高中複習叢書

解析幾何學

董滌塵編

改訂本

商務印書館發行

高中複習叢書

解析幾何學

董滌塵編

商務印書館發行

中華民國二十四年五月初版
中華民國二十四年八月改訂三版
中華民國二十五年四月改訂五版

(52420·2)

高中複習叢書 解析幾何學一冊

每冊定價國幣叁角
外埠酌加運費匯費

編著者　董滌塵
發行人　王雲五　上海河南路
印刷所　商務印書館　上海河南路
發行所　商務印書館　上海及各埠

（本書校對者　胡達聰　袁秉美）

高中復習叢書編輯大意

一、本叢書係根據最近教育部頒佈之高級中學課程標準，及本館高中復興教科書分科編輯而成。

二、本叢書編著綱要，表解與圖解並用，務使讀者對於每一科的基本知識，有具體的了解。

三、本叢書搜集近年來全國各省市高中會考試題，按題作答，分析清楚，更可幫助讀者對升學會考作相當的準備。

四、本叢書除參考各教科書編纂外，更於東西文參考書中搜求新穎的解題方法，故益完備。

五、本叢書爲供讀者需要，忽促出版，內容或有忽略脫漏之處，如蒙讀者來函更正，尤所歡迎。

目　　次

第一章　點及坐標……………………………………………………1
第二章　軌跡與方程式………………………………………… 14
第三章　直線………………………………………………………… 33
第四章　圓……………………………………………………………… 59
第五章　圓錐曲線………………………………………………… 90
第六章　移軸法……………………………………………………121
第七章　極坐標……………………………………………………130

高中複習叢書

解析幾何學

第一章 點及坐標

［提　　要］

(1) 兩點的距離: 設 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 爲任意兩點, d 表兩點間的距離, 則

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 1)^*$$

推論: 任意一點 $P(x, y)$ 與原點 (Origin) 的距離爲

$$d=\sqrt{x^2+y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 2)$$

［因原點的坐標爲 $(0, 0)$］

(2) 兩點聯線間的分點: 設 $P(x, y)$ 爲所設二點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 間的一點, 而分 P_1P_2 爲兩線段的比, 如 $P_1P : PP_2 = a$, 則 P 點的坐標爲

---

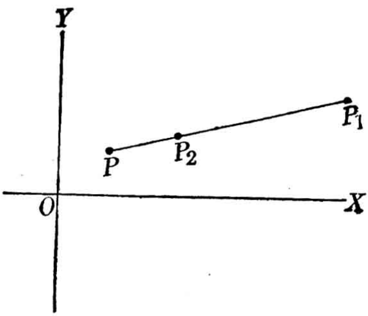
* 凡各種定理之證明, 及各種名詞之解釋, 本書一概從略, 讀者可參閱下列各書:

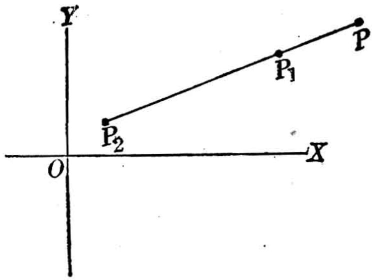
(1) 商務印書館出版之高中解析幾何學教科書.
(2) Smith, Gale: Elements of Analytic Geometry.
(3) Smith, Gale, Neelley: New Analytic Geometry.

$$x=\frac{x_1+\alpha\,x_2}{1+\alpha},\ y=\frac{y_1+\alpha\,y_2}{1+\alpha}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{公式}\ 3)$$

推論1: 若P點外分P_1P_2,如$P_1P:PP_2$(圖1或圖2),則因P_1P與PP_2的方向相反,故$P_1P:PP_2=-\alpha$,由是公式3變成

$$x=\frac{x_1-\alpha\,x_2}{1-\alpha},\ y=\frac{y_1-\alpha\,y_2}{1-\alpha}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{公式}\ 4)$$





推論2: 若 P 爲 P_1P_2 的中點,則 $P_1P:PP_2=1$,卽$\alpha=1$,由是公式3變成

$$x=\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ y=\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式}\ 5)$$

(3) 線坡 (Slope). 通過$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$兩點之直線,若與x軸所成之角爲α,則此直線之線坡爲

$$m=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{公式}\ 6)$$

注意: 當$0°<\alpha<90°$時,m爲正,

當 $90° < \alpha < 180°$ 時, m 爲負.

當 $\alpha = 0$ 時, $m = 0$, 直線與 x 軸平行.

當 $\alpha = 90°$ 時, $m = \infty$, 直線與 y 軸平行.

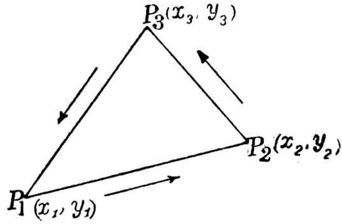
(4) 兩直線的線坡關係: 設 m_1, m_2 爲兩直線之線坡,則 (a) 若兩直線平行,則 $m_1 = m_2$; (b) 若兩直線互相垂直,則

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= -\frac{1}{m_2} \\ m_2 &= -\frac{1}{m_1} \end{aligned}\right\} \text{或 } m_1 m_2 = -1 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }7)$$

(5) 三角形的面積: 設 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ 爲三角形 $P_1 P_2 P_3$ 的頂點, A 表這三角形的面積,則

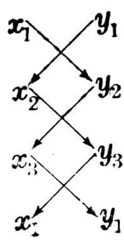
$$A = \tfrac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\} \cdots\cdots(\text{公式 }8)$$

注意: 計算面積時,依反鐘方向旋轉,即得正量;如右圖.



爲便於計算起見,可照下列幾個步驟:

a. 把各頂點之坐標,照反鐘向的次序寫成兩行,如右式:

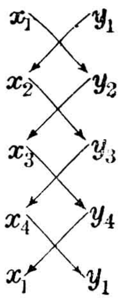


b. 以前行之各橫坐標各與後行下一列之縱坐標相乘 (如 $x_1 y_2, \cdots$) 而加其各積:

$x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1$.

又以後行之各縱坐標各與前行下一列之橫坐標相乘(如 $x_2y_1,\cdots$)而加其各積: $x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3$.

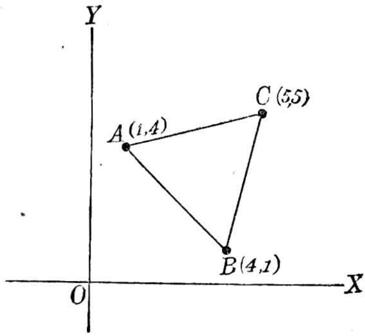
c. 從前一和減去後一和,再除以 2, 即爲三角形之面積.



推論: 設 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$, $P_4(x_4,y_4)$ 爲照反鐘方向次序之四邊形之頂點,則此四邊形之面積,可從右式照上法求出.

[舉　　例]

1. 證明 (1,4), (4,1), (5,5) 爲一等腰三角形之頂點.



〔解〕 從公式 1:

$$AC=\sqrt{(5-1)^2+(5-4)^2}$$

$$=\sqrt{17}$$

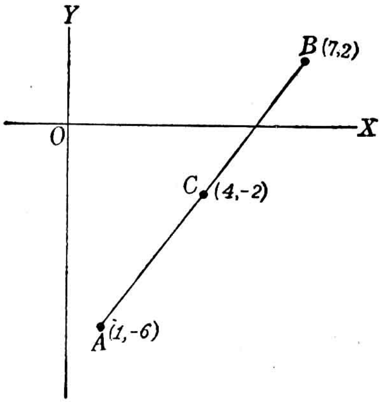
$$BC=\sqrt{(5-4)^2+(5-1)^2}$$

$$=\sqrt{17}$$

故 $\triangle ABC$ 爲等腰三角形.

2. 證明 (7, 2) 及 (1, −6) 二點在一圓周上,圓心爲 (4, −2); 并求他的半徑長.

〔解〕 從公式 1:



$$CA=\sqrt{(4-1)^2+(-2+6)^2}$$

$$=\sqrt{25}=5$$

$$CB=\sqrt{(7-4)^2+(2+2)^2}$$

$$=\sqrt{25}=5$$

故以 C 為圓心, 5 為半徑作圓, 必過 A, B 兩點.

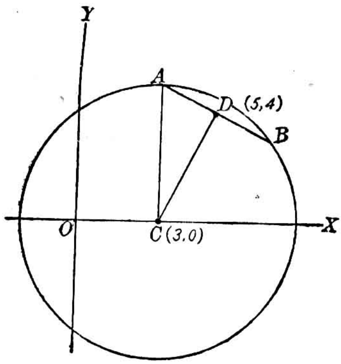
3. 已知 (6, 2) 與 (3, k) 間之距離為 5, 決定 k 之數值.

〔解〕 從公式 1: $\sqrt{(6-3)^2+(2-k)^2}=5$,

即 $$9+4-4k+k^2=25,\ k^2-4k-12=0$$

$$(k-6)(k+2)=0, \quad \therefore \quad k=6 \text{ 或 } k=-2.$$

4. 若一圓的圓心在 (3, 0), 長為 4 之一弦的中點為 (5, 4), 求這圓的半徑.



〔解〕 $CD\perp AB$ (通過一弦中點的半徑必垂直於這弦).

$$\therefore \quad CA=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{AD}^2}$$

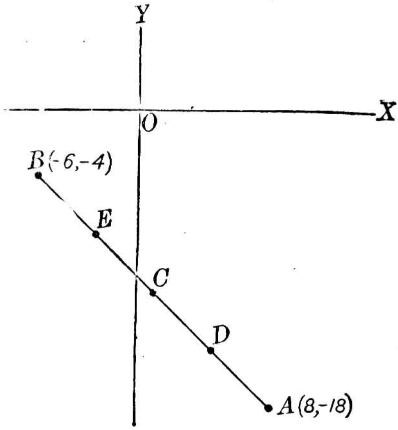
$$\because \quad \overline{CD}^2=(5-3)^2+4^2\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(從公式 1)}$$

$$=20$$

$$\overline{AD}^2=2^2=4,$$

$$\therefore \quad CA=\sqrt{24}=2\sqrt{6}.$$

5. 試將自 $(8,-18)$ 至 $(-6,-4)$ 二點間之距離平分爲四,求其分點.(滬,二十二年).



〔解〕 設 $C(x_1,y_1)$ 爲 AB 中點,$D(x_2,y_2)$,$E(x_3,y_3)$ 各爲 AC,CB 中點,從公式5:

$$C:\ x_1=\frac{8-6}{2}=1,$$

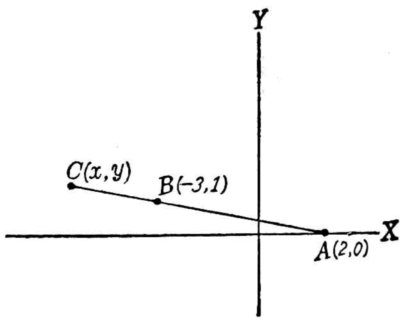
$$y_1=\frac{-18-4}{2}=-11;$$

$$D:\ x_2=\frac{8+1}{2}=4\frac{1}{2},$$

$$y_2=\frac{-18-11}{2}=-14\frac{1}{2};$$

$$E:\ x_3=\frac{1-6}{2}=-2\frac{1}{2},\quad y_3=\frac{-11-4}{2}=-7\frac{1}{2}.$$

6. 延長 AB 至 C,使 $AC=3(BC)$,設 A 的坐標爲 $(2,0)$,B 的坐標爲 $(-3,1)$,求 C 點的坐標.



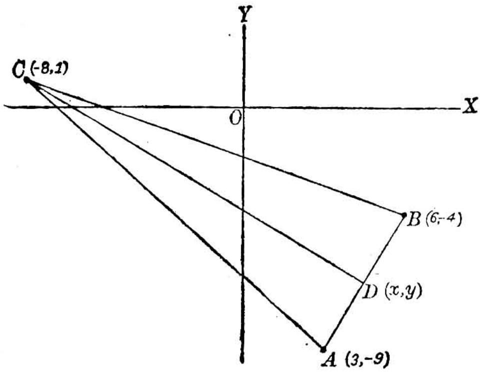
〔解〕 因 C 點外分 AB,故從公式4:

$$C:\quad x=\frac{2-3(-3)}{1-3}=\frac{11}{-2}=-5\frac{1}{2},$$

$$y=\frac{0-3\cdot 1}{1-3}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

7. 一等腰三角形底邊的兩端爲(3, −9), (6, −4), 頂點爲(−8, 1); 求底邊上的高.

〔解〕 設 D 爲底邊 AB 中點, 從公式5:



$$D:\quad x=\frac{6+3}{2}=4\frac{1}{2},\ y=\frac{-4-9}{2}=-6\frac{1}{2};$$

又從公式1: $$CD=\sqrt{\left(-8-\frac{9}{2}\right)^2+\left(1+\frac{13}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2}$$

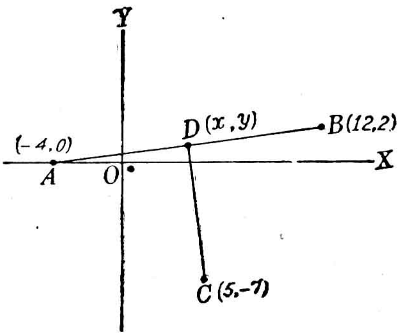
$$=\frac{1}{2}\sqrt{25^2+15^2}=\frac{5}{2}\sqrt{34}$$

8. 證明 $(-4,0)$, $(12,2)$ 兩點聯線的垂直平分線,必通過 $(5,-7)$ 一點.

〔解〕 設 $D(x,y)$ 爲 AB 中點,從公式5:

$$D:\ x=\frac{-4+12}{2}=4,$$

$$y=\frac{2}{2}=1;$$



又從公式6:

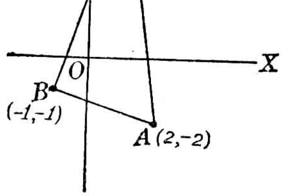
$${}^{*}m_{AB}=\frac{2-0}{12-(-4)}$$

$$=\frac{2}{16}=\frac{1}{8},$$

$$m_{CD}=\frac{-7-1}{5-4}=-8.$$

故從公式7, $CD\perp AB$, 卽 AB 的垂直平分線,通過 C 點.

9. 設三角形之三頂點爲 $(2,-2)$, $(-1,-1)$, $(1,5)$. 證此三角形爲一直角三角形. (滬,二十二年).



〔解〕 從公式6:

$$m_{AB}=\frac{-2+1}{2+1}=-\frac{1}{3},$$

$$m_{BC}=\frac{-1-5}{-1-1}=\frac{6}{2}=3,$$

---

* m_{AB} 表直線 AB 之線坡.

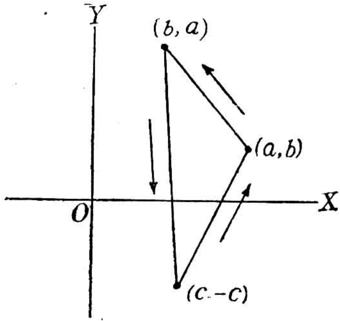
故從公式7，知 $AB\perp BC$，$\therefore$ ABC 爲直角三角形.

10. 三角形的三個頂點爲 (a, b), (b, a), $(c, -c)$，求他的面積.

〔解〕 $$\text{面積}=\frac{1}{2}[a^2-bc+bc-(b^2+ac-ac)].$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-b^2).$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \\ c & -c \\ a & b \end{vmatrix}$$

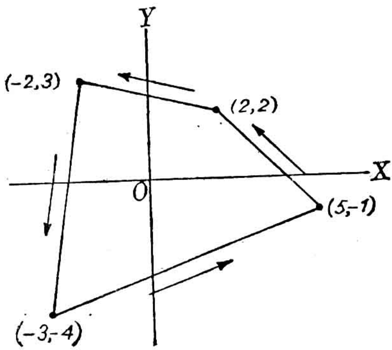


11. 四邊形的頂點爲 $(-2, 3)$, $(-3, -4)$, $(5, -1)$, $(2, 2)$；求他的面積.

〔解〕 $$\text{面積}=\frac{1}{2}[6+8+3+10-(-4-9-20-2)]$$

$$=\frac{1}{2}(27+35)=\frac{1}{2}\times 62=31.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \\ -3 & -4 \\ 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

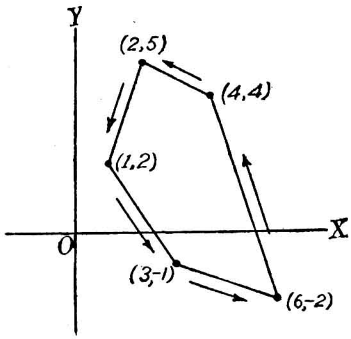


12. 一個五邊形的頂點爲$(1,2)$, $(3,-1)$, $(6,-2)$, $(2,5)$, $(4,4)$, 求他的面積.

〔解〕 面積$=\frac{1}{2}[4-1-6+24+20-(5+6-6-8+8)]$.

$$=\frac{1}{2}(41-5)=\frac{1}{2}\times 36=18.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 6 & -2 \\ 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

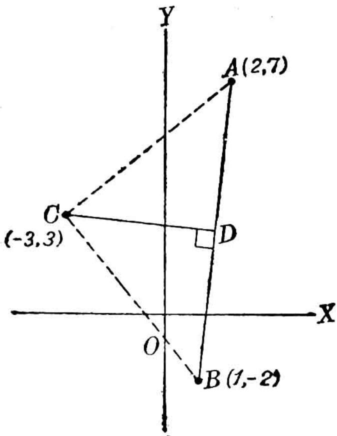


13. 求從一點$(-3,3)$至兩點$(2,7)$, $(1,-2)$聯線之距離.

〔解〕 連結三點成一三角形,他的面積$=\frac{1}{2}[6+6+7-(-21+3-4)]$

$$=\frac{1}{2}\times 41=\frac{41}{2}\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$



$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(7+2)^2}=\sqrt{82},$$ 又 $CD\perp AB$,

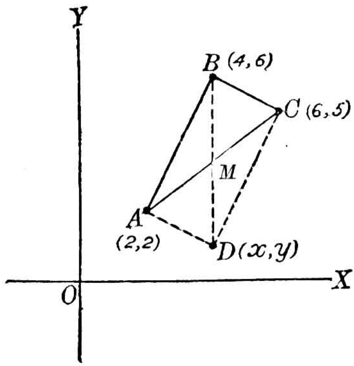
而三角形面積 $=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{\sqrt{82}}{2}CD$……………………$(b)$

從 (b),(a) 得 $\frac{41}{2}=\frac{\sqrt{82}}{2}CD$, $\therefore CD=\frac{41}{\sqrt{82}}=\frac{41}{82}\sqrt{82}=\frac{1}{2}\sqrt{82}.$

14. 一長方形的三個頂點為 (2, 2), (6, 5), (4, 6). 求這長方形的面積.

〔解〕 三角形 ABC 的面積 $=\frac{1}{2}[10+36+8-(12+20+12)]=\frac{1}{2}(54-44)=\frac{10}{2}=5.$

$$\left|\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{array}\right|$$



$\because\ \square ABCD=2\triangle A\,l\,C,\quad \therefore\ \square ABCD=2\cdot5=10.$

15. 求上題中第四個頂點的坐標.

〔解〕 如上圖: $m_{AB}=\frac{6-2}{4-2}=\frac{4}{2}=2,\ m_{BC}=\frac{6-5}{4-6}=-\frac{1}{2}.$

$\therefore\ AB\perp BC,\quad \therefore\ B$ 為直角, 故 AC 為對角線.

設 $M(x_1, y_1)$ 爲 AC 中點 則

$$M:\quad x_1=\frac{2+6}{2}=4\quad y_1=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}.$$

又延長 BM 至 $D(x, y)$ 使 $MD=BM$, 則因 $BD=2MD$, D 爲 BM 之外分點.

$$\therefore\quad D:\quad x=\frac{4-2\cdot 4}{1-2}=4,\quad y=\frac{6-2\cdot\frac{7}{2}}{1-2}=1.$$

故第四個頂點的坐標爲 $(4,1)$.

[習　題]

(1) 上面例7, 試用另一方法去求.

[提示] 1. 用面積關係, 如例13.

2. 或用勾股弦定理: $\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$,

(2) 上面例9, 試用另一方法去求.

[提示] 1. 用勾股弦定理證明 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$,

2. 或用面積關係證明三角形 ABC 的面積 $=\frac{1}{2}AB\cdot BC$.

(3) 上面例15, 試用另一方法去求.

[提示] 用面積關係.

(4) 證明三點 $A(4, 2)$, $B(6, -3)$, $C(10, -13)$ 在一直線上.

[提示] 1. 用距離公式: 證明 $AB+BC=AC$.

2. 或用線坡公式: 證明 $m_{AB}=m_{BC}$

3. 或用面積公式: 證明 $\triangle ABC=0$.

(5) 一平行四邊形的三個頂點爲 $(-2,0)$, $(-7,4)$, $(3,3)$, 求他的面積.

[提示] 同例14. (35)