小
        - k 阶无穷小
    - 求极限的方法
      - 单调有界准则
      - 夹逼准则
      - 两个重要极限
      - 无穷小乘以有界变量
      - 利用极限运算法则及函数的连续性
    - 连续
      - 定义
      - 间断点
        - 第一类间断点
        - 第二类间断点
      - 连续函数的四则运算
      - 反函数与复合函数的连续性
      - 初等函数的连续性
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 有界性与最大值最小值定理
      - 零点定理
      - 介值定理
      - 一致连续性

1.1 映射与函数

本节重难点及考研要求

重点及考点

1. 两个奇函数的和或差仍是奇函数;两个偶函数的和、差、积、商(除数不为 0) 仍是偶函数;两个奇函数的积或商(除数不为 0) 为偶函数;一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为 0) 为奇函数.
2. 复合函数可由两个或多个函数相继进行有限次复合而成,但是并不是任意两个函数都可以进行复合. 设外层函数 $y=f(u),u\in D$,内层函数 $\mu=g(x),x\in E$. 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域相交时,即 $E^*=\{x\mid g(x)\in D,x\in E\}\neq\varnothing$ 时,两个函数才能复合. 例如,$y=\sqrt{u^2-2}$,$u=\sin x$ 就不能复合成 $y=\sqrt{\sin^2 x-2}$.
3. 函数有反函数的充要条件为函数是一一对应的. 严格单调函数必有反函数,且严格递增(减) 函数的反函数也必严格递增(减). 反之,有反函数的函数未必一定是严格单调函数,$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 表示同一条曲线,若用 x 表示自变量,y 表示因变量,则 $y=f^{-1}(x)$ 及 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,$f^{-1}(x)$ 的定义域即为 $f(x)$ 的值域.
4. 分段函数是特别要注意的一类函数,它用几个不同解析式"分段" 表示一个函数,所以解析式对应的自变量集合的并集是该函数的定义域. 定义域的各段最多只能在端点处重合,重合时对应的函数值应该相等. 图像分段的函数不一定是分段函数,分段函数的图像也可以是一条不断开的曲线(或曲面).
5. 本节的难点是复合函数,重点是复合函数和分段函数. 考研中常出现的题型是求复合函数,特别是求分段的复合函数,方法主要有 2 种:分析法和图示法.

考研要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法,并会建立函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

课后习题解答(习题 1-1)

1. **解** $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$, $A\cap B=[-10,-5)$,

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$, $A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

2. **证明** 设 $x\in(A\cap B)^C$,则 $x\overline{\in}A\cap B$,

于是 $x \overline{\in} A$ 或 $x \overline{\in} B$.

所以 $x \in A^C \cup B^C$. 即 $(A \cap B)^C \subset A^C \cup B^C$，

同理可证 $A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C$，

因此 $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

3. 证明 (1) 首先设 $y \in f(A \cup B)$，则存在 $x \in A$ 或 B，使得 $y = f(x)$，

于是有 $y \in f(A)$ 或 $y \in f(B)$.

即 $y \in f(A) \cup f(B)$.

其次设 $y \in f(A) \cup f(B)$，则 $y \in f(A)$ 或 $f(B)$.

于是存在 $x \in A$ 或 B，使得 $y = f(x)$，

即 $y \in f(A \cup B)$，　故有 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2) 设 $y \in f(A \cap B)$，则存在 $x \in A \cap B$，使得 $y = f(x)$，

于是有 $y \in f(A)$，且 $y \in f(B)$，

故有 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. 解 (1) $3x + 2 \geqslant 0$，即 $x \geqslant -\frac{2}{3}$，定义域 $D = [-\frac{3}{2}, +\infty)$；

(2) $1 - x^2 \neq 0$，即 $x \neq \pm 1$；定义域 $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$；

(3) $\begin{cases} x \neq 0, \\ 1 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -1 \leqslant x < 0, \\ 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$ 定义域 $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$；

(4) $4 - x^2 > 0$，即 $D = (-2, 2)$；

(5) $x \geqslant 0$，即定义域 $D = [0, +\infty)$；

(6) $x + 1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$（$k$ 为整数），　即 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1$；

(7) $|x - 3| \leqslant 1$，　即 $2 \leqslant x \leqslant 4$，　故 $D = [2, 4]$；

(8) $\begin{cases} 3 - x \geqslant 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$，$D = (-\infty, 0) \cup (0, 3]$；

(9) $x + 1 > 0$，即 $x > -1$，$D = (-1, +\infty)$；

(10) $x \neq 0$，即 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

5. 解 (1) 不同. 因为两者定义域不同.

(2) 不同. 因为两者对应法则不同. $x < 0$ 时，$g(x) = -x$.

(3) 相同. 因为两者定义域、对应法则均相同.

(4) 不同. 因为 $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}$ 分母不能为 0，要求 $x \neq k\pi + \frac{1}{2}\pi$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域不同.

6. 解 因为 $|x|=\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$,所以 $\varphi(\frac{\pi}{6})=|\sin\frac{\pi}{6}|=\frac{1}{2}$.

同理 $\varphi(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\varphi(-\frac{\pi}{4})=|\sin(-\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\varphi(-2)=0$.

综上得 $y=\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{3},\\ -\sin x, & -\frac{\pi}{3}<x<0,\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

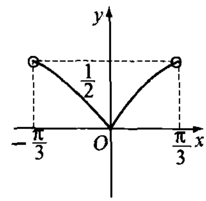


图 1-1

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1-1.

7. 解 (1) 设 $x_1<x_2$ 且 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$,

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$,故 $y=\frac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加.

(2) 设 $x_1<x_2$ 且 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\ln x_1)-(x_2+\ln x_2)=(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)$,

由于 $y=\ln x$ 为单调增加函数,所以 $(\ln x_1-\ln x_2)<0$.

又因 $x_1-x_2<0$,所以 $(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)<0$.

故 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

8. 证明 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$,则必有 $-x_1,-x_2\in(0,l)$,且 $-x_2<-x_1$,由 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,可得 $f(-x_2)<f(-x_1)$.

因为 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内是奇函数,所以 $f(-x_2)=-f(x_2)$,$f(-x_1)=-f(x_1)$,所以 $-f(x_2)<-f(x_1)$,亦即 $f(x_1)<f(x_2)$.

这就证明了对 $(-l,0)$ 内任取的 $x_1<x_2$,则有 $f(x_1)<f(x_2)$.

因此,$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

9. 证明 设 $f_1(x),g_1(x)$ 为奇函数,$f_2(x),g_2(x)$ 为偶函数,

(1) $f_2(-x)+g_2(-x)=f_2(x)+g_2(x)$,即两个偶函数的和仍为偶函数.

$f_1(-x)+g_1(-x)=-[f_1(x)+g_1(x)]$,即两个奇函数的和仍为奇函数.

(2) $f_2(-x)g_2(-x)=f_2(x)g_2(x)$,即两个偶函数的积仍为偶函数.而

$f_1(-x)g_1(-x)=[-f_1(x)][-g_1(x)]=f_1(x)g_1(x)$,

即两个奇函数的乘积是偶函数,并且

$$f_2(-x)f_1(-x) = f_2(x)[-f_1(x)] = -f_2(x)f_1(x),$$

即偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

10. 解 (1) $f(-x) = (-x)^2[1-(-x)^2] = x^2(1-x^2) = f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3 \neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$，故 $f(x)$ 非奇函数也非偶函数.

(3) $f(-x) = \dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $f(-x) = (-x)[(-x)-1][(-x)+1] = -x(x-1)(x+1) = -f(x)$，$f(x)$ 为奇函数.

(5) $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1 \neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$，$f(x)$ 既非奇函数也非偶函数.

(6) $f(-x) = \dfrac{a^{-x} + a^{-(-x)}}{2} = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2} = f(x)$，$f(x)$ 为偶函数.

11. 解 (1) $y = \cos(x-2)$ 是周期函数，周期 $l = 2\pi$.

(2) $y = \cos 4x$ 是周期函数，周期 $l = \dfrac{\pi}{2}$.

(3) $y = 1 + \sin \pi x$ 是周期函数，周期 $l = 2$.

(4) $y = x\cos x$ 不是周期函数.

(5) $y = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 是周期函数，周期 $l = \pi$.

12. 解 (1) 将 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 改写为 $x = \sqrt[3]{y+1}$，再解出得 $y = x^3 - 1$.

(2) 将 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ 改写为 $x = \dfrac{1-y}{1+y}$，再解出得 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$将.

(3) 将 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 改写为 $x = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$，再解出得 $y = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 将 $y = 2\sin 3x$ 改写为 $x = 2\sin 3y$，再解出得 $y = \dfrac{1}{3}\arcsin \dfrac{x}{2}$.

(5) 将 $y = 1 + \ln(x+2)$ 改写为 $x = 1 + \ln(y+2)$，再解出得 $y = e^{x-1} - 2$.

(6) 将 $y = \dfrac{2^x}{2^x+1}$ 改写为 $x = \dfrac{2^y}{2^y+1}$，再解出得 $y = \log_2 \dfrac{x}{1-x}$.

13. 证明 (1) 必要性：设 $f(x)$ 在 X 上有界，即存在数 $M > 0$，

使得　$|f(x)| \leqslant M, x \in X$.

因而　$-M \leqslant f(x) \leqslant M, x \in X$.

亦即 $f(x)$ 在 X 上既有上界 M，又有下界 $-M$.

(2) 充分性：设 $f(x)$ 在 X 上有上界 M_1，下界 M_2，

即　$M_2 \leqslant f(x) \leqslant M_1, x \in X$.

令 $M = \max(|M_1|, |M_2|)$，则 $-M \leqslant M_2, M_1 \leqslant M$，

因而　$-M \leqslant f(x) \leqslant M, x \in X$.　即　$|f(x)| \leqslant M, x \in X$.

故 $f(x)$ 在 X 上有界，证毕.

14. 解　(1) $y = \sin^2 x, y_1 = (\sin\frac{\pi}{6})^2 = \frac{1}{4}, y_2 = (\sin\frac{\pi}{3})^2 = \frac{3}{4}$.

(2) $y = \sin 2x, y_1 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

(3) $y = \sqrt{1+x^2}, y_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, y_2 = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$.

(4) $y = e^{x^2}, y_1 = e^0 = 1, y_2 = e^1 = e$.

(5) $y = e^{2x}, y_1 = e^2, y_2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.

15. 解　(1) 当 $x \in [-1,1]$ 时 $x^2 \in [0,1]$，反之亦然，故 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

(2) 要使 $\sin x \in [0,1]$，当且仅当 $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] (k \in \mathbf{Z})$，

故 $f(\sin x)$ 的定义域是 $\{x \mid x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbf{Z}\}$.

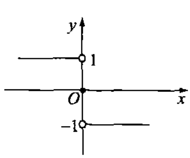
(3) 要使 $x + a \in [0,1]$，当且仅当 $x \in [-a, 1-a]$，

故 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a, 1-a] (a > 0)$.

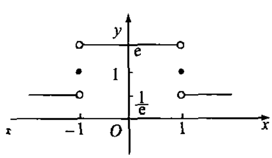
(4) 若 $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$，定义域为 $[a, 1-a]$；若 $a > \frac{1}{2}$，则函数定义域为 $\varnothing$

16. 解　$f[g(x)] = \begin{cases} 1, x < 0, \\ 0, x = 0, \text{如图 1-2(a) 所示}. \\ -1, x > 0. \end{cases}$

$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1 = e, |x| < 1 \\ e^0 = 1, |x| = 1, \text{如图 1-2(b) 所示} \\ e^{-1}, |x| > 1. \end{cases}$



(a)



(b)

图 1-2

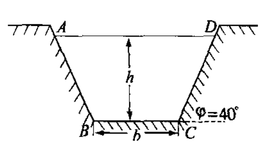


图 1-3

17. 解　如图 1-3 所示，$AB = CD$.