

大學叢書

高級統計學

下冊

艾偉著

商務印書館發行

大學叢書

高級統計學

下冊

安偉著

商務印書館發行

中華民國二十三年四月初版

版權所有
印刷必究

大學叢書
(教本) 高級統計學二冊

(一〇〇五六B)

本書實價加五成

另加郵運費三成

下冊平裝定價大洋壹元貳角

外埠酌加運費匯費

改實價一元七角
另加郵運費三成

著者 艾偉

發行人 王雲五
上海河南路

印刷所 商務印書館
上海河南路

發行所 商務印書館
上海及各埠

(本書校對者馮寶武)

大學叢書委員會

委 員

丁燮林君 王世杰君 王雲五君
任鴻雋君 朱經農君 朱家驊君
李四光君 李建勛君 李書華君
李權時君 余青松君 何炳松君
辛樹幟君 吳澤霖君 吳經熊君
周 仁君 秉 志君 竺可楨君
胡 適君 胡庶華君 姜立夫君
翁之龍君 翁文灝君 馬君武君
馬寅初君 孫貴定君 徐誦明君
唐 鈺君 郭任遠君 陶孟和君
許 璇君 陳裕光君 程天放君
程演生君 馮友蘭君 傅斯年君
傅運森君 曹惠羣君 鄒 魯君
鄭貞文君 鄭振鐸君 劉秉麟君
劉湛恩君 黎照寰君 蔡元培君
蔣夢麟君 歐元懷君 顏任光君
顏福慶君 羅家倫君 顧頤剛君

高級統計學

下冊目次

第十六章 取樣的可靠性

- | | | |
|----|----------------|-----|
| 59 | 樣子與全體之關係 | 203 |
| 60 | 機誤及其限度 | 204 |
| 61 | 機誤的公式 | 205 |
| 62 | 一個機誤的實驗 | 209 |
| 63 | 兩數相差的機誤 | 215 |
| 64 | 其他的機誤公式 | 216 |

第十七章 二數相關

- | | | |
|----|------------------|-----|
| 65 | 緒論 | 218 |
| 66 | 相關係數 | 218 |
| 67 | 正相關與負相關 | 221 |
| 68 | 簡單的相關係數計算法 | 225 |

69	次數表上相關係數之求法	229
70	相關係數的意義	239

第十八章 迴歸線

71	緒論	244
72	迴歸線的求法	245
73	迴歸的意義	247
74	迴歸線與材料的數量	247
75	迴歸方程	252
76	迴歸方程上的差誤與機誤	260

第十九章 等級相關

77	等級相關的公式	262
78	等級相關的計算法	263
79	等級相關的機誤	267
80	幾個特殊例子	268

第二十章 非直線相關

81	非直線相關的重要	272
82	非直線相關的公式	273
83	相關比的限度	277
84	相關比的計算法	278
85	直線性的試驗	280
86	相關比與組距之關係	282

第二十一章 品質相關

87	緒論	285
88	四格表	287
89	<u>皮爾生氏</u> 的餘弦 π 法	289
90	<u>西巴</u> (Sheppard) 氏的異號法	290
91	接觸係數	292
92	質量相關	297
第二十二章 多數相關		
93	部分相關	304
94	多數相關	310
95	部分的迴歸方程	313

下冊圖次

圖六十八	全體的均數與樣子的均數之表示	214
圖六十九	相關的遠近的表示	223
圖七十	非直線相關的表示	225
圖七十一	象限之表示(其一)	235
圖七十二	象限之表示(其二)	236
圖七十三	迴歸線之表示(其一)	246
圖七十四	迴歸線之表示(其二)	250
圖七十五	已有之結果(其一 兩線接近)	251
圖七十六	其二 兩線分開	252
圖七十七	其三 兩線更分得開	253
圖七十八	直線及其傾斜度	254
圖七十九	根據迴歸方程所繪之直線	257
圖八十	直線相關與非直線相關	274
圖八十一	常態面積在相關係數計算上的應用	299

下 冊 表 次

表六十六	機誤的機遇表	207
表六十七	均方差的機遇表	208
表六十八	機遇的實驗結果(第一次)	210
表六十九	機遇的實驗結果(第二次)	211
表七十	<u>塞艾二氏</u> 實驗結果之比較	213
表七十一	兩種教授法之比較	215
表七十二	簡單相關係數的計算法(其一)	226
表七十三	簡單相關係數的計算法(其二)	227
表七十四	求相關的材料	227
表七十五	簡單計算法(其三)	228
表七十六	統計班兩次月考成績	231
表七十七	相關表 第一步的整理	232
表七十八	相關表 第二步的整理	233
表七十九	相關係數的計算法(其一)	234
表八十	相關係數的計算法(其二)	237
表八十一	一部分計算法之表示	238
表八十二	相關係數大小及其等第之比較	240
表八十三	縱橫兩線的均數(由表七十八計算而出)	245

表八十四	體高體重相關表	248
表八十五	縱橫兩線的均數(從表八十四計算而出) ...	249
表八十六	縱橫兩線的均數(根據迴歸方程計算而出)	256
表八十七	等級相關的計算	264
表八十八	次數分配在等級相關上之影響(例一)	265
表八十九	次數分配在等級相關上之影響(例二)	266
表九十	特殊算法(例一)	268
表九十一	特殊算法(例二)	270
表九十二	表示非直線的相關	272
表九十三	相關比之計算(附單頁)	278
表九十四	兩質相關	285
表九十五	質量相關	286
表九十六	量的材料與無秩序的材料之相關	286
表九十七	四格表	287
表九十八	接觸係數的計算	292
表九十九	質量相關的計算	297
表一百	質量相關的最後計算	301
表一百零一	為求部分相關的各種材料	307
表一百零二	表示第一級係數之計算	308
表一百零三	表示第二級係數之計算	309
表一百零四	部分的迴歸係數之計算	316

第十六章

取樣的可靠性

59 樣子與全體之關係

關於可靠性我們在第一一章裏面曾作簡單之敘述。在那裏我們曾用初中三年級國文測驗來作例子。我們假定江浙兩省有初中三年級學生六七千人，但是考察成績的時候，我們為時間，經濟，人才三方面所限制，不能完全測到。實際上我們所測的不過數百人或千數百人，就此結果定一標準，以為這就是初中三年級的國文常模（norm）。假使江浙兩省初中三年級生六千人謂之全體，則我們所選擇而測的幾個學校的初中三年生不過為這全體中的樣子（sample）而已。我們所取的样子是能代表全體呢，還是一種特殊的（好的或壞的）樣子呢？我們知道在商業上也有打樣子的習慣。例如中國茶販到外國的時候，一船數千箱，當然不能一箱一箱的打開來查驗，只由嘗茶專家（tea taster）任取數箱嘗之，假使他說這茶不錯，他的意思是這茶如能代表全體，則全體也當然不錯。假使有一二奸商存心取巧。把艙面的箱子裝着好茶，下層的卻是壞茶。其結果樣子不能代表全體，名譽至此墮地。外商裹足，銷路減少。那取巧的商人希圖一二次的便宜，斷送了永久的顧客，真是弄巧成拙了。

在測驗上若選擇的樣子不能代表全體，雖不如商業上失敗之甚，

然而耗鉅款，費時間，徒勞無益，亦殊不值得。所以在舉行測驗之先，我們應當調查那許多學校無論如何我們要請他們參加的。例如我們要舉行國文測驗，我們要知道各校教授國文之旨趣，因為在國內中學校中，有附屬於國立大學的，有附屬於私立大學的，有的為省立，有的為縣立，有的為私立，有的為教會所立。在這些學校之中，有的偏重國文，有的偏重英文，有的偏重算學。在偏重國文的學校之中，又分為偏重『今話文』的與偏重『古話文』的兩種。在可能範圍之內，我們應當請他們都有代表加入，俾常模求出以後，成為一種適當的標準。

60 機誤及其限度

假使我們所選的樣子，確能代表全能，如是而求結果，難道就沒有別的錯誤了嗎？照我們的經驗上看，還是有的。例如舉行測驗的時間，我們本是規定的。在任何情形之下，時間應當相同。此所謂『別的情形相等』(other things being equal)。我們所求的既為某年級的國文能力，則閱讀的時間相等，始能知道國文能力未受其不等的影響。但是實際上一級數十人，在受測驗之時，難免有偶然因鉛筆斷了而犧牲了幾秒鐘，或偷看旁人一二問而得了偶然答對的便宜。這些偶然錯誤之中有多有少，我們是可以求得出來的。這種錯誤在統計學上名之曰機誤 (probable error)，或我們利用這機誤的公式，可以把這些錯誤量得出來而大致不差的。這些錯誤又叫變的錯誤 (variable errors)，因為他們是不一定的，是偶然的。還有一種錯誤是常的錯誤

(constant errors), 因為他們是常在的。例如我們測地的時候, 假使所用的量尺與標準尺有點相差, 如每一百尺相差三寸, 如是的量下去, 就常常有這樣的錯誤, 在求結果的時候, 我們必須把他們全盤更正。又如舉行測驗之時, 主試者常遲一二分鐘始行收卷。因為有了這樣的習慣, 所以在統計上也發生了一種常的錯誤。這種錯誤事先可以預防, 事後可用別的方法更正。但是用機誤的公式所量出的並不屬於此一類, 這是我們應當明瞭的。總而言之, 機誤的用處是很有限的。樣子能否代表全體, 既非機誤之所知, 而習慣上常的錯誤, 亦非他所能為力。假如在江浙兩省初中三年級我們測驗了一千人, 他們確能代表全體而測驗的時候, 又無常的錯誤, 從此而算機誤, 我們能得可靠的結果。這一千人當然是由許多學校的初中三年級生組織而成的。假使以五十人為一組, 則此一千人乃由二十組所積成。這二十組各有一平均成績。他們彼此很難相等, 但是相差也不至太遠。假使全體的平均成績為 M , 而此二十組的各個平均成績為 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{20}$, 則在次數圖上 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{20}$, 當環 M 而分配。若是組數無限的加多, 則其可靠性更大。反之, 若所測止二三組, 人數不滿二百, 則其可靠性當亦有限。

61 機誤的公式

機誤的公式若用數學原理引申出來頗冗長不便初學, 但是明瞭了以上的敘述, 則應用公式亦不困難。茲錄均數的機誤公式於下。

$$P. E._m = \frac{.6745\sigma}{\sqrt{N}} \quad (30)$$

P. E. 爲 probable error (機誤) 之簡寫。均數的機誤是與其總次數 (N) 和 σ 有關係的。他與 σ 的關係尙小，而與 N 的關係實大，因爲次數加多則 P. E._m 變小。次數越多則 P. E._m 越小，且樣子的均數越近於實在的或全體的均數，而這實驗的可靠性越大。(最小的 N 不得少於 30)。

現在我們用以前的材料 $N=196$, $\sigma=13.4$, $m=54.13$ 來算機誤如下。

$$\begin{aligned} P. E._m &= \frac{.6745(13.4)}{\sqrt{196}} \\ &= \frac{9.0383}{14} = .646 \end{aligned}$$

以所

$$m = 54.13 \pm .65$$

樣子的均數爲 54.13，他的機誤爲 .65。54.13 - .65 = 53.48, 54.13 + .65 = 54.78, 所以實在的或全體的均數大約在 53.48——54.78 之間。這機遇是一與一之比，就是全體的均數在內與不在內的機遇各有一半。這機遇的計算是根據常態分配的面積的。我們知道一個正的 P. E. 和一個負的 P. E. 各佔面積百分之二十五，所以正負兩個 P. E. 佔百分之五十，以 (100 - 50) 除 50 得一與一之比。假使我們用兩個機誤如 54.13 ± 2(.65)，這範圍爲 52.83——55.43，範圍加大則全體均數在內之機遇當更大。按兩個 P. E. 的面積爲百分之 41.13 正負各兩個 P. E. 則爲 82.26。以 (100 - 82.26) 除 82.26 得

$$\frac{82.26}{17.74} = 4.6$$

這就是說全體均數在 52.83—55.43 之內與不在其內之機遇為 4.6 與一之比。當然在內的機遇比較的多了。同理，我們可以算出三個，四個，五個 P. E. 的均數範圍，並可算出全體均數在範圍以內之機遇。茲列表於下。

表六十六 機誤的機遇表

均 數 之 範 圍	所佔面積之百分數	機 遇
$M_1 \pm 1P. E. (53.48 - 54.78)$	50.00	1 -1
$M_1 \pm 2P. E. (52.83 - 55.43)$	82.26	4.6 -1
$M_1 \pm 3P. E. (52.18 - 56.08)$	95.70	22 -1
$M_1 \pm 4P. E. (51.53 - 56.73)$	99.30	142 -1
$M_1 \pm 5P. E. (50.88 - 57.38)$	99.93	1340 -1

計算取樣錯誤除 P. E. 外有用均方差者。他的公式如下。

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (31)$$

這公式與 P. E. 的公式原理相同。其所不同者為 P. E. 與 σ 之關係，因為 P. E. 比較的小止等於 $.6745\sigma$ 。用均方差算機遇可用下表。*

*關於樣子的可靠性，本數若大於其均方差二倍，或大於其機誤三倍，即為合用。若有重要的結論根據於他的，則本數須大於其均方差三倍，大於其機誤五倍。

表六十七 均方差的機遇表

均 數 之 範 圍	所佔面積之百分數	機 遇
$M_1 \pm 1 \sigma (53.17 - 55.09)$	68.27	2.15 - 1
$M_2 \pm 2 \sigma (52.21 - 56.05)$	95.45	21 - 1
$M_3 \pm 3 \sigma (51.25 - 57.01)$	90.73	369 - 1

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{13.4}{14} = .96$$

我們知道我們所用的材料為大學入學試驗的國文成績。這是預科和本一生的成績。這人數是 196。全國各大學每年所招之預科及本一生人數約在這數的二十倍左右。所以這一百九十六人是四千人中的樣子。假如我們也和美國一樣，有大學入學試驗的標準測驗，則我們根據我們學校的成績，可以推測全國大學入學試驗的總成績的情形一二。若是樣子不夠，我們也可聯合鄰近大學，加入他們的入學試驗成績，而得一可靠的標準。這種辦法似屬可行，而我們也打算於最近之將來從事研究並實行的。可是，在現在各種試驗既沒有一定的標準，而考試委員又各自為政。所以甲大學的標準也許太高，每年投考生數約有兩千，而所取者不過二百人，乙大學的標準也許太低，遇投考學生，來者不拒，如招兵似的盡量收容。總之在我們的研究情形之下，從樣子的均數 54.13 及其正負機誤士.65 上，我們推測不到全體的均數。我們也不能妄下結論，說全體均數在 53.48——54.78 之內和不在其內之機遇為一與一，或在 52.83——55.43 之內和不在其內之機遇為 4.6 與

62 一個機誤的實驗

所謂在正負各一 P. E. 之內其機遇為一與一，或在正負各二 P. E. 之內其機遇為 4.6 與一本是一種理論，根據常態分配圖的面積的。事實與理論相差幾何，我們不妨研究一下。在這個實驗裏我們用卡片 1024 張，每張各有一數由零到十，其分配即照 $(a+b)^{10}$ 之展開式，就是 0 與 10 各一張，1 與 9 各十張，2 與 8 各四十五張，3 與 7 各一百二十張，4 與 6 各二百十張，5 得 252 張，共一千零二十四張。在這總數裏我們隨意取出三十二張，而計其每張所有之數目。旋將這卡片歸入總數內使其混雜，然後再抽出三十二張。如是凡三十二次。所以這一千零二十四張卡片我們分作三十二個樣子，每個樣子計三十二張。在一個月之後我們為比較起見，又另作三十二個樣子，每一樣子仍是三十二張。我們根據這兩次的實驗，求出各樣子的均數，及其機誤和差誤（即均方差）。

在六十八，六十九兩表裏第一行是樣子的數目從一到三十二，第二行是各樣子的均數，第三行是他們的均方差，第四行是各均數的機誤，第五行是各均數和他們的正負兩個 P. E. 的範圍。這全體的均數等於五，即 $(Q+P)^{10}$ 的展開式的均數，在十三章表五十六裏業已註明。所以在第六行裏我們問全體的均數是否在正負兩個 P. E. 之內。在表六十八裏在內者有十九，不在者有十三。在這個情形之下，在內與不在內的機遇為十九與十三之比。照理論上講起來，應為十六與十