青年自学丛书

数学

QINGNIAN ZIXUE CONGSHU

第四册

内蒙古人民出版社

统一书号： 7089·55
每　　册：0.80 元

青年自学丛书

数　学

第四册

岳正仁　朱长山　戴春陶
高志懋　谢茂才　陈慕洲　编

内蒙古人民出版社

青年自学丛书
数　学
第四册
岳正仁　朱长山　戴春陶
高志懋　谢茂才　陈慕洲　编
内蒙古人民出版社出版　内蒙古新华书店发行
上海商务印刷厂排版　呼和浩特市印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：9.5 字数：197千
1978年9月第1版
1979年1月第2版　1979年12月第二次印刷
印数：137,281—331,280册
统一书号：7089·55　每册：0.80元

《青年自学丛书》

出 版 说 明

为了贯彻党的十一大路线，适应广大城乡知识青年、在校学生和工农兵学习文化科学知识的需要，我社邀请一些有多年教学经验的大专院校和中学教师，编写了一套青年自学丛书。这套丛书由数学四册、物理、化学、语文、政治常识问答、和历史地理常识问答等单行本组成。目的是帮助读者经过自学达到高中毕业的水平，以便为实现四个现代化贡献更大力量。由于编辑水平有限，不足之处请读者批评指正。

内蒙古人民出版社

一九七八年二月

编 者 的 话

在以英明领袖华主席为首的党中央"抓纲治国"战略决策指引下，全国出现了大干快上的跃进局面。我们这些多年战斗在教育战线的数学教师，深切感到形势逼人，愿为迅速实现四个现代化贡献自己更大的力量。实现四个现代化，科学技术的现代化是关键，而数学是科学技术现代化的必须的基础知识。应内蒙古人民出版社的邀请，我们承担了青年自学丛书"数学"部分的编写任务。

本书分一、二、三、四册，包括：数和式的基础知识、平面几何基础知识、立体几何基础知识、方程和不等式、函数及其图象，此外，还包括：数列极限、排列、组合与应用数学初步；复数；解析几何；微积分初步等。

在编写过程中，我们本着加强基础理论，坚持理论联系实际，便于自学等原则，根据新的教学大纲精神，增加了新的内容，在安排上注意了由浅入深、由易到难；在文字叙述上尽量做到简明扼要、通俗易懂，并配备了一定数量的例题和较多的习题，以利于培养读者分析问题和解决问题的能力.

由于我们思想水平不高，业务能力的局限，定稿时间紧迫，没有能够更广泛地征求意见，因此，书中一定存在不少缺点甚至错误，欢迎广大读者批评指正.

编　　者

一九七八年二月

于呼和浩特

目　　录

第八章　平面解析几何

解析几何是用代数方法研究几何图形性质的一门数学学科．它以坐标系作为桥梁，使几何中的基本元素“点”与代数中的基本元素“数”之间建立联系，再用运动的观点把图形看成是动点的轨迹，使几何中的曲线与代数中的方程之间建立联系，这样就可用代数的方法来研究几何图形了．因此，解析几何的特征是引进了运动与变化的概念；形与数的辩证结合．这种结合的基本方法是坐标法．恩格斯曾对解析几何的产生给予高度的评价，他说：“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生……”．解析几何正是由于生产实践的需要而产生的．

第一节　基 本 知 识

我们知道，解析几何的特征是形数结合．这种结合的基本方法是坐标法．在第五章讨论函数及其图象时，已经谈过如何建立坐标系的问题．现在我们就可以通过坐标解决一些简单的问题了．

一、两点间的距离

已知平面上任意两点 M_1，M_2，设它们的直角坐标分别是 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，现在我们来求 M_1，M_2 之间的距离 d．

为了求 d，我们从 M_1，M_2 作 x 轴的垂线，设垂足分别是 P_1，P_2，再过 M_1，M_2 作 y 轴的垂线，设垂足分别是 Q_1，Q_2。又设 Q_1M_1 的延长线与 P_2M_2 交于 M 点。（见图 8-1）。

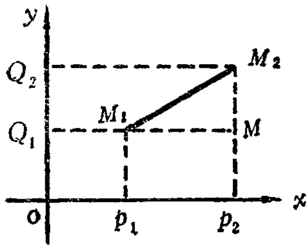

图 8-1

因为 $\triangle M_1MM_2$ 是直角三角形，根据勾股定理，就有：

$$d=\sqrt{(M_1M)^2+(MM_2)^2}.$$

但 M_1M 和 MM_2 的长度分别等于 $|P_1P_2|$ 和 $|Q_1Q_2|$，

$$\therefore \quad d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1}$$

这就是所求的两点间距离公式。

特别地，点 $M(x, y)$ 和原点间的距离 r 就是：

$$r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{2}$$

例 1 求 $M_1(-2, 3)$ 与 $M_2(6, -12)$ 之间的距离。

解 由公式(1)知

$$d=\sqrt{[6-(-2)]^2+[(-12)-3]^2}$$
$$=\sqrt{64+225}=17.$$

例 2 求以 $A(5, 2)$、$B(-4, 5)$、$C(-2, 1)$ 为顶点的三角形的外接圆的圆心。

解 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心应在各边的垂直平分线上。若圆心为 $P(x, y)$ 点，则：

$$|PA|=|PB|=|PC|.$$

或

$$|PA|^2=|PB|^2, \quad |PA|^2=|PC|^2.$$

即 $$\begin{cases}(x-5)^2+(y-2)^2=(x+4)^2+(y-5)^2, \\ (x-5)^2+(y-2)^2=(x+2)^2+(y-1)^2.\end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} -18x+6y=12, \\ -14x-2y=-24. \end{cases} \quad 解之，得 \begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$$

故外接圆的圆心为 $P(1, 5)$.

二、线段的定比分点

设在平面上有不同的两点，并将其中的一个作为第一点，另一个作为第二点，我们分别用 M_1、M_2 表示它们. 过此两点作直线 l，并选定它的正向，于是把它看成一条轴. 再设 M 是轴 l 上任一点. 但 M 不与 M_2 重合，由下面等式

$$\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$$

所确定的数 λ，叫做点 M 划分有向线段 M_1M_2 所成的“比”.

关于划分线段为已知比的问题，可运用坐标方法来解决.

设已知两点 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，求点 $M(x, y)$，使其划分线段 M_1M_2 的比等于 $\lambda(\lambda\geqslant 0)$.

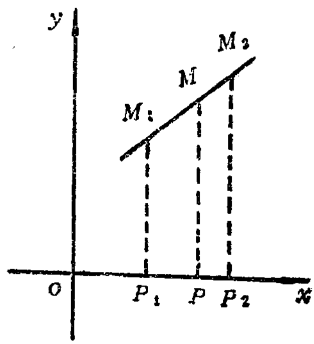

图 8-2

解：过点 M_1、M_2、M 分别作 x 轴的垂线，得垂足 P_1，P_2，P（见图 8-2），根据平面几何的已知定理：“在诸平行直线间的线段成比例”，便得：

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=\lambda,$$

$$\because \quad |P_1P|=|x-x_1|, \qquad |PP_2|=|x_2-x|.$$

因 M_1、M_2、M 是直线上有序的三个点，而 $x-x_1$ 与 x_2-x 同

号，式中的绝对值的符号可以不要．所以有

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,$$

解出未知数 x，得：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

同理可求出：

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.\qquad 即\quad \begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \tag{3}$$

讨论：

(1) 当 $M(x, y)$ 是线段 M_1M_2 的中点时，即 $\lambda=1$，则 M 点的坐标为：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{4}$$

就是说，线段中点的坐标，等于它的两个端点对应坐标之和的一半．

(2) 当 $M(x, y)$ 在线段 M_1M_2 的延长线上时，即

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=-\lambda,$$

这时由三点的次序，得 $x-x_1$ 与 x_2-x 反号，$y-y_1$ 与 y_2-y 也反号．于是有

$$x=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},\quad y=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}. \tag{5}$$

例 1　已知点 $M_1(1, 1)$ 和 $M_2(7, 4)$，试在它们所确定的线段上求一点 M，使得 M 到 M_1 的距离比它到 M_2 的距离近一半．

解　已知 $\lambda=\frac{1}{2}$，由公式(3)得：

$$x=\frac{1+\frac{1}{2}\times 7}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}}=3,\quad y=\frac{1+\frac{1}{2}\times 4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2.$$

所以 M 点坐标为：$x=3$, $y=2$.

例2 已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点为 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$，求第四个顶点 D 的坐标.

解 AC 与 BD 交于 P，则 $|PA|=|PC|$，$|PB|=|PD|$（平行四边形的对角线互相平分），又设 D 的坐标为 (x, y)

∵ P 是 AC 的中点，

∴ 它的坐标为 $P\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$.

P 也是 BD 的中点，∴ 它的坐标为 $P\left(\frac{x_2+x}{2}, \frac{y_2+y}{2}\right)$，

而 P 的坐标是唯一的，

$$\therefore\quad \frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x}{2},\quad \frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y}{2}.$$

即 $$x=x_1+x_3-x_2,\quad y=y_1+y_3-y_2.$$

∴ D 点的坐标为 $(x_1+x_3-x_2, y_1+y_3-y_2)$.

例3 已知任意三点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 为三角形的顶点，求此三角形面积.

解 从 A、B、C 三点分别引横轴的垂线交 x 轴于 P、M、N 三点，（如图 8-3）

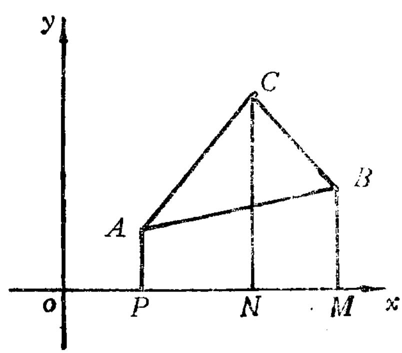

图 8-3

根据梯形面积的求法，得出：

$\triangle ABC$ 的面积

$$=(\text{梯形 } APNC+\text{梯形 } CNMB-\text{梯形 } APMB)\text{的面积}$$

$$=\frac{1}{2}PN(PA+NC)+\frac{1}{2}NM(NC+MB)$$

$$-\frac{1}{2}PM(PA+MB)$$

$\because$ $PN=x_3-x_1$, $PA=y_1$, $NC=y_3$, $NM=x_2-x_3$, $MB=y_2$, $PM=x_2-x_1$. 代入上式则得:

$\triangle ABC$ 的面积

$$=\frac{1}{2}(x_3-x_1)(y_1+y_3)+\frac{1}{2}(x_2-x_3)(y_3+y_2)$$

$$-\frac{1}{2}(x_2-x_1)(y_1+y_2)$$

$$=\frac{1}{2}[(x_3-x_1)(y_1+y_3)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)$$

$$-(x_2-x_1)(y_1+y_2)]$$

利用行列式表示法,就可把上式化为:

$$S_\triangle=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

注意 三角形的顶点的顺序取逆时针方向时,面积是正的;取顺时针方向时,面积是负的.

练　　习

1. 求 A, B 间的距离时, A 与 B 的次序有无关系? 求线段 AB 的定比分点时, A 与 B 的次序有无关系?
2. 两点间距离公式是什么?

3. 公式(3)中的λ具有什么意义？它可以取负值么？为什么？当$\lambda=0$时，分点怎样？

4. 三角形的面积等于零时，即$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$，体现什么意义？

习 题 一

1. 证明：以$A(3, 2)$，$B(6, 5)$，$C(1, 10)$作为顶点的三角形是直角三角形.
2. 三角形的三顶点是$A(2, 3)$，$B(-3, 3)$，$C(0, -1)$. 求三角形的周长及面积.
3. 把两点$A(-2, -1)$，$B(3, 2)$间的线段分成$3:2$，求分点坐标.
4. 证明以$A(1, 5)$，$B(5, 1)$，$C(-9, -9)$为顶点的三角形是等腰三角形，并求：(1) 底边的长；(2) 底边上的高.
5. 三角形ABC的三个顶点分别为$(2, -3)$，$(-6, -3)$，$(5, 4)$，求它三中线的长及其交点.
6. 试证：$\triangle ABC$的两边AB与AC的中点连线$EF=\frac{1}{2}BC$.

第二节 曲线与方程

前面我们已学过平面上的点与二实数间的一一对应关系. 利用这个工具，我们来建立平面上的曲线与含有两个变数的方程的联系.

一、曲线的方程

曲线通常都是作为点运动的轨迹. 例如弹道是一条抛物线，人造地球卫星的轨道是椭圆等等. 许多重要的曲线都是有一定规律的，我们把这些曲线看成是动点按照一定的条件

运动的轨迹．例如“和一个已知点的距离等于定长 R 的动点的轨迹”．就是以这个已知点为圆心，以定长 R 为半径的圆．因此，建立直角坐标系之后，动点所遵循的条件，就反映为流动坐标(x, y)所应满足的限制条件，它们常常表示为 x, y 的一个方程(称为曲线方程)

$$F(x, y)=0.$$

有时它可以写成为 $y=f(x)$ 形式．

定义 凡是含有两个变数 x, y 的方程 $F(x, y)=0$，表示一条曲线，这曲线是坐标满足此方程的点的轨迹．这个方程就叫做这条曲线的方程．

因此，在给定的坐标系下，一个方程称为曲线的方程时，它必须满足下面两个条件：

(1) 曲线上的点，它的坐标必定满足这个方程；

(2) 坐标满足这个方程的点，必在曲线上(也就是说不在曲线上的点，它的坐标必定不满足这个方程.)

例 1 设已知线段 AB 的端点为 $A(1, 2)$ 和 $B(-3, 4)$，求 AB 垂直平分线的方程．

解 线段 AB 的垂直平分线是与 A 和 B 等距离的点的轨迹．

设 $P(x, y)$ 是 AB 垂直平分线上的任意一点，则：

$$|PA|=|PB|, \quad \because \quad |PA|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2};$$

$$|PB|=\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2};$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}.$$

化简得：

$$2x-y+5=0.$$

这就是所求的垂直平分线的方程．

例 2 求以点 $C(a, b)$ 为圆心，R 为半径的圆的方程．

解 设 $M(x, y)$ 是圆 C 上任意一点(见图 8-4)，那末 M