

ENGINEERING STRUCTURE DE NUMERICAL ANALYSIS METHODS — SHENPENGCHENG LUNWENJI



# 工程结构的数值分析方法

——沈鹏程论文集

安徽大学出版社

ENGINEERING STRUCTURE DE NUMERICAL ANALYSIS METHODS — SHENPENGCHENG LUNWENJI

GONGCHENG JIEGOU DE SHUZHIFENXI FANGFA — SHENPENGCHENG LUNWENJI

目次  
第一章 绪论  
第二章 有限元法  
第三章 有限差分法  
第四章 有限元法与有限差分法的比较  
第五章 有限元法在工程中的应用  
第六章 有限元法在结构分析中的应用  
第七章 有限元法在流体力学中的应用  
第八章 有限元法在电磁学中的应用  
第九章 有限元法在热力学中的应用  
第十章 有限元法在声学中的应用  
第十一章 有限元法在动力学中的应用  
第十二章 有限元法在复合材料中的应用  
第十三章 有限元法在生物力学中的应用  
第十四章 有限元法在材料科学中的应用  
第十五章 有限元法在环境工程中的应用  
第十六章 有限元法在医学中的应用  
第十七章 有限元法在农业工程中的应用  
第十八章 有限元法在机械工程中的应用  
第十九章 有限元法在土木工程中的应用  
第二十章 有限元法在水利工程中的应用  
第二十一章 有限元法在海洋工程中的应用  
第二十二章 有限元法在航空航天工程中的应用  
第二十三章 有限元法在核能工程中的应用  
第二十四章 有限元法在能源工程中的应用  
第二十五章 有限元法在环境工程中的应用  
第二十六章 有限元法在材料科学中的应用  
第二十七章 有限元法在生物力学中的应用  
第二十八章 有限元法在医学中的应用  
第二十九章 有限元法在农业工程中的应用  
第三十章 有限元法在机械工程中的应用  
第三十一章 有限元法在土木工程中的应用  
第三十二章 有限元法在水利工程中的应用  
第三十三章 有限元法在海洋工程中的应用  
第三十四章 有限元法在航空航天工程中的应用  
第三十五章 有限元法在核能工程中的应用  
第三十六章 有限元法在能源工程中的应用  
第三十七章 有限元法在环境工程中的应用  
第三十八章 有限元法在材料科学中的应用  
第三十九章 有限元法在生物力学中的应用  
第四十章 有限元法在医学中的应用  
第四十一章 有限元法在农业工程中的应用  
第四十二章 有限元法在机械工程中的应用  
第四十三章 有限元法在土木工程中的应用  
第四十四章 有限元法在水利工程中的应用  
第四十五章 有限元法在海洋工程中的应用  
第四十六章 有限元法在航空航天工程中的应用  
第四十七章 有限元法在核能工程中的应用  
第四十八章 有限元法在能源工程中的应用  
第四十九章 有限元法在环境工程中的应用  
第五十章 有限元法在材料科学中的应用  
第五十一章 有限元法在生物力学中的应用  
第五十二章 有限元法在医学中的应用  
第五十三章 有限元法在农业工程中的应用  
第五十四章 有限元法在机械工程中的应用  
第五十五章 有限元法在土木工程中的应用  
第五十六章 有限元法在水利工程中的应用  
第五十七章 有限元法在海洋工程中的应用  
第五十八章 有限元法在航空航天工程中的应用  
第五十九章 有限元法在核能工程中的应用  
第六十章 有限元法在能源工程中的应用  
第六十一章 有限元法在环境工程中的应用  
第六十二章 有限元法在材料科学中的应用  
第六十三章 有限元法在生物力学中的应用  
第六十四章 有限元法在医学中的应用  
第六十五章 有限元法在农业工程中的应用  
第六十六章 有限元法在机械工程中的应用  
第六十七章 有限元法在土木工程中的应用  
第六十八章 有限元法在水利工程中的应用  
第六十九章 有限元法在海洋工程中的应用  
第七十章 有限元法在航空航天工程中的应用  
第七十一章 有限元法在核能工程中的应用  
第七十二章 有限元法在能源工程中的应用  
第七十三章 有限元法在环境工程中的应用  
第七十四章 有限元法在材料科学中的应用  
第七十五章 有限元法在生物力学中的应用  
第七十六章 有限元法在医学中的应用  
第七十七章 有限元法在农业工程中的应用  
第七十八章 有限元法在机械工程中的应用  
第七十九章 有限元法在土木工程中的应用  
第八十章 有限元法在水利工程中的应用  
第八十一章 有限元法在海洋工程中的应用  
第八十二章 有限元法在航空航天工程中的应用  
第八十三章 有限元法在核能工程中的应用  
第八十四章 有限元法在能源工程中的应用  
第八十五章 有限元法在环境工程中的应用  
第八十六章 有限元法在材料科学中的应用  
第八十七章 有限元法在生物力学中的应用  
第八十八章 有限元法在医学中的应用  
第八十九章 有限元法在农业工程中的应用  
第九十章 有限元法在机械工程中的应用  
第九十一章 有限元法在土木工程中的应用  
第九十二章 有限元法在水利工程中的应用  
第九十三章 有限元法在海洋工程中的应用  
第九十四章 有限元法在航空航天工程中的应用  
第九十五章 有限元法在核能工程中的应用  
第九十六章 有限元法在能源工程中的应用  
第九十七章 有限元法在环境工程中的应用  
第九十八章 有限元法在材料科学中的应用  
第九十九章 有限元法在生物力学中的应用  
第一百章 有限元法在医学中的应用



# 工程结构的数值分析方法

——沈鹏程论文集

安徽大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

工程结构的数值分析方法: 沈鹏程论文集 / 沈鹏程著.  
合肥: 安徽大学出版社, 2001.9  
ISBN 7-81052-468-2

I . 工 ... II . 沈 ... III . 工程结构 - 数值计算 - 计算方法 - 文集 IV . TU311.4-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 066074 号

## 工程结构的数值分析方法 — 沈鹏程论文集 沈鹏程 著

出版发行 安徽大学出版社  
(合肥市肥西路3号 邮编 230039)

联系电话 总编室 0551-5107719  
发行部 0551-5107784

E-mail: ahdxcps@mail.hf.ah.cn

责任编辑 张 犇  
封面设计 薛建军

印刷 安徽石油勘探开发公司印刷厂

开本 850 × 1168 1/32

印张 14.625

字数 330千

版次 2001年12月第1版

印次 2001年12月第1次印刷

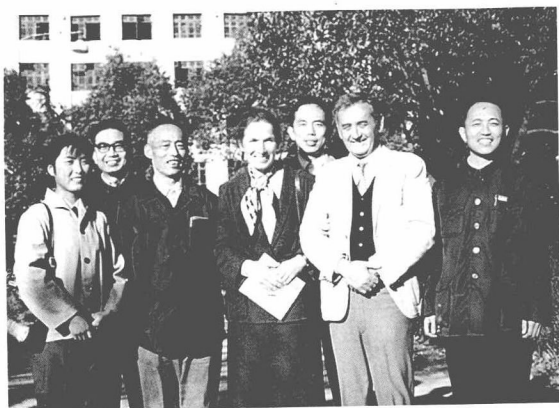
ISBN 7-81052-468-2/O · 29

定价 38.00 元

如有影响阅读的印装质量问题, 请与出版社发行部联系调换



沈鹏程教授

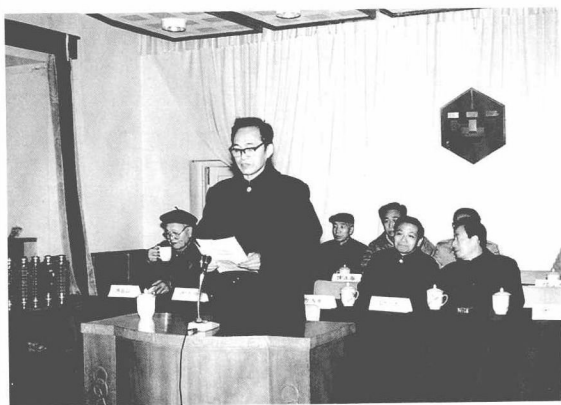


1980年作者(右一)与美国著名力学专家、合肥工业大学荣誉教授 H.Kardestuncn(右二)及夫人(右三)在我校讲学时的合影。

1985年作者(右一)参加在美国奥斯汀举行的第一届世界计算力学学术会议时与国际著名力学专家卡学鏞教授(右二)的合影。



1989年，作者(左二)在安徽省土木工程学会计算机学术交流会上与原安徽省建设厅厅长许鸣天同志在一起。



1989年，作者(前一)在安徽土木工程学会计算机学术委员会成立大会上做报告。在二排就坐的有原省建设厅厅长许鸣天(右一)。



作者(中)在研究生论文答辩会上与研究生们的合影。

1993年，作者与世界著名力学专家、德国加特大学教授H.BUFLER(中)及夫人(右三)的合影，一起合影的还有合肥工业大学校长陈心昭教授(左三)等。





1994年，作者(前排左二)与著名力学专家蔡四维教授(前排左三)、省交通厅总工程师刘晓尧教授级高工(前排左一)等一起参加蚌埠公路大桥技术鉴定。



1995年10月，作者(右二)在合肥工业大学与我国著名力学专家胡海昌(左一)院士等一起座谈。



1996年，作者在中国科技大学与我国著名力学专家(作者大学时的老师)钱令希院士(右一)合影。



1997年，作者(左四)在河海大学参加徐芝纶院士(右四)的博士生毕业论文答辩时的合影。

## 作者简介

(1930.2~2000.10)

沈鹏程,江苏启东人,1952年毕业于浙江大学工学院土木工程系。合肥工业大学教授,安徽建筑工业学院兼职教授。原任安徽土木工程学会常务理事兼计算机学术委员会主任委员,安徽省水利科学研究院顾问,世界计算力学协会会员。长期从事工程力学、计算力学及计算机辅助工程设计等教学与科研工作。在国家自然科学基金、安徽省教委自然科学基金的资助下完成了五项科研课题,在国内外期刊上发表学术论文百余篇,著作六部。1999年获安徽省自然科学二等奖,1994年获机械工业部科技进步三等奖,1987、1991、1997年分别获安徽省科学优秀论文一等奖三项,1985年获安徽省中青年优秀科技工作者称号;事迹分别被《世界文化名人辞海》、《当代中国科学名人成就大典》、《中国当代自然科学人物总传》等收录。从1992年开始享受国务院颁发的政府特殊津贴。



## 序

计算力学是一门新兴学科,在近代力学、计算数学和计算机科学的交叉地带蓬勃发展,受到世界学术界和工程界的高度重视和广泛关注。

以冯康院士为代表的中国学者五十年来在此学科领域不断耕耘和开拓,取得了一批举世瞩目的创新成果。沈鹏程教授是其中的一员,是一名勤奋的耕耘者和开拓者。

沈鹏程教授任教于合肥工业大学,兼任安徽省土木工程学会常务理事,计算机应用学术委员会主任,安徽省水利科学研究院顾问等。他几十年如一日,潜心致力于教学和科研工作,桃李满园,硕果累累。曾获“安徽省自然科学二等奖”,“机械工业部科技进步三等奖”以及三项安徽省自然科学优秀论文一等奖,出版教材和专著六部,在国内外著名期刊上发表论文 100 余篇,学科内容包括四部分:(1)多变量与单变量样条有限元法;(2)混合元、杂产交元及有限条法;(3)基于状态空间理论的多变量数值方法;(4)计算机辅助结构与计算机绘图。这些论著覆盖面广,立论严谨,富于创新,倾注了几

十年的心血,体现了沈鹏程教授锲而不舍的工作精神。


科学进展是永不息止的攀登。已有的优秀成果是继续攀登的新起点。本书汇集了沈教授科研论著的精华,从一个侧面反映了中国学者的贡献,可供同行学者在教学科研中参考,也可作为研究生的学习用书。教师的乐趣是精心培育,使学生赶上和超过自己,科研成果的价值是为继续攀登者提供向上的阶梯。

文如其人,本书论著体现了一种诚正严谨的学风,也如实地反映了作者的精神风采。我不由得想起在合肥工业大学校园里传诵的联句:

待人诚、律己正、诚正为怀一生清廉;

治学严、教学谨、严谨育人桃李满园。

我细读本书书稿时,不时默诵着这一联句,掩卷沉思,从中感悟到一种精神的力量和无言的教益。

中国工程院院士: 

2001年春于清华园

# 目 次

弹性变厚度长矩形板弯曲的 Ritz 解法 .....	1
有限条元法分析弹性地基板和矩形底边筒支球形扁壳 .....	21
基础板的一种迦辽金有限条元解法 .....	35
Reissner 混合参数有限元法在杆系结构中的应用 .....	41
双曲扁壳有限条分析 .....	57
虚功的对偶性原理及其在混杂有限元法中的应用 .....	74
样条函数法解扁壳的微型计算机程序 .....	97
样条高斯配点法解加劲板壳问题 .....	108
样条高斯配点法分析加劲板壳的振动与屈曲问题 .....	126
多变量样条元法分析中厚度板的弯曲 .....	142
多变量样条有限元法 .....	151
样条混合元法解板壳问题 .....	165
重力拱坝的静动力反应分析的图形化技术 .....	176
基于胡 - 鹭津原理的多变量样条有限元法分析扁壳问题 .....	188
状态空间法计算拱坝的多变量静、动力响应 .....	203
混凝土拱坝的计算机仿真 .....	219
多变量样条元法分析弹性地基板的弯曲、振动与稳定问题 .....	225
平面框架动力响应的状态空间分析 .....	238
计算力学中的样条有限元法的进展 .....	243
样条状态变量法分析弹性地基板的动力响应 .....	259
SOLUTION OF GOVERNING DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VIBRATING CYLINDRICAL SHELLS USING B-SPLINE FUNTIONS .....	271
VIBRATION ANALYSIS OF FLAT SHELLS BY USING B SPLINE FUNCTIONS .....	287

STATIC ANALYSIS OF CYLINDRICAL SHELLS BY USING B SPLINE FUNCTIONS .....	307
.....	
STATIC, VIBRATION AND STABILITY ANALYSIS OF STIFFENED PLATES USING B SPLINE FUNCTIONS .....	325
TECHNICAL NOTE A SEMIANALYTICAL METHOD FOR STATIC ANALYSIS OF SHALLOW SHELLS .....	340
DYNAMIC ANALYSIS OF STIFFENED PLATES AND SHELLS USING SPLINE GAUSS COLLO- CATION METHOD .....	354
ANALYSIS OF STIFFENED STRUCTURES ON ELASTIC FOUNDATION USING SPLINE GAUSS COLLOCATION METHOD .....	369
COMPUTER AIDED DESIGN SYSTEM FOR REINFORCED STRUCTURES ON VAX - 11/780 MINICOMPUTER .....	374
MULTIVARIABLE SPLINE ELEMENT ANALYSIS FOR PLATE BENDING PROBLEMS ...	
.....	380
VIBRATION ANALYSIS OF PLATES USING THE MULTIVARIABLE SPLINE ELEMENT METHOD .....	394
STABILITY ANALYSIS FOR PLATES USING THE MULTIVARIABLE SPLINE ELEMENT METHOD .....	406
BENDING ANALYSIS OF PLATES AND SPHERICAL SHELLS BY MULTIVARIABLE SPLINE ELEMENT METHOD BASED ON GENERALIZED VARIATIONAL PRINCIPLE .....	418
BENDING ANALYSIS OF RECTANGULAR MODERATELY THICK PLATES USING SPLINE FI- NITE ELEMENT METHOD .....	433
DYNAMIC RESPONSE OF ELASTIC RECTANGULAR PLATES BY SPLINE STATE VARIABLE METHOD .....	448
后记 .....	462

## 弹性变厚度长矩形板弯曲的 Ritz 解法\*

**Abstract:** The analysis of elastic plates of variable thickness is rather difficult. In this paper, the Ritz's method is used to solve the cylindrical bending of long rectangular plates of variable thickness, and the same method is also used to solve the long rectangular plates of variable thickness having a small initial curvature. A simply supported long rectangular plate under uniform loads with the thickness represented by expressions in which

$h_0$  — the thickness of plates at supported edge,

$h$  — the thickness of plates at any point,

$\alpha$  — a constant.

is considered. Then the Ritz's method applied to the cylindrical bending of long rectangular plates of variable thickness reduces to the solutions of a high order simultaneous equations which can be solved by the approximate method. Two numerical examples are given to show the general procedure of computations.

### 引 言

弹性变厚度板的弯曲问题是一个具有实际意义的问题,但是由于在数学上的困难,到目前为止,已解决了的这类问题为数很少,对于弹性长矩形等厚度板的弯曲问题在船板应力计算中会遇到,这类问题首先由俄国造船学专家 Н·Г·бубиов 所解决,以后又

---

\* 刊于《安徽水利电力学院学报》第 1 卷第 1 期,1965。

经 Timoshenko 教授和张福范教授讨论过。

本文采用弹性长矩形板的厚度以正弦函数变化规律。应用 Ritz 法来解算,对于这个问题,我们得到一组高阶代数方程组,解出它,问题则全部解决,在弹性力学中,对于几何图形较复杂的问题,要严格地根据弹性力学全部方程来求出它的解答是有很困难的,因此在实际上常常采用了各种各样的近似解法,其中较有名的近似解法之一为 Ritz 法,Ritz 法内容如下:首先建立弹性板的总能量式子。对于弯曲与拉压联合作用的板的总能量一般表达式:

$$\begin{aligned}
 I = & \iint \left\{ \frac{D}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \mu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \\
 & + \iint \left[ N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy + \frac{1}{2} \iint \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \\
 & - \iint q(x \cdot y) w(x \cdot y) dx dy. \tag{1}
 \end{aligned}$$

但对于我们所论的长矩形板,将上式简化为:

$$I = \int_0^L \frac{D}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} \cdot S \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^L q(x) \cdot w(x) \cdot dx \tag{2}$$

式中  $S = N_x$

假定板的挠曲方程式:

$$w = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \cdots + a_n \varphi_n \tag{3}$$

(3)式中  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  为待定常数,当选择  $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$  函数应适合板的边界条件,且要求  $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$  是连续的。至于是否适合板的平衡方程式可以不考虑,把(3)代入(2)进行积分,我们便得到:

$$I = F(a_1 a_2 \cdots a_n) \tag{4}$$

我们求 I 的极小条件来选择系数  $a_1, a_2, \cdots, a_n$ , 所以有  $\delta I = 0$  的条件,把此条件写成:

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0 \cdots \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0 \quad (5)$$

这样我们便得到一组未知数为  $a_1, a_2 \cdots a_n$  的方程组, 解这个方程组, 便得出了问题的解答。本文计算了两个例题。

## 一、简支弹性变厚度长矩形板承受均布载荷下的弯曲问题

设有一沿宽度方向厚度变化的长矩形板, 示图(一)、(二)。板的宽度为  $L$ , 板的边界上为不动铰接, 作用于板上的载荷为均布强度  $q_0$ , 因作用于板上的载荷沿板长方向不变, 故离板两端较远处的弯曲成一柱面。因此我们只须取垂直于板长而相距 1 单位的板条来研究其应力及变形示图(二)。由于板端为不动铰接支承, 故板两端不能相互移动。当板上承受横向载荷时, 板内有拉力存在。于是我们计算一受弯曲同时又受拉伸的小条板, 且这个拉力与作用在板上的载荷有关。因此, 这个问题较为复杂。设所截取小条的挠度曲线为:

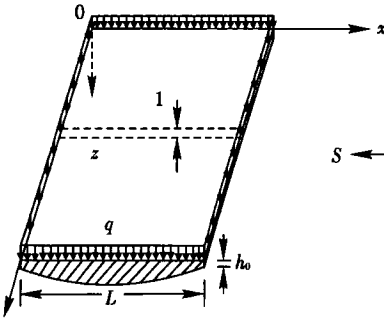


图 1

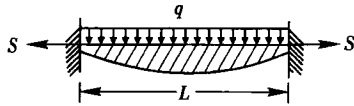


图 2

$$W = \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6)$$

这一级数的每一项均满足板的边界条件:

$$W_{x=0} = 0 \quad \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=n} = 0$$

取板沿宽度方向厚度变化为:

$$h = h_0 \left( 1 + \alpha \sin \frac{\pi x}{L} \right) \quad (7)$$

式中  $h_0$  ——板端厚度

$\alpha$  ——为任意常数

$$\text{由(6)} \quad \frac{dw}{dx} = \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n\pi}{L} a_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 a_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

板内拉力  $S$  将使小条板拉长  $\lambda$ , 由虎克定律:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{S(1-\mu^2)}{E} \int_0^L \frac{dx}{h_0 \left( 1 + \alpha \sin \frac{\pi x}{L} \right)} \\ &= \frac{2 \cdot S(1-\mu^2) \cdot L}{h_0 E \pi} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

而  $\lambda$  可以由挠度曲线之长减去原长而计算求得:

$$\lambda = \int ds - dx = \int_0^L \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2} dx - dx \right)$$

应用二项定理展开且忽略高级微量:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left( \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \right)^2 \cdot dx \\ &= \frac{\pi^2}{4L} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^2 a_n^2 \end{aligned} \quad (9)$$

由(8)(9)有:

$$\frac{S(1-\mu^2) \cdot 2L}{hE\pi(\sqrt{1-\alpha^2})} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) = \frac{\pi^2}{4L} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} n^2 a_n^2 \quad (10)$$

这样板拉力所形成的变形能:(取级数的首三项)



$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{1}{2} \cdot S \cdot \lambda = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \int_0^L \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx \\
 &= \frac{Eh_0\pi^5}{64(1-\mu^2)L^3} \sqrt{1-\alpha^2} \frac{1}{\left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right)} \left( \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \alpha_n^2 n^2 \right)^2 \quad (11)
 \end{aligned}$$

板弯曲所形成的变形能:(取级数的首三项)

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \int_0^L \frac{D}{2} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{Eh_0^3(1+\alpha \sin \frac{\pi x}{L})^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{Eh_0^3}{24(1-\mu^2)} \int_0^L (1+\alpha \sin \frac{\pi x}{L})^3 \left[ \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \right]^2 dx
 \end{aligned}$$

上式中的几个积分如下:

$$\begin{aligned}
 \int_0^L (1+\alpha \sin \frac{\pi x}{L})^3 \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx &= \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \alpha + \frac{9}{8} \alpha^2 + \frac{16}{15\pi} \alpha^3 \right) L \\
 \int_0^L (1+\alpha \sin \frac{\pi x}{L})^3 \sin^2 \frac{3\pi x}{L} dx &= \left( \frac{1}{2} + \frac{108}{35\pi} \alpha + \frac{3}{4} \alpha^2 + \frac{208}{315\pi} \alpha^3 \right) L \\
 \int_0^L (1+\alpha \sin \frac{\pi x}{L})^3 \sin^2 \frac{5\pi x}{L} dx &= \left( \frac{1}{2} + \frac{100}{33\pi} \alpha + \frac{3}{4} \alpha^2 + \frac{2000}{3003\pi} \alpha^3 \right) L \\
 \int_0^L (1+\alpha \sin \frac{\pi x}{L})^3 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{3\pi x}{L} dx &= - \left( \frac{4}{5\pi} \alpha + \frac{3}{8} \alpha^2 + \frac{16}{15\pi} \alpha^3 \right) L \\
 \int_0^L (1+\alpha \sin \frac{\pi x}{L})^3 \sin \frac{3\pi x}{L} \sin \frac{5\pi x}{L} dx &= - \left( \frac{20}{21\pi} \alpha + \frac{464}{1155\pi} \alpha^3 \right) L \\
 \int_0^L (1+\alpha \sin \frac{\pi x}{L})^3 \sin^2 \frac{\pi x}{L} \sin \frac{5\pi x}{L} dx &= - \left( \frac{4}{35\pi} \alpha - \frac{16}{315\pi} \alpha^3 \right) L \\
 \int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{3\pi x}{L} dx &= 0 \\
 \int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{5\pi x}{L} dx &= 0 \\
 \int_0^L \sin \frac{3\pi x}{L} \sin \frac{5\pi x}{L} dx &= 0
 \end{aligned}$$

于是:

$$V_2 = \frac{h_0^3 E \pi^5}{24(1-\mu^2)L^3} \left\{ a_1 \left( \frac{1}{2\pi} + \frac{4}{\pi^2} \alpha + \frac{9}{8\pi} \alpha^2 + \frac{16}{15\pi^2} \alpha^3 \right) \right\}$$