

青年自学丛书

数 学

QINGNIAN ZIXUE CONGSHU

第四册



内蒙古人民出版社

统一书号： 7089·55

每 册： 0.80 元

青年自学丛书

数 学

第 四 册

岳正仁 朱长山 戴春陶 编
高志懋 谢茂才 陈慕洲

内蒙古人民出版社

青年自学丛书

数 学

第 四 册

岳正仁 朱长山 戴春陶 编
高志懋 谢茂才 陈慕洲

内蒙古人民出版社出版 内蒙古新华书店发行
上海商务印刷厂排版 呼和浩特市印刷厂印刷

开本:787×1092 1/32 印张:9.5 字数:197千

1978年9月第1版

1979年1月第2版 1979年12月第二次印刷

印数:137,281—331,280册

统一书号:7089·55 每册:0.80元

《青年自学丛书》

出版说明

为了贯彻党的十一大路线,适应广大城乡知识青年、在校学生和工农兵学习文化科学知识的需要,我社邀请一些有多年教学经验的大专院校和中学教师,编写了一套青年自学丛书。这套丛书由数学四册、物理、化学、语文、政治常识问答、和历史地理常识问答等单行本组成。目的是帮助读者经过自学达到高中毕业的水平,以便为实现四个现代化贡献更大力量。由于编辑水平有限,不足之处请读者批评指正。

内蒙古人民出版社

一九七八年二月

编 者 的 话

在以英明领袖华主席为首的党中央“抓纲治国”战略决策指引下，全国出现了大干快上的跃进局面。我们这些多年战斗在教育战线的数学教师，深切感到形势逼人，愿为迅速实现四个现代化贡献自己更大的力量。实现四个现代化，科学技术的现代化是关键，而数学是科学技术现代化的必须的基础知识。应内蒙古人民出版社的邀请，我们承担了青年自学丛书“数学”部分的编写任务。

本书分一、二、三、四册，包括：数和式的基础知识、平面几何基础知识、立体几何基础知识、方程和不等式、函数及其图象，此外，还包括：数列极限、排列、组合与应用数学初步；复数；解析几何；微积分初步等。

在编写过程中，我们本着加强基础理论，坚持理论联系实际，便于自学等原则，根据新的教学大纲精神，增加了新的内容，在安排上注意了由浅入深、由易到难；在文字叙述上尽量做到简明扼要、通俗易懂，并配备了一定数量的例题和较多的习题，以利于培养读者分析问题和解决问题的能力。

由于我们思想水平不高，业务能力的局限，定稿时间紧迫，没有能够更广泛地征求意见，因此，书中一定存在不少缺点甚至错误，欢迎广大读者批评指正。

编 者

一九七八年二月

于呼和浩特

目 录

第八章 平面解析几何	(953)
第一节 基本知识	(953)
一、两点间的距离(953)	二、线段的定比分点(955)
习题一	(959)
第二节 曲线与方程	(959)
一、曲线的方程(959)	二、方程的曲线(962)
习题二	(963)
第三节 直线与圆	(964)
一、直线的点斜式方程(964)	二、直线的两点式方程(966)
三、直线与一次方程(969)	四、直线的法式方程(971)
五、化直线的一般式方程为法式方程(972)	六、点到直线的距离(973)
七、两直线的相关位置(974)	八、圆的方程(978)
习题三	(982)
第四节 椭圆	(983)
一、椭圆的定义及其标准方程(984)	二、用标准方程研究椭圆的性质(986)
习题四	(992)
第五节 双曲线	(993)
一、双曲线的定义及其标准方程(993)	二、用标准方程研究双曲线的性质(995)
习题五	(1001)
第六节 抛物线	(1002)
一、抛物线的定义及其标准方程(1002)	二、抛物线的性质(1003)
习题六	(1008)
第七节 椭圆、双曲线和抛物线之间的关系	(1008)

- 一、离心率(1008) 二、圆锥截线(1010) 三、光学性质(1010) 四、天体运动的轨道(1014) 五、二次曲线(1014) 习题七(1015)

第八节 特殊曲线.....(1015)

- 一、极坐标(1016) 二、极坐标与直角坐标的关系(1018)
三、曲线的极坐标方程(1020) 四、极坐标方程的图形(1024) 五、等进螺线和圆的渐开线(1028) 六、参数方程(1032) 习题八(1042)

复习题.....(1043)

第九章 微分和积分.....(1045)

第一节 函数.....(1045)

- 一、常量与变量(1045) 二、函数概念(1047) 三、函数表示法(1049) 四、函数的几种性质(1049) 五、初等函数(1052) 习题一(1058)

第二节 极限和连续.....(1059)

- 一、极限(1059) 二、连续(1081) 习题二(1088)

第三节 导数和微分.....(1090)

- 一、导数(1090) 二、求导数的法则(1104) 三、微分(1114) 习题三(1127)

第四节 微分学的基本定理.....(1129)

- 一、中值定理(1129) 二、洛必达法则(1136) 三、台劳公式(1146) 习题四(1155)

第五节 微分学的应用.....(1156)

- 一、函数的递增性与递减性(1156) 二、曲线的凹凸与拐点(1159) 三、函数的极值(1163) 四、弧长的微分(1174) 五、曲率及曲率圆(1175) 六、曲线的渐屈线、渐伸线(1182) 七、曲线的渐近线(1183) 习题五(1187)

第六节 定积分.....(1188)

一、定积分的概念(1188)	二、定积分的基本公式(1196)	
习题六(1202)		
第七节 不定积分		(1209)
一、不定积分的概念(1203)	二、不定积分的运算法则(1206)	
三、换元积分法(1208)	四、分部积分法(1215)	
五、积分表的使用(1220)	习题七(1224)	
第八节 定积分的应用		(1225)
一、平面曲线弧长的计算(1225)	二、平面图形的面积(1230)	
习题八(1237)		
复习题		(1237)
总复习题		(1240)

第八章 平面解析几何

解析几何是用代数方法研究几何图形性质的一门数学学科。它以坐标系作为桥梁，使几何中的基本元素“点”与代数中的基本元素“数”之间建立联系，再用运动的观点把图形看成是动点的轨迹，使几何中的曲线与代数中的方程之间建立联系，这样就可用代数的方法来研究几何图形了。因此，解析几何的特征是引进了运动与变化的概念；形与数的辩证结合。这种结合的基本方法是坐标法。恩格斯曾对解析几何的产生给予高度的评价，他说：“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生……”。解析几何正是由于生产实践的需要而产生的。

第一节 基本知识

我们知道，解析几何的特征是形数结合。这种结合的基本方法是坐标法。在第五章讨论函数及其图象时，已经谈过如何建立坐标系的问题。现在我们就可以通过坐标解决一些简单的问题了。

一、两点间的距离

已知平面上任意两点 M_1, M_2 ，设它们的直角坐标分别是 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，现在我们来求 M_1, M_2 之间的距离 d 。

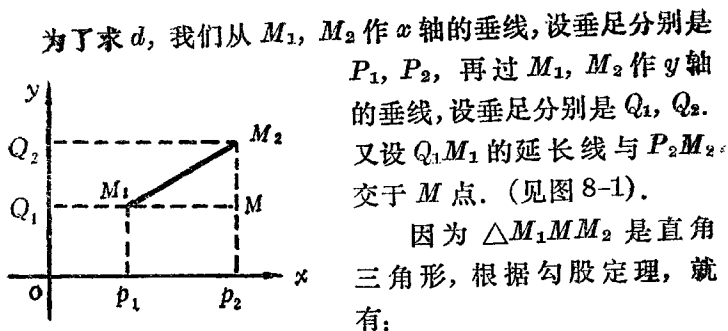


图 8-1

为了求 d , 我们从 M_1, M_2 作 x 轴的垂线, 设垂足分别是 P_1, P_2 , 再过 M_1, M_2 作 y 轴的垂线, 设垂足分别是 Q_1, Q_2 . 又设 Q_1M_1 的延长线与 P_2M_2 交于 M 点. (见图 8-1).

因为 $\triangle M_1MM_2$ 是直角三角形, 根据勾股定理, 就有:

$$d = \sqrt{(M_1M)^2 + (MM_2)^2}.$$

但 M_1M 和 MM_2 的长度分别等于 $|P_1P_2|$ 和 $|Q_1Q_2|$,

$$\therefore d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

这就是所求的两点间距离公式.

特别地, 点 $M(x, y)$ 和原点间的距离 r 就是:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

例 1 求 $M_1(-2, 3)$ 与 $M_2(6, -12)$ 之间的距离.

解 由公式(1)知

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{[6 - (-2)]^2 + [(-12) - 3]^2} \\ &= \sqrt{64 + 225} = 17. \end{aligned}$$

例 2 求以 $A(5, 2)$ 、 $B(-4, 5)$ 、 $C(-2, 1)$ 为顶点的三角形的外接圆的圆心.

解 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心应在各边的垂直平分线上. 若圆心为 $P(x, y)$ 点, 则:

$$|PA| = |PB| = |PC|.$$

或

$$|PA|^2 = |PB|^2, \quad |PA|^2 = |PC|^2.$$

$$\text{即} \quad \begin{cases} (x-5)^2 + (y-2)^2 = (x+4)^2 + (y-5)^2, \\ (x-5)^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -18x+6y=12, \\ -14x-2y=-24. \end{cases} \quad \text{解之, 得} \begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$$

故外接圆的圆心为 $P(1, 5)$.

二、线段的定比分点

设在平面上有不同的两点, 并将其中的一个作为第一点, 另一个作为第二点, 我们分别用 M_1 、 M_2 表示它们. 过此两点作直线 l , 并选定它的正向, 于是把它看成一条轴. 再设 M 是轴 l 上任一点. 但 M 不与 M_2 重合, 由下面等式

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$$

所确定的数 λ , 叫做点 M 划分有向线段 M_1M_2 所成的“比”.

关于划分线段为已知比的问题, 可运用坐标方法来解决.

设已知两点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, 求点 $M(x, y)$. 使其划分线段 M_1M_2 的比等于 $\lambda (\lambda \geq 0)$.

解: 过点 M_1 、 M_2 、 M 分别作 x 轴的垂线, 得垂足 P_1 , P_2 , P (见图 8-2), 根据平面几何的已知定理: “在诸平行直线间的线段成比例”, 使得:

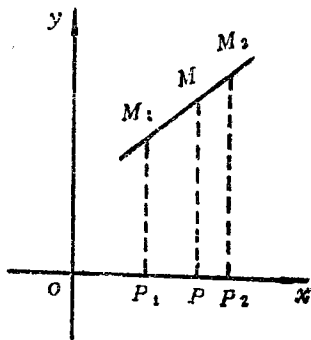


图 8-2

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda,$$

$$\therefore |P_1P| = |x - x_1|, \quad |PP_2| = |x_2 - x|.$$

因 M_1 、 M_2 、 M 是直线上有序的三个点, 而 $x - x_1$ 与 $x_2 - x$ 同

号, 式中的绝对值的符号可以不要. 所以有

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,$$

解出未知数 x , 得:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

同理可求出:

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \quad \text{即} \quad \begin{cases} x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \quad (3)$$

讨论:

(1) 当 $M(x, y)$ 是线段 M_1M_2 的中点时, 即 $\lambda=1$, 则 M 点的坐标为:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \quad (4)$$

就是说, 线段中点的坐标, 等于它的两个端点对应坐标之和的一半.

(2) 当 $M(x, y)$ 在线段 M_1M_2 的延长线上时, 即

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=-\lambda,$$

这时由三点的次序, 得 $x-x_1$ 与 x_2-x 反号, $y-y_1$ 与 y_2-y 也反号. 于是有

$$x=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}, \quad y=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}. \quad (5)$$

例1 已知点 $M_1(1, 1)$ 和 $M_2(7, 4)$, 试在它们所确定的线段上求一点 M , 使得 M 到 M_1 的距离比它到 M_2 的距离近一半.

解 已知 $\lambda=\frac{1}{2}$, 由公式(3)得:

$$x = \frac{1 + \frac{1}{2} \times 7}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} = 3, \quad y = \frac{1 + \frac{1}{2} \times 4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 2.$$

所以 M 点坐标为: $x=3, y=2$.

例 2 已知平行四边形 $ABOD$ 的三个顶点为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$, 求第四个顶点 D 的坐标.

解 AC 与 BD 交于 P , 则 $|PA| = |PC|$, $|PB| = |PD|$ (平行四边形的对角线互相平分), 又设 D 的坐标为 (x, y)

$\therefore P$ 是 AC 的中点,

$\therefore$ 它的坐标为 $P\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$.

P 也是 BD 的中点, $\therefore$ 它的坐标为 $P\left(\frac{x_2+x}{2}, \frac{y_2+y}{2}\right)$,

而 P 的坐标是唯一的,

$$\therefore \frac{x_1+x_3}{2} = \frac{x_2+x}{2}, \quad \frac{y_1+y_3}{2} = \frac{y_2+y}{2}.$$

即

$$x = x_1 + x_3 - x_2, \quad y = y_1 + y_3 - y_2.$$

$\therefore D$ 点的坐标为 $(x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$.

例 3 已知任意三点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 为三角形的顶点, 求此三角形面积.

解 从 A 、 B 、 C 三点分别引横轴的垂线交 x 轴于 P 、 M 、 N 三点, (如图 8-3)

根据梯形面积的求法, 得出:

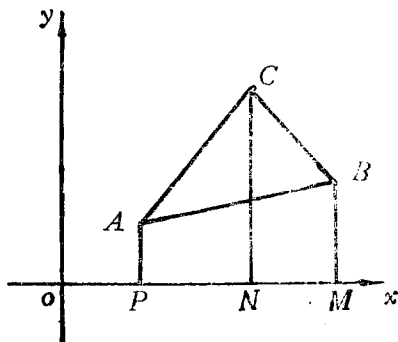


图 8-3

$\triangle ABC$ 的面积

$= (\text{梯形 } APNC + \text{梯形 } CNMB - \text{梯形 } APMB) \text{ 的面积}$

$$= \frac{1}{2} PN (PA + NC) + \frac{1}{2} NM (NC + MB)$$

$$- \frac{1}{2} PM (PA + MB)$$

$\because PN = x_3 - x_1, PA = y_1, NC = y_3, NM = x_2 - x_3, MB = y_2, PM = x_2 - x_1$. 代入上式则得:

$\triangle ABC$ 的面积

$$= \frac{1}{2} (x_3 - x_1) (y_1 + y_3) + \frac{1}{2} (x_2 - x_3) (y_3 + y_2)$$

$$- \frac{1}{2} (x_2 - x_1) (y_1 + y_2)$$

$$= \frac{1}{2} [(x_3 - x_1) (y_1 + y_3) + (x_2 - x_3) (y_2 + y_3)$$

$$- (x_2 - x_1) (y_1 + y_2)]$$

利用行列式表示法, 就可把上式化为:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

注意 三角形的顶点的顺序取逆时针方向时, 面积是正的; 取顺时针方向时, 面积是负的.

练 习

1. 求 A, B 间的距离时, A 与 B 的次序有无关系? 求线段 AB 的定比分点时, A 与 B 的次序有无关系?
2. 两点间距离公式是什么?

3. 公式(3)中的 λ 具有什么意义? 它可以取负值么? 为什么? 当 $\lambda=0$ 时, 分点怎样?

4. 三角形的面积等于零时, 即
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
 体现什么意义?

习 题 一

1. 证明: 以 $A(3, 2)$, $B(6, 5)$, $C(1, 10)$ 作为顶点的三角形是直角三角形.
2. 三角形的三顶点是 $A(2, 3)$, $B(-3, 3)$, $C(0, -1)$. 求三角形的周长及面积.
3. 把两点 $A(-2, -1)$, $B(3, 2)$ 间的线段分成 $3:2$, 求分点坐标.
4. 证明以 $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-9, -9)$ 为顶点的三角形是等腰三角形, 并求: (1) 底边的长; (2) 底边上的高.
5. 三角形 ABC 的三个顶点分别为 $(2, -3)$, $(-6, -3)$, $(5, 4)$, 求它三边中线的长及其交点.
6. 试证: $\triangle ABC$ 的两边 AB 与 AC 的中点连线 $EF = \frac{1}{2} BC$.

第二节 曲线与方程

前面我们已学过平面上的点与二实数间的一一对应关系. 利用这个工具, 我们来建立平面上的曲线与含有两个变数的方程的联系.

一、曲线的方程

曲线通常都是作为点运动的轨迹. 例如弹道是一条抛物线, 人造地球卫星的轨道是椭圆等等. 许多重要的曲线都是有一定规律的, 我们把这些曲线看成是动点按照一定的条件

运动的轨迹。例如“和一个已知点的距离等于定长 R 的动点的轨迹”。就是以这个已知点为圆心，以定长 R 为半径的圆。因此，建立直角坐标系之后，动点所遵循的条件，就反映为流动坐标 (x, y) 所应满足的限制条件，它们常常表示为 x, y 的一个方程(称为曲线方程)

$$F(x, y) = 0.$$

有时它可以写成为 $y=f(x)$ 形式。

定义 凡是含有两个变数 x, y 的方程 $F(x, y)=0$ ，表示一条曲线，这曲线是坐标满足此方程的点的轨迹。这个方程就叫做这条曲线的方程。

因此，在给定的坐标系下，一个方程称为曲线的方程时，它必须满足下面两个条件：

- (1) 曲线上的点，它的坐标必定满足这个方程；
- (2) 坐标满足这个方程的点，必在曲线上(也就是说不在曲线上的点，它的坐标必定不满足这个方程。)

例 1 设已知线段 AB 的端点为 $A(1, 2)$ 和 $B(-3, 4)$ ，求 AB 垂直平分线的方程。

解 线段 AB 的垂直平分线是与 A 和 B 等距离的点的轨迹。

设 $P(x, y)$ 是 AB 垂直平分线上的任意一点，则：

$$|PA| = |PB|, \quad \therefore |PA| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2};$$

$$|PB| = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2};$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2}.$$

化简得：
$$2x - y + 5 = 0.$$

这就是所求的垂直平分线的方程。

例 2 求以点 $C(a, b)$ 为圆心， R 为半径的圆的方程。

解 设 $M(x, y)$ 是圆 C 上任意一点(见图 8-4)，那末 M