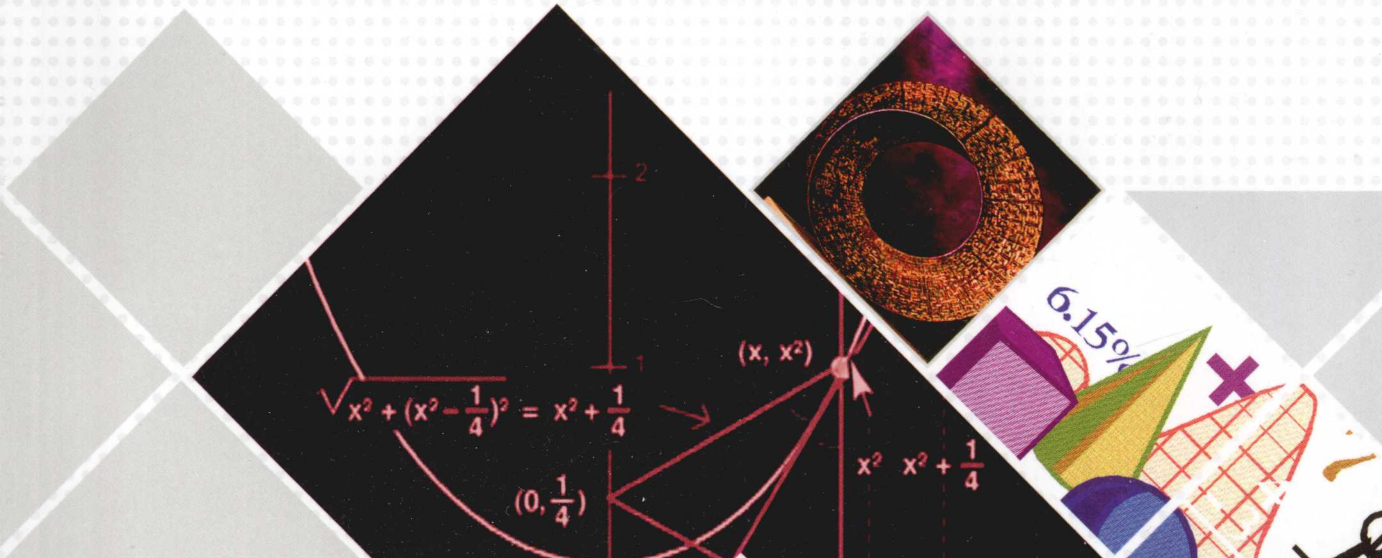
高等教育“十一五”规划教材

公共基础课教材系列

高等数学学习辅导（上册）

刘春凤 主编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

公共基础课教材系列

高等数学学习辅导

（上册）

刘春凤 主 编

纪 楠 阎少宏 马醒花 副主编

杨爱民 彭亚绵 米翠兰 参 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是《高等数学》（上、下册）（刘春凤主编，科学出版社，2008年）的配套学习指导教材。本书分上、下两册，上册内容为一元函数微积分和空间解析几何与向量代数（共七章），下册内容为多元函数微积分、级数和常微分方程（共五章）。书末附有《高等数学》考研大纲、Mathematica简介和自测题答案与提示。

本书结构严谨、逻辑清晰；强调方法阐述、力求通俗易懂、由浅入深、富于启发、宜于自学；其中适度嵌入了与“高等数学”相关的数学实验，旨在提高读者应用“高等数学”解决实际问题的能力。

本书可作为高等工科院校工学、经济学等各专业“高等数学”的辅导教材，也可作为相关教师、工程技术人员用书和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导（上册）/刘春凤主编. —北京：科学出版社，2009
（高等教育“十一五”规划教材·公共基础课教材系列）
ISBN 978-7-03-025501-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第158297号

责任编辑：沈力匀 张 斌/责任校对：赵 燕
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年9月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2009年9月第一次印刷 印张：32 1/2
印数：1—6 500 字数：783 000

定价：48.00元（上、下册）

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235（HP04）

前　　言

本书是《高等数学》(上、下册)(刘春凤主编，科学出版社，2008 年)的配套学习辅导书，是依据工科类、经济管理类各专业对《高等数学》课程的教学要求和考研大纲要求而编写的。

在主教材《高等数学》(上、下册)中，遵循教育部高等学校非数学类专业数学基础教学指导分委员会修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，体现新形势下教材改革的精神。

《高等数学》(上、下册)主教材期望在加强应用能力培养、提高综合分析能力和创新能力方面为学生奠定良好的数学基础。首先，教材传承高等数学的结构体系，将现代数学的观点、思想、符号、术语渗透其中，结构严谨、逻辑清晰、符合认知规律；其次，教材考虑普通工科院校学生对数学的需求，本着“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，对繁琐的理论推导进行了适度的约简，增加了大量的图形，对数学的理论和概念，尽可能地通过几何直观，解释其抽象和深刻的内涵，通俗易懂，宜教易学；再次，教材对数学概念和理论，加强了其产生背景和应用范围的介绍，注重引导学生品味数学源于现实、高于现实的境界，指引学生体会数学与现实中的客观现象密切的联系。例题的选择注意典型、适度、可拓展，阐述数学方法时，由浅入深，注重启发联想，引导探究，力求使读者融会贯通；最后，教材介绍了 Mathematica 软件在高等数学中的应用，适度嵌入了与高等数学密切相关的数学实验课题，让学生学习使用 Mathematica 软件进行各种运算、绘制图形和完成实验课题。该软件的强大功能和丰富有趣的内容使高等数学如虎添翼，一方面大大拓宽了高等数学的应用范围；另一方面，相对于传统教材，过去学生由于计算技术的局限只能“望洋兴叹”的问题，如今可以通过数学实验轻松解决，自然会激发学生用数学的兴趣。

本书密切配合主教材《高等数学》(上、下册)，内容充实，题型全面，每章首先给出知识网络图和知识卡片；继之进行典型例题的选讲、主教材习题详解；最后给出各章自测题和相关知识的数学实验。全书体现了主教材“科学、简约、应用、现代”的特点，特别注重培养学生分析问题、解决问题的能力。

本书刘春凤任主编，其中上册由纪楠、阎少宏、马醒花任副主编，下册由杨爱民、彭亚绵、米翠兰任副主编，刘春凤编写了第 1、2、9、12 章，杨爱民编写了第 6、11 章，阎少宏编写了第 5、8 章，纪楠编写了第 4、7 章，彭亚绵编写了 3、10 章，马醒花、米翠兰编写了 2～12 章的自测题，全书最后由主编和所有编者修改定稿。

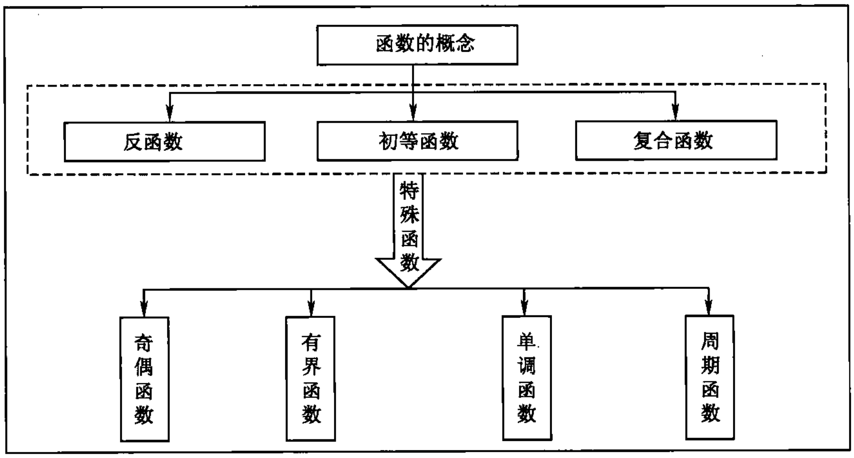
在编写过程中，得到了科学出版社的鼎力支持与帮助，得到了河北理工大学领导的关心与指导，特别是河北理工大学刘保相教授为本书的编写提出了很好的意见和建议，在此一并表示衷心的感谢。

由于水平有限，书中谬误之处恳请广大读者批评指正，以期不断完善。

目　　录

第 1 章　函　　数

1.1　知识网络图



1.2　知 识 卡 片

1. 常见的实数集与记号

自然数集　$N=\{0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$；

整数集　$Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots,\pm n,\ldots\}$；

有理数集　$Q=\{$有理数$\}$，其中：$Q_+=\{$正有理数$\}$，$Q_-=\{$负有理数$\}$；

无理数集　$W=\{$无理数$\}$；

实数集　$R=(-\infty,\infty)$，其中：$R_+=(0,\infty)$，$R_-=(-\infty,0)$；

二维平面

$R^2=(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)=\{(x,y)\mid x\in(-\infty,\infty),y\in(-\infty,\infty)\}$；

***n* 维空间** $R^n=R\times R\times\cdots\times R=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_k\in\mathbf{R},k=1,2,\cdots,n\}$；

***n* 维空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中两点距离**

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

2. 实数的绝对值

绝对值的定义　$|a|=\begin{cases}a & a\geqslant 0\\ -a & a<0\end{cases}$

绝对值的性质

(1) $|a|\geqslant 0$;　(2) $|a|=\sqrt{a^2}$;

(3) $|a|=|-a|$;　(4) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

绝对值的运算性质

(1) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$;　(2) $|a|-|b|\leqslant |a-b|$;

(3) $|ab|=|a||b|$;　(4) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\quad (|b|)\neq 0$;

(5) $|x|<\varepsilon\Leftrightarrow -\varepsilon<x<\varepsilon$, $|x-a|<\varepsilon\Leftrightarrow a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$;

(6) $|x|>\varepsilon\Leftrightarrow x<-\varepsilon$ 和 $x>\varepsilon$.

3. 邻域

直线上的点邻域　$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$;

去心邻域　$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$;

左邻域　$U^-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)$;

右邻域　$U^+(x_0,\delta)=(x_0,x_0+\delta)$;

空间的邻域

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z)\,\big|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}.$$

4. 充分必要条件

充分和必要条件　如果命题为"若 A 则 B ",那么称 A 为 B 的充分条件,B 为 A 的必要条件,记作 $A\Rightarrow B$.

充要条件　如果命题"若 A 则 B "与"若 B 则 A "同时成立,那么称 A 与 B 互为充分必要条件,简称充要条件,记作 $A\Leftrightarrow B$.

5. 常用三角公式

1)**两角和差公式**

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y;$$
$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y;$$
$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}.$$

2)**倍角公式**

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

3)**降幂公式**

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

4)**积化和差公式**

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)];$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)];$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)].$$

6. 极坐标

极坐标与直角坐标的互化(图 1.1)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqslant r < +\infty, 0 \leqslant \theta < 2\pi);$$

$$x^2 + y^2 = r^2; \qquad \begin{cases} \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

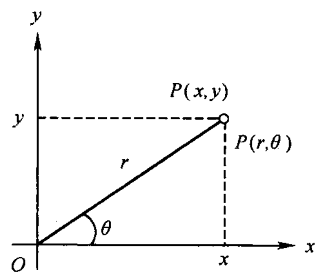


图 1.1

7. 奇(偶)函数

$$f(-x) = -f(x) \quad (\text{或 } f(-x) = f(x)).$$

8. 有界函数

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义,若 $\exists M > 0$,使得对 $\forall x \in I$,均有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**. 如果这样的数 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

9. 单调函数

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对任意两点 $x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)).$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(或**单调减少**).

10. 周期函数

$f(x \pm T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

11. 基本初等函数

下列五种函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数称为**基本初等函数**.

12. 复合函数

$y=f[\varphi(x)]$，x 为自变量，y 为因变量，$u=\varphi(x)$ 称为**中间变量**.

13. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成并能用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

1.3 习题详解

习　　题

1. 设 $f(x)=\arccos(\lg x)$，求 $f(10^{-1})$，$f(1)$，$f(10)$.

解　$f(10^{-1})=\arccos(\lg 10^{-1})=\arccos(-\lg 10)=\arccos(-1)=\pi$；

$f(1)=\arccos(\lg 1)=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$；

$f(10)=\arccos(\lg 10)=\arccos 1=0$.

2. 设 $f(x+1)=\dfrac{1}{x}$，求 $f(x)$.

解　$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}-\sqrt{x+3}$；

解　$4-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 2$ 且 $x+3\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -3$，
所以定义域为 $x\in[-3,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

解　$-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1\Rightarrow -2\leqslant x-1\leqslant 2\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 3$，

所以定义域为 $x\in[-1,3]$.

(3) $y=2^{\frac{1}{x}}$；

解　$x\neq 0$，所以定义域为 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(4) $y=\sqrt{5-x}-\arctan\dfrac{1}{2x}$;

解　$x\neq 0$ 且 $5-x\geqslant 0\Rightarrow x\leqslant 5$,
所以定义域为 $x\in(-\infty,0)\cup(0,5]$.

(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x(x-1)}$.

解　$x+2>0\Rightarrow x>-2$ 且 $x(x-1)\geqslant 0\Rightarrow x\leqslant 0$ 和 $x\geqslant 1$,
所以定义域为 $x\in(-2,0]\cup[1,+\infty)$.

4. 下列各题所给的两个函数是否相同,为什么?

(1) $f(x)=x,g(x)=\mathrm{e}^{\ln x}$;

解　两个函数不相同;
$\because f(x)=x,x\in\mathbf{R};g(x)=\mathrm{e}^{\ln x},x\in(0,+\infty)$;两个函数定义域不相同.

(2) $f(x)=\ln\sqrt{x},g(x)=\dfrac{1}{2}\ln x$;

解　两个函数相同;

$\because f(x)=\ln\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\ln x=g(x)$;且两个函数定义域相同,为 $x\in(0,+\infty)$.

(3) $f(x)=\arccos x,g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$;

解　两个函数相同;

$\because g(x)-f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x-\arccos x=0$;

且两个函数定义域相同,为 $x\in[-1,1]$.

(4) $f(x)=|x-1|,g(x)=\begin{cases}x-1, & x>1\\ 0, & x=1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$.

解　两个函数相同;
$\because g(x)-f(x)=0$;且两个函数定义域相同,为 $x\in\mathbf{R}$.

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$;

解　$f(-x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x})=f(x)$,偶函数.

(2) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$;

解　$f(-x)+f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}+\lg\dfrac{1-x}{1+x}=\lg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\cdot\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\lg 1=0$,奇函数.

(3) $g(x)=\dfrac{x}{a^{x}-1}$;

解 $f(-x)=\dfrac{-x}{a^{-x}-1}$，非奇非偶函数.

(4) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1\\ 1, & |x|\leqslant 1\\ x, & x>1\end{cases}$.

解 $f(-x)=\begin{cases}-(-x), & (-x)<-1\\ 1, & |-x|\leqslant 1\\ -x, & -x>1\end{cases}=\begin{cases}x, & x>1\\ 1, & |x|\leqslant 1\\ -x, & x<-1\end{cases}=f(x)$，偶函数.

6. 下列函数中哪些是周期函数？如果是周期函数，指出其周期.

(1) $y=\sin x^2$；

解 非周期函数.

(2) $y=\sin 2x+\cos\dfrac{x}{2}$；

解 周期函数，

$y=\sin 2(x+4\pi)+\cos\dfrac{(x+4\pi)}{2}=\sin(2x+8\pi)+\cos\left(\dfrac{x}{2}+2\pi\right)=\sin 2x+\cos\dfrac{x}{2}$

$T=4\pi$.

(3) $y=\begin{cases}E, & 2n\leqslant x\leqslant 2n+1\\ -E, & 2n+1<x<2n+2\end{cases}$.

解 周期函数，$T=2$.

7. 证明函数 $y=\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

证 设 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，则 $\ln x_2-\ln x_1=\ln\dfrac{x_2}{x_1}>\ln 1=0$，

即 $\ln x_2>\ln x_1$，所以 $y=\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

8. 求下列函数的反函数，并写出反函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

解 $y(1+x)=1-x\Rightarrow y+yx=1-x\Rightarrow x+yx=1-y\Rightarrow x=\dfrac{1-y}{1+y}$

即

$$y=\frac{1-x}{1+x},\quad x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty).$$

(2) $y=\sin x\left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\pi\right)$.

解 $y=\arcsin x(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

9. 某公共汽车运行路线全长 20 公里，票价规定如下：乘坐 4 公里以下者收费 1 元，乘坐 4～10 公里收费 2 元，10 公里以上收费 3 元，试建立票价与路程的函数关系.

解 设票价为 y，路程为 x，则

$$y=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<4\\ 2, & 4\leqslant x<10.\\ 3, & x\geqslant 10\end{cases}$$

10. 如果 $y=\sqrt{u},u=2+v^2,v=\cos x$，将 y 表成 x 的函数.

解 $y=\sqrt{2+(\cos x)^2},x\in\mathbf{R}$.

11. 如果 $f(x)=3x^2+2x,\varphi(t)=\lg(1+t)$,求 $f[\varphi(t)]$.

解 $f[\varphi(t)]=3(\lg(1+t))^2+2(\lg(1+t)),t\in(-1,+\infty)$.

12. 下列函数可以看成由哪些简单函数复合而成?

(1) $y=\sqrt{3x-1}$;

解 $y=\sqrt{u},u=3x-1$.

(2) $y=(1+\ln x)^5$.

解 $y=u^5,u=1+\ln x$.

(3) $y=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x^2}}$;

解 $y=\mathrm{e}^u,u=\mathrm{e}^v,v=-x^2$.

(4) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$;

解 $y=\sqrt{u},u=\ln\sqrt{x},v=\sqrt{x}$.

(5) $y=\lg^2\arccos x^3$.

解 $y=u^2,u=\lg v,v=\arccos t,t=x^3$.

13. 将函数 $y=5-|2x-1|$ 用分段函数表示,并绘出函数图形.

解 $y=\begin{cases}6-2x, & x\geqslant\dfrac{1}{2}\\ 4+2x, & x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$. 函数图形如图 1.2 所示.

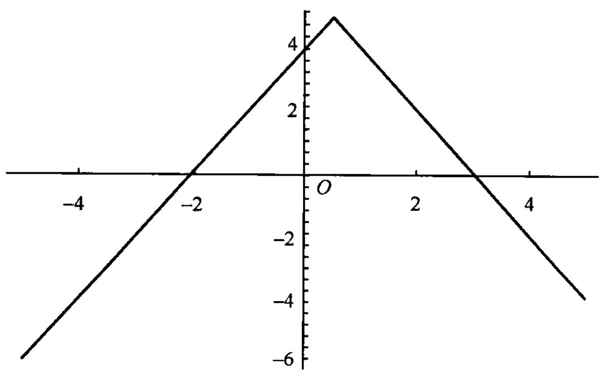


图 1.2

14. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求 $f[f(x)]$.

解 $f[f(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$.

15. 求下列函数的定义域.

(1) $y=1-\mathrm{e}^{1-x^2}$;

解 $x\in\mathbf{R}$.

(2) $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$;

解 $3-x>0\Rightarrow x<3$ 且 $|x|-1>0\Rightarrow|x|>1\Rightarrow x<-1$ 和 $x>1$,
所以定义域为 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,3)$.

(3) $y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$.

解 $-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1\Rightarrow-7\leqslant 2x-1\leqslant 7\Rightarrow-6\leqslant 2x\leqslant 8\Rightarrow-3\leqslant x\leqslant 4$

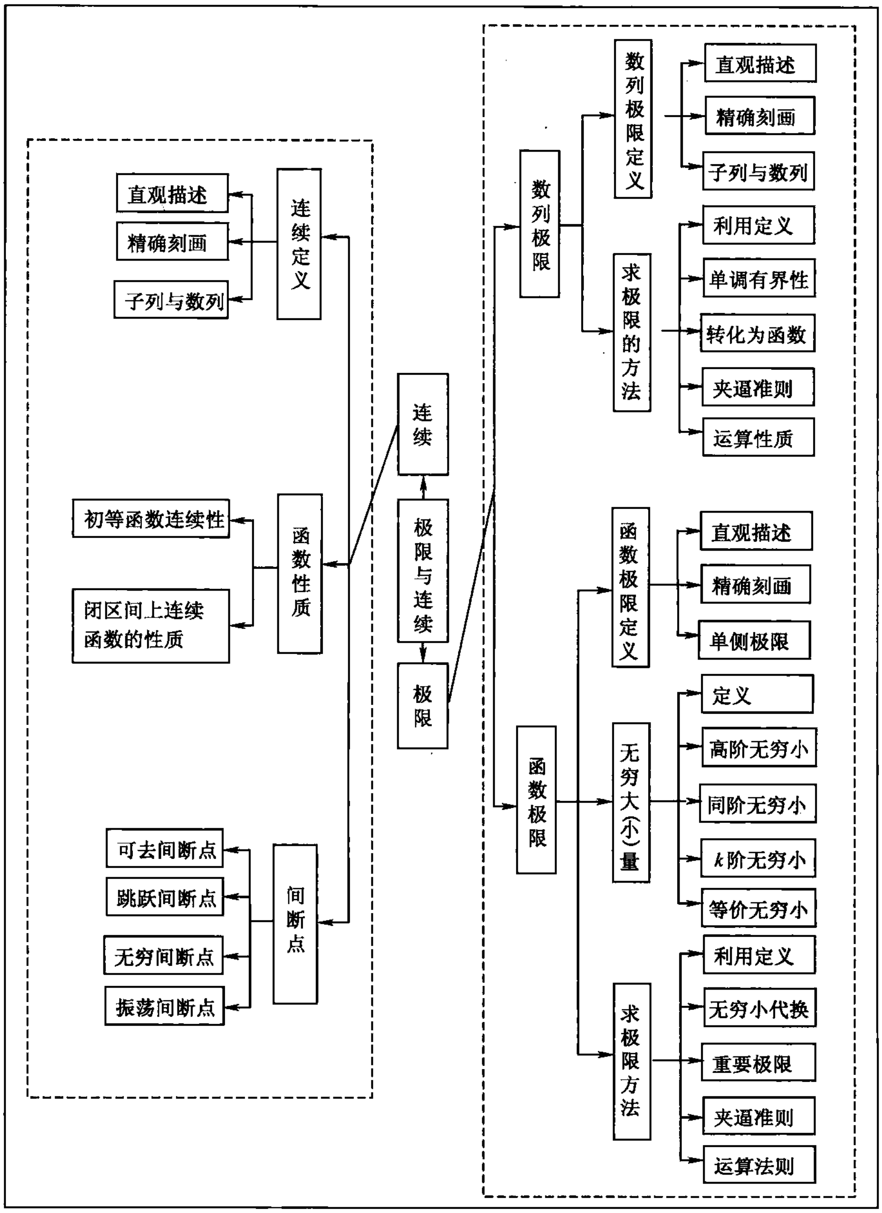
且

$$x^2-x-6>0\Rightarrow(x-3)(x+2)>0\Rightarrow x<-2 \text{ 和 } x>3,$$

所以定义域为 $x\in[-3,-2)\cup(3,4]$.

第 2 章　极限与连续

2.1　知识网络图



2.2 知识卡片

2.2.1 数列极限的定义与性质

定义:若对 $\forall \varepsilon > 0$,总 $\exists N > 0$,$\in$• 当 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n \to \infty)$.

性质:唯一性、有界性、局部保号性(保序性).

2.2.2 函数极限的定义与性质

自变量 x 趋于无穷大时极限的精确刻划($\varepsilon - X$ 语言):设函数 $y = f(x)$ 在 $|x| > N(N > 0)$ 时有定义,A 为常数,若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$,$\in$• 当 $|x| > X$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,则称当 $x \to \infty$ 时,$f(x)$ 以 A 为极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to \infty)$.

自变量趋于有限数时函数极限的精确刻划($\varepsilon - \delta$ 语言):$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,$\in$• $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 则称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$ 以 A 为极限。

性质:唯一性、有界性、局部保号性(保序性).

2.2.3 极限的存在准则

准则Ⅰ 两边夹定理

若(1)对于 $x \in \mathring{U}(x_0, r)$(或 $|x| > X$)的一切 x,有 $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} h(x) = A = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x)$,

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)$ 存在,且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = A$.

准则Ⅱ 单调有界数列必有极限

包含两方面含义:

(1) 单调增有上界的数列必有极限,即若 $\{x_n\}\uparrow$,且 $\exists M \in \mathbf{R}$,使得对 $\forall n$,有 $x_n \leqslant M$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} x_n$ 存在.

(2) 单调减有下界的数列必有极限,即若 $\{x_n\}\downarrow$,且 $\exists M \in \mathbf{R}$,使得对 $\forall n$,有 $x_n \geqslant M$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} x_n$ 存在.

2.2.4 重要极限

(1) $\lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{\sin\Delta}{\Delta} = 1$; (2) $\lim\limits_{\substack{v(x)\to 0 \\ u(x)\to\infty}} (1 + v(x))^{u(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{v(x)\to 0 \\ u(x)\to\infty}} u(x)v(x)}$.