

(高中卷)

LINGJULISHUXUEJIAOLIUTIYANYUTANJIU

零距离数学交流 体验与探究

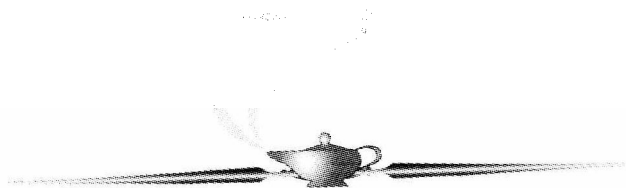
罗增儒 编著

广西教育出版社



内容简介

本书是学生谈数学体验与专家作专业分析相结合的小论文汇集，学生的体验有巩固性的完善与引申，有拓展性的辨析与争鸣，有研究性的猜想与论证；专家的分析有思维闪光的热情挖掘，有修正疵漏的中肯建议，有写作技术的具体指导、丰富的例题涵盖了课本、高考、竞赛三个层面，并着意体现佳题巧解、难题简解、名题多解、陈题新解，无论是在观念维度还是技术维度上，都为学生提供了学会学习、学会解题、学会探究的有益范例。





前言

本书的前言是在正文完成之后才写的，它是全书的一个组成部分。读者大多习惯于阅读正文之前翻看一下前言，笔者的补充建议是：阅读正文之后，再次翻看一下前言。

1. 开宗明义的介绍

从1999年至今，我以“知心”老师的名义，为《中学生学习报》隆重推出“数苑新芽”栏目，专门发表学生的数学习作，激励研究活动，并逐篇配上分析评注（知心点评），这是我与中学生进行数学交流的一个渠道，也是中学生之间进行数学知识交流、数学体验交流和问题解决交流的宽广空间。随同第一篇文章的刊出，我草拟了份“编者按”，为栏目定调：

我的任务是为未来的科学家^①提供一个崭露头角的机会，是要把同学们在学数学过程中的新鲜见解与独立发现，变成正式的数学小论文。我将作为你们的数学哥哥、数学姐姐，与你们一起去寻找你们习作中思维的闪光点与尚显嫩弱的组织，帮助你们首先在数学上成熟起来。

热烈欢迎同学们到我们春光明媚的数苑来一展身手，热切希望老师们推荐你们的得意门生到我们书声朗朗的数苑来大显才华（1999年1月2日）。

^①此处没有提数学家不是一个疏忽，我们的目光放得很宽。





本书基本上是四年来“数苑新芽”文章的一个修订汇编，同时也是我主持心愿实现程度的一次实际检验。我不知道这种形式的数学读物能否称得上一项创举，但我深切感到，广西教育出版社配合素质教育的新策划，至少在如下两方面是读者在其他数学读物中不可多见的：

(1)写作的主体是中学生自己。这一方面说明组织高中生写作小论文、进行初步的研究是可能的；另一方面，这些数苑中的新芽（一语双关，包括文章与作者），更容易沸腾你青春的热血，更容易点燃你智慧的火苗。

这与单纯由教师写的教辅读物是不同的，它更容易让你心动。

(2)直接由教授作出点评。这一方面能使中学生有机会感受一下大学的学术气氛；另一方面，这能为学生的学习与写作提供高观点的指导，你跃跃欲试的好奇心、你无时不有的学习心得和百思不解的数学迷惘，都将会更热切、也将会更快地转变成正式的论文。

这与单纯从技术的层面就题论题是不同的，它更容易使你行动。

虽然这一工作要占去我大学教学的宝贵时间，但看到青少年们获得了自主发展的新空间，看到青少年们在新空间中获得了自主发展，我是欣慰多于劳顿。

2. 内容特征的说明

(1)在整理书稿的时候，我把同学们的几十篇文章粗分为体验与探究两大部分，再组成解题体验、解题方法、一题多解、错例辨析、试题探讨、猜想研究等六个专题，这种划分是不严格的，但在这个划分的过程中却使我悟到学生写作的思维闪光点有两个特别宝贵的特征，需要读者在书面阅读中着意领会，在写作实践中着意继承：首先是创新性，其次是批判性。有好几篇猜想性质的文章都颇具新意，颇有灵气，两次原汁原味的大讨论更是“全国性中学生数学研究笔谈会”[见探究篇三(四)、(五)、(六)、(七)]，还有更多的文章，或质疑讨论了权威的高考题，或补充拓展了老师的原解



法，这不仅需要水平，同时也要有点勇气。

(2)在综合回顾我的评析风格时，我又看到两个明显的特征，需要在此作出说明：首先是力求客观真实，其次是有意无意地表达了个人的学术倾向。

小论文难免有新意多少之分，水平也不无高低之别，有的文章还存在这样那样的漏洞，我个人认为这都是“尚显嫩弱的组织”在发育过程中的自然现象。在审稿时我既不拔高也不掩饰，在评注时我总是先指出优点、特点、闪光点，同时也指出缺点、弱点、疵漏点。所有这些做法都是真诚的、直率的，主要出自客观性的考虑，同时也出自教学指导性的需要和教师职业的良心。偏颇之处，敬请小论文作者和广大读者原谅。

鉴于本人的学术倾向，评析大多从数学学习论、数学解题论和小论文写作技术的角度展开，并且，冒着新颖性与谬误并存的风险，还有意渗透“通过解题过程的分析来学会解题”的个人观点，读者完全可以不受这些范围的限制，进行更广泛的理解。

3. 小论文写作的建议

结合个人的写作体会和审稿的具体实际，仅向读者提4条参考意见。

(1)解放思想。

这是一个认识问题，也是开展写作的前提。不破除迷信，总认为中学生只能跟在教材和教师的后面“看”、“听”、“背”，连想都不敢想“写”，当然也就迈不出写作的第一步。为什么语文能有那么多的“学生作文”，数学就不会有呢？为什么本书中的同龄人能写数学文章我就写不了呢？应该看到，数学并不神秘，创新可分层次，研究意识从小就要培养。在素质教育的今天，在主动学习的背景下，教材不再是学生的世界，世界才是学生的课程。

中学时代的研究经历和获得成果的初步体验能影响终生，受益终生！





退一步说,不妨认为数学写作是一次探究性学习,小论文是一篇高层次作业。

这一想,思想是应该也能够解放的。

(2)积累资料。

这是一个技术性问题,也是写作的基础。没有材料什么文章也写不出来。

材料可以来源于课内学习(课本、作业、各类考试等),课外阅读和日常生活的观察与调研。

积累资料的方式可以有:做阅读笔记、写学习心得、编制卡片、复印感兴趣的文章等;如果有条件,还可以用电脑检索并建立个人资料库。

积累到一定程度就能萌生想法,思考到一定深度就会突发猜想,创作冲动油然而生。

(3)提出课题。

这是一个核心问题,也是写作的关键。通常认为提出问题比解决问题更重要,同学们要敢于提出真正有体会的想法,要善于捕捉稍纵即逝的念头,不要因怕说错了而不敢说,不要因怕说迟了而不想说。要防止的倒是,别从报刊上抄现成的资料,换上自己的名字,别让虚荣心侵入崇高的数学与纯洁的心灵。

如何提出问题呢?1990年布朗与沃尔特合著《提出问题的艺术》一书提出的“否定假设法”可供参考:

- ①确定出发点,这可以是已知的命题、问题或概念等;
- ②对所确定的对象进行分析,列举出它的各个“属性”;
- ③就所列举的每一“属性”进行思考:如果这一属性不是这样的话,那它可能是什么?
- ④依据上述对于各种可能性的分析提出新的问题;
- ⑤对所提出的新问题进行选择。

作为起步性的建议,笔者再提四条具体措施:



①推广引申. 若学习中对某一内容产生了特别的兴趣, 激活了某条知识链, 那可以考虑能否从特殊推到一般, 从离散推到连续, 从有限推到无限; 也可以考虑相反的命题, 考虑充分或必要条件, 考虑条件的减弱; 还可以考虑用于解决这个问题的方法能否处理更多的问题, 能否更简洁地统一许多问题等.

②转换移植. 因为数学各部分之间是有联系的, 一个数学对象(或关系)的表现形式可以是数式的, 也可以是图形的, 还可以是三角的、坐标的、向量的、复数的等. 当一个问题在某一形式下获得解决时, 其实也是另一形式下相应问题的解决, 把相关内容和相关方法作转换与移植, 立即就可以得出新的成果. 这时, 在新形式下又可以作推广引申, 产生更多的成果.

③综合. 每个数学知识都不是孤立的, 它必定是某条逻辑链上的一个环节, 同时又会许多知识链的交叉, 至于不同学科之间的沟通也是常见的. 这里说的综合, 一方面是新资料与旧成果的综合, 另一方面又是许多新资料在新观点或新逻辑关系上的综合.

④质疑. 这有两种作用, 一方面是通过质疑而找到疏漏与谬误, 另一方面是通过质疑找出多余回路, 领悟本质步骤, 从而获得新思路. 需知, 重新选择、重新组合也是一种创新.

(4)规范成文.

在课题确定之后, 可能要经历一段艰苦而漫长的解决过程, 这是数学思维开展最实质性活动的地方, 常常辅以资料的充实与交流, 当思考基本成熟之后, 可按下面的顺序组织成文.

①提纲. 应“先粗后细、先大后小”列出提纲, 提纲可在写作过程中修订, 但不能没有, 简化的情况下也得有腹稿.

②初稿. 这必须动笔写, 还要做到表达清楚、计算准确、推理严谨.

③修改. 可以立即修改, 也可以冷处理一段时间后再拿出来修改, 期间还可以与老师、同学讨论, 一方面防错堵漏, 另一方面充



实提高,通常在修改中会有新的发现.

④定稿.用方格纸规范抄写,或用电脑规范打印,至少包括三部分内容:标题,作者及单位,正文.标题要反映文章的主题,位置居中;作者及单位要准确清楚,写在标题的下一行;正文的段落、标点可参照教科书的格式或欲投报刊的式样书写.从目前的来稿看,书写不规范是一个通病,有的简直是一张草稿纸.

最后指出,本书是拙著《零距离数学交流·学法与解法(初中卷)》的姊妹篇,该书创作了学数学的有趣故事,解读了中学数学的主要思想方法;本书继续推动学生的数学写作,着力组织专家的评析点拨,这就形成了一条拾级登高的新迹线,即广西教育出版社为中学生铺设的课外阅读新通道,包括:学会学习—掌握数学思想方法—进行初步的探究—自始至终的专家指导.

谨以此书与中学生分享学数学的喜怒哀乐.

罗增儒

2003年3月于陕西师范大学



目 录

前 言	1
-----------	---

体验篇:交流·领悟·心动

一 解题体验经心动 春光数苑育新芽	2
(一)一个小猜想的证明	3
(二)反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的解题作用	5
(三)利用函数的单调性求值域	8
(四)定理简单威力大	10
(五)《一分为二巧求体积》的补充	14
(六)等分角的象限确定	17
(七)一个有用的结论	22
(八)一道课本例题解法的改进	25
(九)巧用共线来解题	29
(十)一类特殊数列的通项公式的求法	31
(十一)一个优美的结论及其应用	34
(十二)等差数列部分和最值的求法	37
(十三)一道极限题的求解	41
(十四)巧解复数题	44
(十五) $x^n = b (b \in \mathbb{C})$ 解的应用	46
二 解题方法知多少 热肠知心点睛评	48





(一)退一步 海阔天空	49
(二)利用对称性解题	52
(三)构造法巧解三角题	56
(四)用三元一次方程组求数列的通项公式	58
(五)构造二次函数有巧解	61
(六)添加“催化剂” 巧解三角题	63
(七)用构造法解题	67
(八)反向求解 思路自然	69
(九)逆向思维 巧解题一例	71
(十)联想在数学中的妙用	73
(十一)数形结合好	76
(十二)巧转换 化繁为简	79
(十三)不妨直接求解	82
(十四)转换角度 巧解不等式	85
(十五)运用函数与方程思想解最值型应用题	88
(十六)特例法解选择题	91
三 一题多解拓思路 路路环通启思维	95
(一)一题多解显神通	96
(二)一题多解寻最简	99
(三)一道最值题的多种解法	103
(四)多解方法巧 疏漏要严防	110

探究篇：反思·发现·行动

一 解题疏漏知难免 追根析辨见新天	115
(一)一道易错试题的剖析	116
(二)错解评析	120
(三)概念要准确	123





(四)注意定义域的“优先权”	126
(五)一题两解 谁对谁错	129
(六)辨析一个似是而非的解法	131
二 不迷信标准答案 敢写出自己文章	135
(一)一个高考题答案的质疑	136
(二)一道数学试题的完善	140
(三)一道高考解析几何题的参数解法	142
(四)数学解题也要讲究“翻译”	147
(五)一个不等式的三种证法	149
(六)一道竞赛题的纯几何解法	153
三 猜想呈数学感觉 探究显紫气灵光	155
(一)数码相乘的个位数规律	156
(二)正弦函数统一为幂函数的复合函数	158
(三)我的猜想、证明与再猜想	161
(四)争鸣小猜想 豪情话短长	163
(五)足球的阴影问题	171
(六)征解已有重大进展 证明还需继续努力	174
(七)喜看征解题的第一批成果	178
(八)凸 n 边形对角线分割规律探讨	187
(九)数学学习笔记两则	193
(十)维界猜想	198

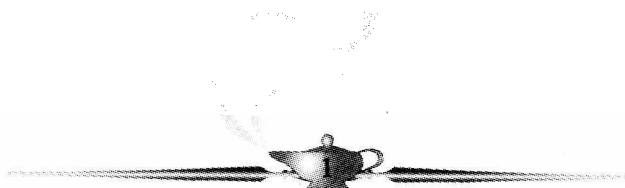




体验篇：交流·领悟·心动

这里的 35 篇文章谈到了同学们在数学解题中的种种体验，重点是关于基础知识、基本方法和广开思路方面的领悟。你可以从感兴趣的任一篇开始阅读，但不管你如何选择，你都是在与同龄人及知心老师同时开始数学交流。你不会一点想法都没有，你的想法也不要老锁在抽屉里，如果你曾经错过，这不是过错，后面的机会还多着。

知心老师期待着 you：开启思维的小船。





一 解题体验经心动 春光数苑育新芽

这是 15 篇关于谈解题经验的文章, 主要体现基本内容在解题中的作用. 数学解题就是解题者在数学思想方法指导下, 运用数学基础知识和基本技能, 分析、解决问题的过程. 其中基础知识是解题的物质基础, 解题基本功的深浅, 首先取决于知识的多寡、深浅和完善程度. 特别是完善程度, 课堂上线性输入的知识, 要按照自己的理解而加以组织, 形成网络结构.



(一) 一个小猜想的证明

云南思茅一中高三(130)班 李光春

辅导老师 赵纬明

《中学生学习报》第 687 期刊登了“用对数和取代对数积”(华老师信箱)一文,我读后深受启发,与班里的朱健明同学一起讨论,产生一个小猜想:

猜想 由“ $a, b \in \mathbf{R}^+$ 且 $a > b, m > 0$, 则 $\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$ ”联想到,若 $a > b > 1, m > 0$, 则 $\log_a b < \log_{a+m}(b+m)$ 能成立吗?

证明 令 $\lg \frac{b}{a} = \lg b - \lg a = t \Rightarrow \lg b = t + \lg a$,

$$\text{那么 } \log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{t + \lg a}{\lg a} = 1 + \frac{t}{\lg a}. \quad (1)$$

同理,设 $\lg \frac{b+m}{a+m} = N$, 则

$$\log_{a+m}(b+m) = 1 + \frac{N}{\lg(a+m)}. \quad (2)$$

由②-①得

$$\log_{a+m}(b+m) - \log_a b = \frac{N}{\lg(a+m)} - \frac{t}{\lg a}. \quad (3)$$

$$\therefore \lg \frac{b}{a} < \lg \frac{b+m}{a+m} < 0,$$

即 $t < N < 0$,

$$\therefore 0 < -N < -t. \quad (4)$$

$$\text{又 } \lg(a+m) > \lg a > 0, \quad (5)$$

$$\text{④} \times \text{⑤} \text{得}, 0 < (-N)\lg a < (-t)\lg(a+m).$$

$$\therefore \frac{-N}{\lg(a+m)} < \frac{-t}{\lg a},$$





$$\therefore \frac{N}{\lg(a+m)} > \frac{t}{\lg a},$$

$$\therefore \frac{N}{\lg(a+m)} - \frac{t}{\lg a} > 0,$$

代入③, 有 $\log_{a+m}(b+m) - \log_a b > 0$,

$$\therefore \log_{a+m}(b+m) > \log_a b.$$

由此可知, 小猜想是成立的.

● 知心点评

李光春同学读了《中学生学习报》的文章, 引起联想, 产生猜想, 这是一种积极、主动的学习态度; 对猜想能作出证明, 又体现出较强的解题能力. 可以说这整个过程是一个体现创新精神的过程.

当然, 这个结果不是新的, 证明也不够简练, 这正是学生写作的局限性. 哪一个奥运会径赛冠军在少儿学步时不是幼稚的呢? 下面我们给出两个较简洁的证明(图 1-1-1):

● 证明 1 由已知有

$$0 < \frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m} < 1,$$

$$\text{得 } \log_a \frac{b}{a} < \log_a \frac{b+m}{a+m} < \log_{a+m} \frac{b+m}{a+m},$$

两边加上 1, 得

$$\log_a b < \log_{a+m}(b+m).$$

● 证明 2 由已知有

$$0 < \frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m} < 1,$$

$$\text{即 } a^{\log_a \frac{b}{a}} < a^{\log_a \frac{b+m}{a+m}} = \frac{b+m}{a+m} = (a+m)^{\log_{a+m} \frac{b+m}{a+m}} < a^{\log_{a+m} \frac{b+m}{a+m}}$$

$$\text{从而 } \log_a \frac{b}{a} < \log_{a+m} \frac{b+m}{a+m}.$$

两边加上 1, 即得 $\log_a b < \log_{a+m}(b+m)$.

● 思考题 对 $x > 0$, 请比较 $\log_3(1 + \sqrt{x})$ 与 $\log_4 x$ 的大小.

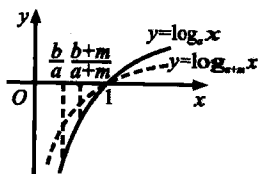


图 1-1-1



(二)反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的解题作用

浙江泰顺有才高中三·四班 黄可谈

在做函数练习时,我发现一种反比例函数在解答选择题、填空题时有很大的作用.

例1 下列命题中,写出你认为正确命题的所有序号_____.

①若 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数,如果它们的图像有交点,则交点必在直线 $y = x$ 上;

②若 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数,那么方程 $f(x) = 0$ 至少有一个根;

③如果函数 $f(x)$ 满足 $f(x-a) = f(a-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 对称;

④函数 $y = f(x-a)$ 与 $y = f(a-x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 对称.

分析 ①举反例 $y = \frac{1}{x}$, 其反函数就是其自身, 有无数个交点都不在直线 $y = x$ 上;

②举反例 $y = \frac{1}{x} = 0$ 无解;

③可求得 $f(x) = f(-x)$ 为偶函数, 其对称轴为 $x = 0$;

④是正确的.

在以后的做题中,我发现 $y = \frac{1}{x}$ 涉及反函数、单调函数. 凭做题的经验积累推出以下几个结论:

结论1 函数与其反函数的图像若有交点, 则它们的交点不一定全在直线 $y = x$ 上, 如 $y = \frac{1}{x}$ (也不一定在该直线上有交点, 如



$$y = -\frac{1}{x}).$$

结论 2 单调函数一定具有反函数, 但具有反函数的函数却不一定是单调函数, 如 $y = \frac{1}{x}$.

结论 3 若函数 $f(x)$ 有反函数, 则 $f(x) = 0$ 未必有解, 如 $f(x) = \frac{1}{x}$.

结论 4 存在既满足 $f[f^{-1}(x)] = x$ 又满足 $f^{-1}[f(x)] = x$ 的函数, 如 $f(x) = \frac{1}{x}$.

结论 5 存在自身互为反函数的函数, 如 $y = \frac{1}{x}$.

2. 知心点评

阅读这篇短文, 我们着重推荐两点.

1. 认识反例的作用

反例是指用来说明某个命题不成立的例子. 在数学中, 要证明一个命题成立, 须严格地论证所给的条件能逻辑地推导出结论; 而要证明一个命题错误, 十分简洁而又极具说服力的办法是举出反例. 反例的运用可以强化推理的严谨性, 培养思维的批判性, 发展逆向思维和发散思维, 全面提高解题能力. 在很多情况下, 找一个反例比给出一个证明更需要想像力和创造性.

2. 做学习积累的有心人

著名数学家华罗庚教授说过: 天才在于勤奋, 聪明在于积累. 黄可谈同学把日常解题活动中的一点一滴积累起来, 就获得了反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的 5 个结论, 成为一篇小论文. 厚积薄发, 这是一个很好的写作经验. 当然, 积累工作并非到此就可结束了, 比如:

(1) 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 上的点 $A_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 满足

