

高校经典教材同步辅导丛书  
配套高教版·同济大学数学系编

九章丛书

# 高等数学

(第六版)

## 同步辅导及习题全解

主 编 苏志平 郭志梅

- ◆ 知识点窍 ◆ 逻辑推理 ◆ 习题全解
- ◆ 全真考题 ◆ 名师执笔 ◆ 题型归类



中国水利水电出版社  
www.waterpub.com.cn

上册  
新版

高校经典教材同步辅导丛书

# 高等数学（第六版）同步 辅导及习题全解（上册）

主 编 苏志平 郭志梅

## 内 容 提 要

本书是高教版《高等数学》(第六版)教材的配套学习辅导及习题解答。编写的重点在于提供原教材中各章节全部习题的精解详答,并对典型习题做了详细的分析和提纲挈领的点评。每章都对知识点进行归纳和提炼,帮助读者梳理清楚各章脉络,统揽全局;并在教材给出的习题的基础上,根据每章的知识重点,精选了有代表性的例题,方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书编写思路清晰、逻辑缜密、内容详尽,简明易懂,力求循序渐进地帮助读者分析并解决学习中遇到的问题。

本书可作为各专业本科学子《高等数学》课程教学辅导材料和复习参考用书及考研强化复习的指导书,也可以作为《高等数学》课程教师的教学参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学(第六版)同步辅导及习题全解.上册/苏志平,郭志梅主编.—北京:中国水利水电出版社,2009  
(高校经典教材同步辅导丛书)  
ISBN 978-7-5084-6751-1

I. 高… II. ①苏…②郭… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第146924号

策划编辑:杨庆川 责任编辑:杨元泓 加工编辑:郑秀芹 封面设计:李佳

书 名	高校经典教材同步辅导丛书 高等数学(第六版)同步辅导及习题全解(上册)
作 者	主编 苏志平 郭志梅
出版 发行	中国水利水电出版社(北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net(万水) sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658(营销中心)、82562819(万水)
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京市梦宇印务有限公司
规 格	148mm×210mm 32开本 总15.25印张 总518千字
版 次	2009年8月第1版 2009年8月第1次印刷
印 数	0001—7000册
总 定 价	18.00元(上册、下册)

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换  
版权所有·侵权必究

## 编 委 会

编 委 (排名不分先后)

程丽园	李国哲	陈有志	苏昭平
郑利伟	罗彦辉	邢艳伟	范家畅
孙立群	李云龙	刘 岩	崔永君
高泽全	于克夫	尹泉生	林国栋
黄 河	李思琦	刘 闯	侯朝阳

# 前言

《高等数学》是大学数学课程中的一门重要的必修课,是理工科学生学习其他课程的基础和工具,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。然而由于高等数学自身的抽象性及其特有的逻辑方式,使得高等数学成为众多学习者的一大难关。

为了帮助广大读者学好高等数学,掌握更多的知识,我们根据国家教委审定的普通高等学校高等数学课程教学基本要求(教学大纲)和研究生入学考试教学大纲编写了这本辅导书。本书按照《高等数学》(同济大学编,第六版,高等教育出版社)的章节顺序,分为上下两册,共十二章,本册为第一至七章。

本书旨在使广大读者学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材课后的全部习题给了详细的解答。

本书顺应知识经济时代的新要求和素质教育的新形势,力求在讲解基本知识的过程中渗透数学思想方法,通过习题详解提高其读者的综合素质。叙述通俗易懂,思路清晰完整,解法简练灵活,从而使本书成为学生的优秀辅导书,同时也是广大教师的得力参考书。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2009年8月

# 目 录

第一章 函数与极限 .....	1
知识结构网络图 .....	1
1.1 映射与函数 .....	2
本节重难点及考研要求 .....	2
课后习题解答(习题 1-1) .....	2
1.2 数列的极限 .....	8
本节重难点及考研要求 .....	8
课后习题解答(习题 1-2) .....	8
1.3 函数的极限 .....	10
本节重难点及考研要求 .....	10
课后习题解答(习题 1-3) .....	11
1.4 无穷小与无穷大 .....	14
本节重难点及考研要求 .....	14
课后习题解答(习题 1-4) .....	15
1.5 极限运算法则 .....	17
本节重难点及考研要求 .....	17
课后习题解答(习题 1-5) .....	18
1.6 极限存在准则,两个重要极限 .....	20
本节重难点及考研要求 .....	20
课后习题解答(习题 1-6) .....	20
1.7 无穷小的比较 .....	22
本节重难点及考研要求 .....	22
课后习题解答(习题 1-7) .....	23
1.8 函数的连续性与间断点 .....	24
本节重难点及考研要求 .....	24

课后习题解答(习题 1-8).....	25
1.9 连续函数的运算与初等函数的连续性 .....	27
本节重难点及考研要求 .....	27
课后习题解答(习题 1-9).....	27
1.10 闭区间上连续函数的性质.....	29
本节重难点及考研要求 .....	29
课后习题解答(习题 1-10) .....	30
总习题一全解 .....	31
<b>第二章 导数与微分</b> .....	<b>36</b>
知识结构网络图 .....	36
2.1 导数的概念 .....	36
本节重难点及考研要求 .....	36
课后习题解答(习题 2-1).....	38
2.2 函数的求导法则 .....	43
本节重难点及考研要求 .....	43
课后习题解答(习题 2-2).....	43
2.3 高阶导数 .....	49
本节重难点及考研要求 .....	49
课后习题解答(习题 2-3).....	49
2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数相关变化率 .....	53
本节重难点及考研要求 .....	53
课后习题解答(习题 2-4).....	53
2.5 函数的微分 .....	57
本节重难点及考研要求 .....	57
课后习题解答(习题 2-5).....	58
总习题二全解 .....	62

<b>第三章 微分中值定理与导数的应用</b> .....	67
知识结构网络图 .....	67
3.1 微分中值定理 .....	68
本节重难点及考研要求 .....	68
课后习题解答(习题 3-1) .....	69
3.2 洛必达法则 .....	73
本节重难点及考研要求 .....	73
课后习题解答(习题 3-2) .....	74
3.3 泰勒公式 .....	77
本节重难点及考研要求 .....	77
课后习题解答(习题 3-3) .....	78
3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性 .....	81
本节重难点及考研要求 .....	81
课后习题解答(习题 3-4) .....	82
3.5 函数的极值与最大值、最小值 .....	90
本节重难点及考研要求 .....	90
课后习题解答(习题 3-5) .....	92
3.6 函数图形的描绘 .....	98
本节重难点及考研要求 .....	98
课后习题解答(习题 3-6) .....	98
3.7 曲率 .....	101
本节重难点及考研要求 .....	101
课后习题解答(习题 3-7) .....	102
3.8 方程的近似解 .....	104
本节重难点及考研要求 .....	104
课后习题解答(习题 3-8) .....	105
总习题三全解 .....	106

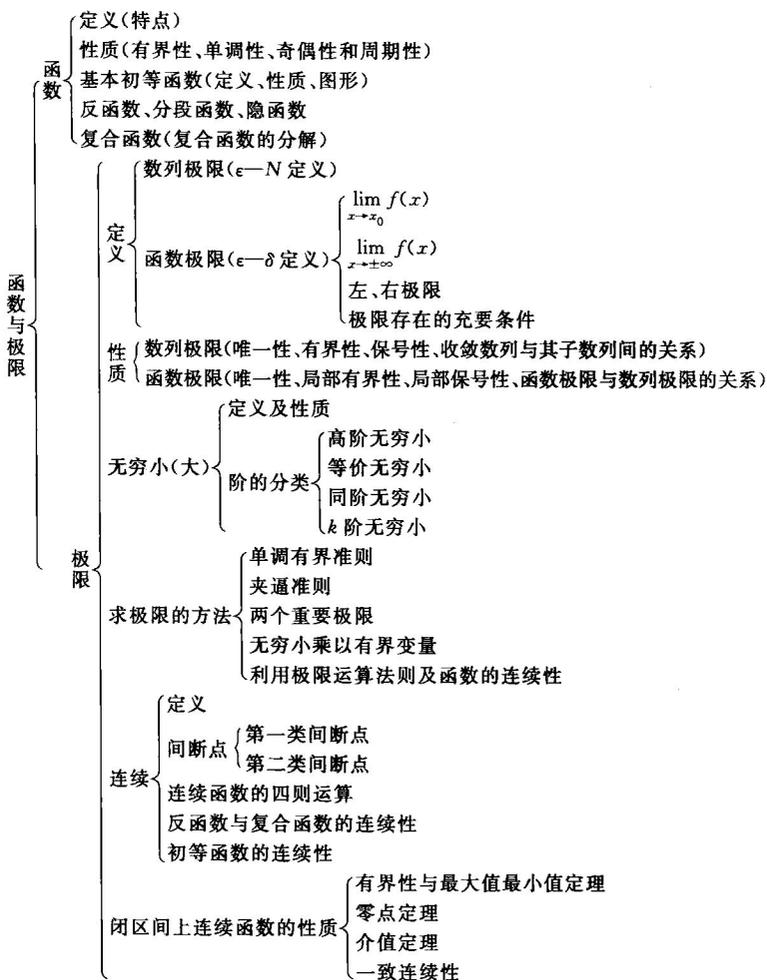
<b>第四章 不定积分</b> .....	112
知识结构网络图 .....	112
4.1 不定积分的概念与性质 .....	112
本节重难点及考研要求 .....	112
课后习题解答(习题 4-1) .....	113
4.2 换元积分法 .....	116
本节重难点及考研要求 .....	116
课后习题解答(习题 4-2) .....	118
4.3 分部积分法 .....	122
本节重难点及考研要求 .....	122
课后习题解答(习题 4-3) .....	122
4.4 有理函数的积分 .....	127
本节重难点及考研要求 .....	127
课后习题解答(习题 4-4) .....	130
4.5 积分表的使用 .....	135
本节重难点及考研要求 .....	135
课后习题解答(习题 4-5) .....	135
总习题四全解 .....	137
<b>第五章 定积分</b> .....	144
知识结构网络图 .....	144
5.1 定积分的概念与性质 .....	145
本节重难点及考研要求 .....	145
课后习题解答(习题 5-1) .....	147
5.2 微积分基本公式 .....	152
本节重难点及考研要求 .....	152
课后习题解答(习题 5-2) .....	153
5.3 定积分的换元法和分部积分法 .....	156
本节重难点及考研要求 .....	156

课后习题解答(习题 5-3) .....	157
5.4 反常积分 .....	163
本节重难点及考研要求 .....	163
课后习题解答(习题 5-4) .....	164
5.5 反常积分的审敛法、 $\Gamma$ 函数 .....	166
本节重难点及考研要求 .....	166
课后习题解答(习题 5-5) .....	167
总习题五全解 .....	169
<b>第六章 定积分的应用</b> .....	<b>177</b>
知识结构网络图 .....	177
6.1 定积分的元素法 .....	177
本节重难点及考研要求 .....	177
6.2 定积分在几何学上的应用 .....	177
本节重难点及考研要求 .....	177
课后习题解答(习题 6-2) .....	178
6.3 定积分在物理学上的应用 .....	188
本节重难点及考研要求 .....	188
课后习题解答(习题 6-3) .....	189
总习题六全解 .....	192
<b>第七章 微分方程</b> .....	<b>196</b>
知识结构网络图 .....	196
7.1 微分方程的基本概念 .....	196
本节重难点及考研要求 .....	196
课后习题解答(习题 7-1) .....	197
7.2 可分离变量的微分方程 .....	198
本节重难点及考研要求 .....	198

课后习题解答(习题 7-2) .....	199
7.3 齐次方程 .....	203
本节重难点及考研要求 .....	203
课后习题解答(习题 7-3) .....	203
7.4 一阶线性微分方程 .....	208
本节重难点及考研要求 .....	208
课后习题解答(习题 7-4) .....	209
7.5 可降阶的高阶微分方程 .....	215
本节重难点及考研要求 .....	215
课后习题解答(习题 7-5) .....	216
7.6 高阶线性微分方程 .....	221
本节重难点及考研要求 .....	221
课后习题解答(习题 7-6) .....	222
7.7 常系数齐次线性微分方程 .....	226
本节重难点及考研要求 .....	226
课后习题解答(习题 7-7) .....	227
7.8 常系数非齐次线性微分方程 .....	230
本节重难点及考研要求 .....	230
课后习题解答(习题 7-8) .....	230
7.9 欧拉方程 .....	238
本节重难点及考研要求 .....	238
课后习题解答(习题 7-9) .....	238
7.10 常系数线性微分方程组解法举例 .....	241
本节重难点及考研要求 .....	241
课后习题解答(7-10) .....	242
总习题七全解 .....	246

# 第一章 函数与极限

## 知识结构网络图



## 1.1 映射与函数



## 本节重难点及考研要求

## 重点及考点

1. 两个奇函数的和或差仍是奇函数;两个偶函数的和、差、积、商(除数不为0)仍是偶函数;两个奇函数的积或商(除数不为0)为偶函数;一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为0)为奇函数.
2. 复合函数可由两个或多个函数相继进行有限次复合而成,但是并不是任意两个函数都可以进行复合. 设外层函数  $y = f(u)$ ,  $u \in D$ , 内层函数  $u = g(x)$ ,  $x \in E$ . 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域相交时,即  $E^* = \{x \mid g(x) \in D, x \in E\} \neq \emptyset$  时,两个函数才能复合. 例如,  $y = \sqrt{u^2 - 2}$ ,  $u = \sin x$  就不能复合成  $y = \sqrt{\sin^2 x - 2}$ .
3. 函数有反函数的充要条件为函数是一一对应的. 严格单调函数必有反函数,且严格递增(减)函数的反函数也必严格递增(减). 反之,有反函数的函数未必一定是严格单调函数,  $y = f(x)$  的反函数  $x = f^{-1}(y)$  与  $y = f(x)$  表示同一条曲线,若用  $x$  表示自变量,  $y$  表示因变量,则  $y = f^{-1}(x)$  及  $y = f(x)$  的图像关于直线  $y = x$  对称,  $f^{-1}(x)$  的定义域即为  $f(x)$  的值域.
4. 分段函数是特别要注意的一类函数,它用几个不同解析式“分段”表示一个函数,所以解析式对应的自变量集合的并集是该函数的定义域. 定义域的各段最多只能在端点处重合,重合时对应的函数值应该相等. 图像分段的函数不一定是分段函数,分段函数的图像也可以是一条不断开的曲线(或曲面).
5. 本节的难点是复合函数,重点是复合函数和分段函数. 考研中常出现的题型是求复合函数,特别是求分段复合函数,方法主要有2种:分析法和图示法.

## 考研要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法,并会建立函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.



## 课后习题解答(习题 1-1)

1. 解  $A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$ ,  $A \cap B = [-10, -5)$ ,  
 $A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$ ,  $A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5)$ .
2. 证明 设  $x \in (A \cap B)^c$ , 则  $x \in \overline{A \cap B}$ ,

于是  $x \in \overline{A}$  或  $x \in \overline{B}$ .

所以  $x \in A^c \cup B^c$ . 即  $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ ,

同理可证  $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$ ,

因此  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

3. 证明 (1) 首先设  $y \in f(A \cup B)$ , 则存在  $x \in A$  或  $B$ , 使得  $y = f(x)$ ,

于是有  $y \in f(A)$  或  $y \in f(B)$ .

即  $y \in f(A) \cup f(B)$ .

其次设  $y \in f(A) \cup f(B)$ , 则  $y \in f(A)$  或  $f(B)$ .

于是存在  $x \in A$  或  $B$ , 使得  $y = f(x)$ ,

即  $y \in f(A \cup B)$ , 故有  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

(2) 设  $y \in f(A \cap B)$ , 则存在  $x \in A \cap B$ , 使得  $y = f(x)$ ,

于是有  $y \in f(A)$ , 且  $y \in f(B)$ ,

故有  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .

4. 解 (1)  $3x + 2 \geq 0$ , 即  $x \geq -\frac{2}{3}$ , 定义域  $D = [-\frac{2}{3}, +\infty)$ ;

(2)  $1 - x^2 \neq 0$ , 即  $x \neq \pm 1$ ; 定义域  $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ ;

(3)  $\begin{cases} x \neq 0, \\ 1 - x^2 \geq 0. \end{cases}$  即  $\begin{cases} -1 \leq x < 0, \\ 0 < x \leq 1. \end{cases}$  定义域  $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$ ;

(4)  $4 - x^2 > 0$ , 即  $D = (-2, 2)$ ;

(5)  $x \geq 0$ , 即定义域  $D = [0, +\infty)$ ;

(6)  $x + 1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k$  为整数), 即  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1$ ;

(7)  $|x - 3| \leq 1$ , 即  $2 \leq x \leq 4$ , 故  $D = [2, 4]$ ;

(8)  $\begin{cases} 3 - x \geq 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$  即  $\begin{cases} x \leq 3, \\ x \neq 0 \end{cases}$ ,  $D = (-\infty, 0) \cup (0, 3]$ ;

(9)  $x + 1 > 0$ , 即  $x > -1$ ,  $D = (-1, +\infty)$ ;

(10)  $x \neq 0$ , 即  $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

5. 解 (1) 不同. 因为两者定义域不同.

(2) 不同. 因为两者对应法则不同.  $x < 0$  时,  $g(x) = -x$ .

(3) 相同. 因为两者定义域、对应法则均相同.

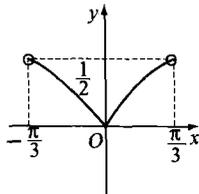
(4) 不同. 因为  $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}$  分母不能为 0, 要求  $x \neq k\pi$

$+ \frac{1}{2}\pi$ , 故  $f(x)$  与  $g(x)$  定义域不同.

6. 解 因为  $|x| = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$ , 所以  $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}$ .

同理  $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\varphi(-2) = 0$ .

$$\text{综上所述 } y = \varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \\ -\sin x, & -\frac{\pi}{3} < x < 0, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$



$y = \varphi(x)$  的图形如图 1-1.

图 1-1

7. 解 (1) 设  $x_1 < x_2$  且  $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ ,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1-x_1} - \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} < 0,$$

即  $f(x_1) < f(x_2)$ , 故  $y = \frac{x}{1-x}$  在  $(-\infty, 1)$  内单调增加.

(2) 设  $x_1 < x_2$  且  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ,

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + \ln x_1) - (x_2 + \ln x_2) = (x_1 - x_2) + (\ln x_1 - \ln x_2),$$

由于  $y = \ln x$  为单调增加函数, 所以  $(\ln x_1 - \ln x_2) < 0$ .

又因  $x_1 - x_2 < 0$ , 所以  $(x_1 - x_2) + (\ln x_1 - \ln x_2) < 0$ .

故  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ .

故  $y = x + \ln x$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加.

8. 证明 设  $x_1, x_2 \in (-l, 0)$  且  $x_1 < x_2$ , 则必有  $-x_1, -x_2 \in (0, l)$ , 且  $-x_2 < -x_1$ ,

由  $f(x)$  在  $(0, l)$  内单调增加, 可得  $f(-x_2) < f(-x_1)$ .

因为  $f(x)$  在  $(-l, l)$  内是奇函数, 所以  $f(-x_2) = -f(x_2)$ ,  $f(-x_1) = -f(x_1)$ , 所以  $-f(x_2) < -f(x_1)$ , 亦即  $f(x_1) < f(x_2)$ .

这就证明了对  $(-l, 0)$  内任取的  $x_1 < x_2$ , 则有  $f(x_1) < f(x_2)$ .

因此,  $f(x)$  在  $(-l, 0)$  内也单调增加.

9. 证明 设  $f_1(x), g_1(x)$  为奇函数,  $f_2(x), g_2(x)$  为偶函数,

(1)  $f_2(-x) + g_2(-x) = f_2(x) + g_2(x)$ , 即两个偶函数的和仍为偶函数.

$f_1(-x) + g_1(-x) = -[f_1(x) + g_1(x)]$ , 即两个奇函数的和仍为奇函数.

(2)  $f_2(-x)g_2(-x) = f_2(x)g_2(x)$ , 即两个偶函数的积仍为偶函数. 而

$$f_1(-x)g_1(-x) = [-f_1(x)][-g_1(x)] = f_1(x)g_1(x),$$

即两个奇函数的乘积是偶函数, 并且

$$f_2(-x)f_1(-x) = f_2(x)[-f_1(x)] = -f_2(x)f_1(x),$$

即偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

10. 解 (1)  $f(-x) = (-x)^2[1 - (-x)^2] = x^2(1 - x^2) = f(x)$ , 故  $f(x)$  为偶函数.  
 (2)  $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3 \neq f(x)$  且  $\neq -f(x)$ , 故  $f(x)$  非奇函数也非偶函数.  
 (3)  $f(-x) = \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = f(x)$ , 故  $f(x)$  为偶函数.  
 (4)  $f(-x) = (-x)[(-x) - 1][(-x) + 1] = -x(x - 1)(x + 1) = -f(x)$ ,  $f(x)$  为奇函数.  
 (5)  $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1 \neq f(x)$  且  $\neq -f(x)$ ,  $f(x)$  既非奇函数也非偶函数.  
 (6)  $f(-x) = \frac{a^{-x} + a^{-(-x)}}{2} = \frac{a^x + a^{-x}}{2} = f(x)$ ,  $f(x)$  为偶函数.

11. 解 (1)  $y = \cos(x - 2)$  是周期函数, 周期  $l = 2\pi$ .

(2)  $y = \cos 4x$  是周期函数, 周期  $l = \frac{\pi}{2}$ .

(3)  $y = 1 + \sin \pi x$  是周期函数, 周期  $l = 2$ .

(4)  $y = x \cos x$  不是周期函数.

(5)  $y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  是周期函数, 周期  $l = \pi$ .

12. 解 (1) 将  $y = \sqrt[3]{x+1}$  改写为  $x = \sqrt[3]{y+1}$ , 再解出得  $y = x^3 - 1$ .

(2) 将  $y = \frac{1-x}{1+x}$  改写为  $x = \frac{1-y}{1+y}$ , 再解出得  $y = \frac{1-x}{1+x}$  将.

(3) 将  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  改写为  $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$ , 再解出得  $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$ .

(4) 将  $y = 2\sin 3x$  改写为  $x = 2\sin 3y$ , 再解出得  $y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}$ .

(5) 将  $y = 1 + \ln(x+2)$  改写为  $x = 1 + \ln(y+2)$ , 再解出得  $y = e^{x-1} - 2$ .

(6) 将  $y = \frac{2^x}{2^x+1}$  改写为  $x = \frac{2^y}{2^y+1}$ , 再解出得  $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$ .

13. 证明 (1) 必要性: 设  $f(x)$  在  $X$  上有界, 即存在数  $M > 0$ ,

使得  $|f(x)| \leq M, x \in X$ .

因而  $-M \leq f(x) \leq M, x \in X$ .

亦即  $f(x)$  在  $X$  上既有上界  $M$ , 又有下界  $-M$ .

(2) 充分性: 设  $f(x)$  在  $X$  上有上界  $M_1$ , 下界  $M_2$ ,

即  $M_2 \leq f(x) \leq M_1, x \in X$ .

令  $M = \max(|M_1|, |M_2|)$ , 则  $-M \leq M_2, M_1 \leq M$ ,

因而  $-M \leq f(x) \leq M, x \in X$ . 即  $|f(x)| \leq M, x \in X$ .

故  $f(x)$  在  $X$  上有界, 证毕.

14. 解 (1)  $y = \sin^2 x, y_1 = (\sin \frac{\pi}{6})^2 = \frac{1}{4}, y_2 = (\sin \frac{\pi}{3})^2 = \frac{3}{4}$ .

(2)  $y = \sin 2x, y_1 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

(3)  $y = \sqrt{1+x^2}, y_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, y_2 = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$ .

(4)  $y = e^{x^2}, y_1 = e^0 = 1, y_2 = e^1 = e$ .

(5)  $y = e^{2x}, y_1 = e^2, y_2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ .

15. 解 (1) 当  $x \in [-1, 1]$  时  $x^2 \in [0, 1]$ , 反之亦然, 故  $f(x^2)$  的定义域为  $[-1, 1]$ .

(2) 要使  $\sin x \in [0, 1]$ , 当且仅当  $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] (k \in \mathbf{Z})$ ,

故  $f(\sin x)$  的定义域是  $\{x \mid x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbf{Z}\}$ .

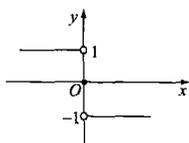
(3) 要使  $x+a \in [0, 1]$ , 当且仅当  $x \in [-a, 1-a]$ ,

故  $f(x+a)$  的定义域为  $[-a, 1-a] (a > 0)$ .

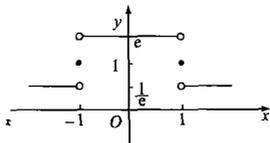
(4) 若  $0 < a \leq \frac{1}{2}$ , 定义域为  $[a, 1-a]$ ; 若  $a > \frac{1}{2}$ , 则函数定义域为  $\emptyset$

16. 解  $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \text{ 如图 1-2(a) 所示.} \\ -1, & x > 0. \end{cases}$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1 = e, & |x| < 1 \\ e^0 = 1, & |x| = 1, \text{ 如图 1-2(b) 所示} \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$



(a)



(b)

图 1-2

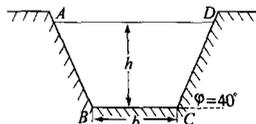


图 1-3

17. 解 如图 1-3 所示,  $AB = CD$ .