高等学校教材

线性代数与空间解析几何

主　编　于朝霞　张苏梅　苗丽安

高等教育出版社
Higher Education Press

高等学校教材

线性代数与空间解析几何

主编　于朝霞　张苏梅　苗丽安
编委　（以姓氏笔画为序）
于朝霞　刘金国　张苏梅　单　伟

高等教育出版社

内容提要

本书系统地介绍了线性代数与空间解析几何的基本理论与方法，把代数与几何有机地结合起来．本书内容结构严谨、层次清晰、通俗易懂；在内容上注意与实际问题的结合；例题的选取与习题的配备注意典型与难易的结合，题型丰富．本书前八章介绍了线性代数与空间解析几何的基本知识，第九章介绍了现代数学软件 Mathematica 的初步使用知识．

本书可作为高等学校工学、经济学等各专业的教材与参考书，也可供自学者及有关科技人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何/于朝霞，张苏梅，苗丽安主编．—北京：高等教育出版社，2009．11

ISBN 978-7-04-027956-6

Ⅰ．线…　Ⅱ．①于…②张…③苗…　Ⅲ．①线性代数-高等学校-教材②空间几何：解析几何-高等学校-教材　Ⅳ．O151．2　O182．2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 183218 号

策划编辑　于丽娜　**责任编辑**　李华英　**封面设计**　张　志
责任绘图　郝　林　**版式设计**　王　莹　**责任校对**　金　辉
责任印制　张泽业

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京地质印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2009年11月第1版
印　　张	16.75	**印　　次**	2009年11月第1次印刷
字　　数	310 000	**定　　价**	18.40元

物料号　27956-00

前　言

线性代数与空间解析几何是高等学校理工类专业重要的数学基础课．随着现代数学的发展，代数与几何这两门数学课程相互渗透、紧密结合已成为一种趋势．我们编写这本《线性代数与空间解析几何》，旨在传授数学知识的同时，着力提高学生的数学素养，培养学生应用数学知识解决实际问题的能力，为学生在今后工作中更新数学知识、学习现代数学方法奠定良好的基础．与现行的同类教材相比，本书有以下几个特点：

1. 结构上将线性代数与空间解析几何有机地融合在一起．代数与几何之间有联系也有区别，线性代数是讨论有限维空间的线性理论的课程，有较强的抽象性和逻辑性．几何问题更是广泛存在于自然科学与技术科学乃至日常生活中．代数为几何提供研究方法，几何为代数提供直观背景，通过这两部分内容相互渗透、交叉学习，必将大大提高学生的逻辑推理能力、计算能力与空间想象能力．这样安排既可减少课时，又可提高教学效果．

2. 为学习现代数学开设内容展示的窗口和延伸发展的接口．本书尽量使用现代数学语言、术语与符号，注意与当代文献的习惯用法相衔接；介绍了数学软件 Mathematica 的使用，使学生通过上机练习，解决线性代数与几何中的基本计算问题．这些内容的安排，将为拓展学生的知识面、灵活应用现代数学工具解决实际问题打下基础．

3. 加强概念的背景教学，提高学生利用数学方法解决实际问题的能力．对一些抽象数学概念进行还原，尽量从实际背景出发，通过提出问题、解决问题的方式展开教材内容，力求突出解决实际问题的数学思想与方法，使学生获得数学问题的洞察力．代数与几何是经典的数学内容，在科技与生产各个方面有着广泛的应用，在教材中也适当编入了这方面的内容．如：利用矩阵理论解决了单循环比赛的名次确定问题；利用方程组解决了经济数学中的投入产出问题等．这样安排不仅解决了学生理解抽象概念的困难，而且也使他们更有兴趣在现实生活中发现问题、解决问题，从而增强建立数学模型的能力．

4. 教材内容的多层次．本书努力适应不同的学习要求，特别是课程基本要求与工学、经济学硕士研究生的入学考试要求，在内容的编排、例题与习题的配备方面注意了多样化．书中打 * 号的内容可酌情取舍或作为自学内容．例题的选取注意了“典型性”与“全面性”，可适合不同层次教学的需求．习题按小节配备，章后有综合练习，注意兼容各种题型，难易结合，书末附有习题

答案.

本书前七章的内容涵盖了该课程的基本要求规定的全部内容，能满足机械、自动化、计算机等工学类各专业的教学要求；经济学类各专业选择学习第一、二、三、五、六章及第四章选学部分内容即可；另外，对本门课程教学要求不是很高的其他专业可选学本书的前三章及第五章；第八章内容适合教学要求高的专业选学；第九章内容适合所有专业学习，可根据各专业学时的多少进行选学或在教师引导下自学. 前七章后的数学实验设计由于实验内容为本章的例题，故不需占用学时而由教师引导学生课下上机实习即可.

本书的第二、五、八、九章由于朝霞编写，第一、三、四章由张苏梅编写，第六、七章由苗丽安编写，于朝霞负责全书统稿. 另外，在本书试用过程中，开发了配套的 CAI 课件，对教学效果的提高起到重要作用.

周智教授审阅了全书. 教材在试用过程中，刘桂真教授对本书的内容与结构及使用效果给予了充分的肯定，感谢以上两位专家给予的支持与鼓励.

在本书的编写过程中，济南大学教务处、理学院等各级领导给予了极大的关心与支持，同时也得到了兄弟院校许多同行的支持与鼓励；在教材的试用过程中，任课教师提出了许多可行的意见与建议，对以上所有这些真诚的帮助深表谢意.

由衷地感谢高等教育出版社及相关专家对本书提出修改的意见与建议，为我们完善书稿内容提供了有力的帮助.

由于编者水平有限，教材中缺点和疏漏在所难免，恳请读者批评指正.

编 者

2009 年 3 月于济南

目　　录

第一章　行列式 ······ 1

1.1　二阶与三阶行列式 ······ 1

1.1.1　二阶行列式 ······ 1

1.1.2　三阶行列式 ······ 3

习题 1－1 ······ 5

1.2　n 阶行列式的定义 ······ 5

1.2.1　排列与逆序数 ······ 5

1.2.2　n 阶行列式的定义 ······ 6

习题 1－2 ······ 9

1.3　行列式的性质及计算 ······ 9

1.3.1　行列式的性质 ······ 9

1.3.2　行列式的计算 ······ 14

习题 1－3 ······ 19

1.4　克拉默(Cramer)法则 ······ 20

习题 1－4 ······ 23

总习题一 ······ 24

数学实验一：用 Mathematica 进行行列式的运算 ······ 25

第二章　矩阵及其运算 ······ 28

2.1　矩阵及其运算 ······ 28

2.1.1　矩阵的概念 ······ 28

2.1.2　矩阵的运算 ······ 31

习题 2－1 ······ 37

2.2　逆矩阵 ······ 38

2.2.1　逆矩阵的定义 ······ 38

2.2.2　方阵可逆的充要条件 ······ 39

习题 2－2 ······ 42

2.3　分块矩阵及其运算 ······ 43

2.3.1　分块矩阵的概念 ······ 43

2.3.2　分块矩阵的运算 ······ 44

习题 2－3 ······ 48

2.4 矩阵的初等变换与矩阵的秩 …… 49
2.4.1 矩阵的初等变换 …… 49
2.4.2 矩阵秩的概念与求法 …… 53
习题 2-4 …… 57
2.5 初等矩阵 …… 57
2.5.1 初等矩阵及其性质 …… 57
2.5.2 用初等变换求逆矩阵 …… 59
习题 2-5 …… 62
2.6 矩阵应用实例 …… 63
总习题二 …… 65
数学实验二：用 Mathematica 进行矩阵的运算 …… 67
第三章 向量与向量空间 …… 71
3.1 几何向量及其线性运算 …… 71
3.1.1 几何向量的基本概念 …… 71
3.1.2 几何向量的线性运算 …… 72
习题 3-1 …… 73
3.2 空间直角坐标系 …… 74
3.2.1 空间直角坐标系 …… 74
3.2.2 几何向量的坐标表示 …… 74
3.2.3 用坐标进行向量运算 …… 77
习题 3-2 …… 78
3.3 n 维向量及其线性运算 …… 78
3.3.1 n 维向量的概念 …… 78
3.3.2 n 维向量的线性运算 …… 79
习题 3-3 …… 79
3.4 向量组的线性相关性 …… 80
3.4.1 向量组及其线性组合 …… 80
3.4.2 线性相关与线性无关的概念 …… 83
3.4.3 线性相关性的性质 …… 83
3.4.4 线性相关性的判定 …… 85
习题 3-4 …… 89
3.5 向量组的秩 …… 90
3.5.1 最大线性无关组 …… 90
3.5.2 向量组的秩 …… 91
3.5.3 矩阵的秩与向量组的秩的关系 …… 92

习题 3－5 …… 94
3.6　向量空间 …… 95
3.6.1　向量空间的概念 …… 95
3.6.2　坐标变换 …… 98
习题 3－6 …… 100
总习题三 …… 100
数学实验三：用 Mathematica 求向量组的最大无关组 …… 102
第四章　欧氏空间 …… 103
4.1　向量的内积　欧氏空间 …… 103
4.1.1　$\mathbf{R}^3$ 中向量的内积 …… 103
4.1.2　n 维向量的内积　欧氏空间 …… 104
习题 4－1 …… 106
4.2　标准正交基 …… 106
习题 4－2 …… 109
4.3　$\mathbf{R}^3$ 中向量的外积和混合积 …… 110
4.3.1　向量的外积 …… 110
*4.3.2　向量的混合积 …… 111
习题 4－3 …… 113
4.4　$\mathbf{R}^3$ 中的平面与直线 …… 113
4.4.1　平面及其方程 …… 113
4.4.2　空间直线及其方程 …… 116
4.4.3　位置关系 …… 119
*4.4.4　平面束 …… 122
习题 4－4 …… 123
4.5　空间曲面及其方程 …… 124
4.5.1　球面 …… 124
4.5.2　旋转曲面 …… 125
4.5.3　柱面 …… 126
习题 4－5 …… 127
4.6　空间曲线及其方程 …… 127
4.6.1　空间曲线的一般方程 …… 127
4.6.2　空间曲线的参数方程 …… 128
4.6.3　空间曲线在坐标面上的投影 …… 129
习题 4－6 …… 130
4.7　二次曲面 …… 130

4.7.1 椭球面 …… 131
4.7.2 抛物面 …… 132
4.7.3 双曲面 …… 133
4.7.4 二次锥面 …… 135
习题 4－7 …… 135
总习题四 …… 136
数学实验四：用 Mathematica 求标准正交基、描述曲线 …… 137
第五章 线性方程组 …… 139
5.1 线性方程组有解的充要条件 …… 139
习题 5－1 …… 141
5.2 线性方程组解的结构 …… 142
5.2.1 齐次线性方程组解的结构 …… 142
5.2.2 非齐次线性方程组解的结构 …… 145
习题 5－2 …… 148
5.3 用初等变换解线性方程组及线性方程组的应用 …… 149
5.3.1 用矩阵的初等行变换求解线性方程组 …… 149
5.3.2 线性方程组应用举例 …… 153
习题 5－3 …… 160
总习题五 …… 160
数学实验五：用 Mathematica 求解线性方程组 …… 162
第六章 特征值、特征向量及相似矩阵 …… 164
6.1 特征值与特征向量 …… 164
6.1.1 特征值与特征向量的概念 …… 164
6.1.2 特征值与特征向量的性质 …… 167
习题 6－1 …… 169
6.2 相似矩阵 …… 169
6.2.1 相似矩阵的概念及性质 …… 169
6.2.2 方阵的相似对角化问题 …… 171
习题 6－2 …… 173
6.3 实对称矩阵及其对角化 …… 174
6.3.1 实对称矩阵的特征值与特征向量 …… 174
6.3.2 实对称矩阵的正交相似对角化 …… 175
习题 6－3 …… 178
*6.4 应用举例 …… 179
*习题 6－4 …… 182

总习题六 …… 182
数学实验六：用 Mathematica 进行特征值的运算 …… 184
第七章　二次型 …… 187
7.1　二次型 …… 187
7.1.1　二次型的定义及其矩阵 …… 187
7.1.2　矩阵的合同 …… 189
习题 7－1 …… 190
7.2　化二次型为标准形 …… 190
7.2.1　用正交变换化二次型为标准形 …… 191
7.2.2　用配方法化二次型为标准形 …… 193
习题 7－2 …… 195
7.3　正定二次型 …… 195
7.3.1　二次型的惯性定理 …… 195
7.3.2　正定二次型 …… 196
习题 7－3 …… 198
7.4　二次型在研究二次曲面中的应用 …… 199
7.4.1　二次圆锥曲线方程化标准形 …… 199
7.4.2　二次曲面方程化标准形 …… 200
习题 7－4 …… 203
总习题七 …… 204
数学实验七：用 Mathematica 进行二次型的运算 …… 204
***第八章　线性空间与线性变换** …… 207
8.1　线性空间的概念 …… 207
8.1.1　线性空间的定义 …… 207
8.1.2　线性空间的基、维数与坐标 …… 209
8.1.3　子空间 …… 210
习题 8－1 …… 211
8.2　线性变换 …… 211
8.2.1　线性变换的概念 …… 211
8.2.2　线性变换的矩阵表示 …… 214
习题 8－2 …… 219
*总习题八 …… 219
第九章　数学软件与应用 …… 221
9.1　初识 Mathematica …… 221
9.1.1　Mathematica 的启动 …… 222

9.1.2 Mathematica 的工作环境 …… 222
9.1.3 Mathematica 的数学运算 …… 224
9.1.4 Mathematica 的函数 …… 226
9.1.5 几个方便的输入方法 …… 227
9.2 向量、矩阵及其运算 …… 228
9.2.1 构造向量和矩阵 …… 228
9.2.2 向量与矩阵的运算 …… 230
9.2.3 矩阵的逆 …… 232
9.2.4 矩阵的特征值和特征向量 …… 232
9.2.5 求解线性系统 …… 233
9.2.6 实例 …… 235
9.3 Mathematica 的绘图功能 …… 237
9.3.1 一元函数的图形 …… 237
9.3.2 二元函数的图形 …… 239
9.3.3 其他图形的描绘 …… 240
9.3.4 绘图函数 Plot，ParametricPlot，ListPlot 的有关选项 …… 241
9.3.5 绘图函数 Plot3D 的有关选项 …… 242
习题参考答案 …… 244

第一章 行 列 式

行列式是重要的数学工具，不但在数学中有广泛的应用，而且还广泛应用于工程技术和科学研究的许多领域．学习行列式，一是要理解行列式的概念，二是要掌握行列式的性质，并运用这些性质进行行列式的计算．本章主要讨论以下几个问题：

1. 行列式的定义；
2. 行列式的性质；
3. 行列式的计算；
4. 求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则．

1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

为消去未知数 x_2，以 a_{22}与 a_{12}分别乘方程组(1.1)的两个方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，可得方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \tag{1.2}$$

(1.2)式就是方程组(1.1)的求解公式．为了便于记忆此求解公式，我们引进新的符号表示(1.2)式．

记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

称为二阶行列式，其中横排称为行，竖排称为列，它等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式(1.3)的元素．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列．

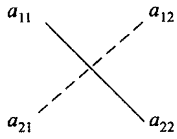

图 1－1

上述行列式的定义可用对角线法则来记忆．参看图1－1，a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为次对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去次对角线上的两元素之积所得的差．

利用二阶行列式，对线性方程组(1.1)，记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

则(1.2)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.4}$$

注 这里的分母 D 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式(称为该方程组的系数行列式)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式．

【例 1.1】 解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2=5, \\ 5x_1-7x_2=29. \end{cases}$

【解】 由于系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}=-31\neq 0,$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 29 & -7 \end{vmatrix}=-93,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 29 \end{vmatrix}=62,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-93}{-31}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{62}{-31}=-2.$$

1.1.2 三阶行列式

为了得出关于三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.5}$$

的类似于二元线性方程组的求解公式(1.4)，我们引入三阶行列式.

【定义 1.1】 记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\tag{1.6}$$

称为三阶行列式，它等于

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},\tag{1.7}$$

即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

(1.7)式称为三阶行列式(1.6)的展开式，与二阶行列式一样，数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为三阶行列式(1.6)的第 i 行第 j 列的元素.

上述定义表明三阶行列式含六项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积，其求和规律遵循图 1-2 所示的**对角线法则**：实线联结的三个元素乘积之和减去虚线联结的三个元素乘积之和.

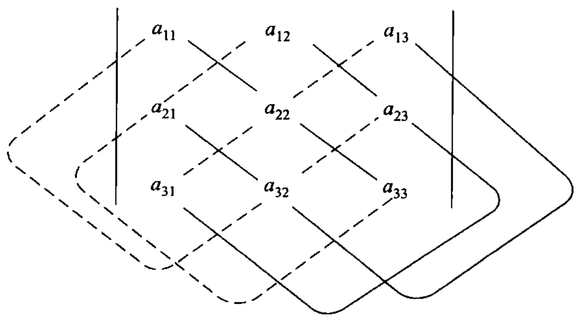

图 1-2

通过类似于对方程组(1.1)所作的讨论，可以得到方程组(1.5)的下述解法．若线性方程组(1.5)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0, \tag{1.8}$$

则方程组(1.5)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

它们是将系数行列式(1.8)中的第 1，2，3 列分别换成方程组(1.5)的常数项所得的行列式．

【例 1.2】 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

【解】 由于方程组的系数行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1 \\ &\quad -1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1 \\ &= -5\neq 0, \end{aligned}$$

类似地用对角线法则计算可得

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5.$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

习题 1－1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 9a & 18b \\ 26b & 13a \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$.

3. 解线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2+7x_3=2, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=-1, \\ -3x_1+7x_2+2x_3=3. \end{cases}$

1.2　n 阶行列式的定义

由 1.1 节的讨论，我们看到在引入二阶、三阶行列式后，二元、三元线性方程组的解可以利用行列式表达成简洁形式．为了把这个思想推广到 n 元线性方程组，我们需要引入 n 阶行列式的概念．而 n 阶行列式的定义，需要用到一些有关排列的基本知识．

1.2.1　排列与逆序数

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的一个 **n 级全排列**(简称**排列**)．n 个不同的元素的排列共有 $n!$ 种．例如，自然数 1，2，3 的排列共有六种：

$$1\,2\,3,\ 1\,3\,2,\ 2\,1\,3,\ 2\,3\,1,\ 3\,1\,2,\ 3\,2\,1.$$

为了方便，今后把自然数 $1,2,\cdots,n$ 视为 n 个不同元素的代表．用 p_i 表示这 n 个数中的一个($i=1,2,\cdots,n$)，且当 $i\neq j$ 时 $p_i\neq p_j$，于是 $p_1p_2\cdots p_n$ 便是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列．

n 级排列

$$12\cdots n$$

具有自然顺序，称为**自然排列**或**标准排列**．

对于 n 个正整数的一个排列，如果一个大的数排在一个小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**．一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序总个数称为该排列的**逆序数**，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$．

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**.

【例 1.3】 求下列排列的逆序数，并指出它们的奇偶性.

(1) 25134； (2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

【解】 (1) 在五级排列 25134 中，共有逆序 21，51，53，54，即$\tau(25134)=4$，所以 25134 是偶排列.

(2) 该排列中前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$不构成逆序，后 n 个数 $246\cdots(2n)$也不构成逆序，只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序，所以

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

易知，当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$为偶数，故此时排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$为奇数，故此时排列为奇排列.

在一个排列中，把某两个数的位置互换，而保持其余的数不动，这种对一个排列作出的变动叫做**对换**. 将相邻两个数对换，叫做**相邻对换**.

【例 1.4】 五级偶排列 25134 经过 2，3 对换变成排列 35124，容易计算 $\tau(35124)=5$，所以 35124 是奇排列.

关于对换对排列奇偶性的影响，有下述一般性结论. 有兴趣的读者可以自行证明.

【定理 1.1】 对换改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

【定理 1.2】 在全部 n 级排列中($n\geqslant2$)，奇排列和偶排列各占一半.

【定理 1.3】 任意一个 n 级排列可经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

1.2.2 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 由三阶行列式的定义容易看到有以下两个特点：

1) 三阶行列式展开式的每一项恰是取自不同行、不同列的三个元素的乘积

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

这里行标按自然顺序排成 123，列标排成 $p_1p_2p_3$，它是 1，2，3 的某个排列. 这样的排列共有3！种，对应于行列式的展开式共含 3！项. 因此行列式恰好是所有位于不同行、不同列的三个元素之积的代数和.