高等院校财经类专业核心课程

新版

经济数学基础

(二)

线性代数

解题思路和方法

王新民　范培华　主编

世界图书出版公司

经济数学基础

（二）

线性代数

高等学校财经类专业核心课程辅导教材

新版

经济数学基础(二)

线性代数

解题思路与方法

王新民　范培华　编著

世界图书出版公司
北京 · 广州 · 上海 · 西安

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 解题思路和方法/王新民,范培华主编 .—北京:
世界图书出版公司北京公司,1998.2
(经济数学基础:2)
ISBN 7-5062-3665-6

Ⅰ.线… Ⅱ.①王… ②范… Ⅲ.线性代数-解题 Ⅳ.0151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 01681 号

经济数学(二)线性代数

主　　编:王新民　范培华
责任编辑:世　华
装帧设计:王元群

出　　版:世界图书出版公司北京公司
发　　行:世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　邮编 100010　电话 62619802)
销　　售:各地新华书店
印　　刷:河北香河新华印刷有限公司

开　　本:850×1168 毫米 1/32　**印张**:10.25
字　　数:280 千字
版　　次:1998 年 2 月第 1 版　2000 年 7 月第 2 版第 1 次印刷
印　　数:17001—22000

ISBN 7-5062-3665-6/F·48　**定价**:18.00 元

新版前言

《经济数学基础》分《微积分》、《线性代数》、《概率统计》三个分册，是国内出版较早，在全国高等院校中颇具有影响的教学辅导书.它一经问世即受到广大师生的关注和认可，并成为一些教师的教学参考书，成为某些高校学生学习《经济教学基础》课程的辅导教材.对于全国广大读者的肯定与厚爱，我们感到很大的欣慰，并表示衷心的感谢.

为适应教学改革深入发展的需要，新版对旧版作了修订和补充，除保持原版书的特点外，新版强调和注重了以下几方面:

(1)引导学生加强基本概念、基本理论和基本方法的正确理解和运用.

(2)强调培养学生的能力——抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

(3)在习题中，面对全章的内容，编排了选择题，这有助于内容的前后贯通与横向联系.

(4)本书除了满足本科生学好课程学习的需要外，还适当兼顾日后欲参加经济类硕士入学考试的学生的需要，把近几年来硕士入学考试试题中具有典型意义的考题选为例题或编排在习题中.对硕士入学考试的重点内容也做了介绍。

本册是新版《线性代数》分册，各章都有不同程度的变动，其中第二、三、五章变动最大，特别是在 n 维向量组的线性相关与否的

判别、由向量组线性表出的另一向量组的线性相关与否的判别、线性方程组解向量线性相关与否的判别、向量组的等价性的求证、向量组和矩阵的秩的计算，n 阶矩阵可逆性的判别和逆矩阵的求法、矩阵行列式的计算、可对角化矩阵的文字元素之值的确定、矩阵相似的判别、两相似矩阵文字参数的值的确定等方面都增加了新题型和新内容.

由于水平所限，时间紧迫，不足之处甚至错误恐难避免，诚恳希望读者批评指正，以便再版时完善和订正.

编　者

2000 年 7 月

前　　言

《经济数学基础》是高等学校财经类专业的核心课程之一，应广大读者学习该课程的需要，我们编写了本套书。

全书有以下特点：

(1)以大纲为准　书中每章前面均写有〈要求与说明〉，它摘自国家教委颁布的《经济数学基础》教学大纲，强调读者应以教学大纲要求为准进行学习；

(2)紧密结合教材　全书内容和章节编排都紧密结合教材，又比教材更加有条理、更加深入、更易于理解和掌握。在每节之前，不仅先概括主要概念、定理、公式等基本内容，而且还归纳出一些在理解概念与掌握方法时所需要的结论，正是这些结论往往在解题过程中能起到事半功倍的作用；

(3)例题精析　本书例题的选择广泛和有代表性，以充分达到教学大纲的要求。在例题中，既有一般教科书和习题集中的典型题目，也有选自全国高教自考、全国文凭考试、全国研究生统考和全国 MBA 联考中的试题，而且还有作者根据多年教学实践自己编写的大量有启发性和指导性的例题。这些例题构思新颖、方法灵活。不仅有一般的计算题、应用题和证明题，还有填空题和选择题等。为适应不同读者的需要，在例题的编排上，注意到了难易结合，既有基本题，也有一定难度的综合题。对于所选例题，以内容为准进行归类，不仅指出同类题的解题思路和程序，并且指出了在应用方法和运算过程中常犯的错误，读者可以举一反三，触类旁通；

(4)配有习题　在每章之后均配有习题供读者练习，在较系统地指导读者“怎样进行思考”之后，读者在这里可以进行基本训练，

以增强自己解决问题的能力，并检验自己对所学知识掌握的程度。

读者阅读此书，可以开阔眼界，增强分析问题、解决问题和参加应试的能力。全书可以作为财经类和管理类学生学习期间和研究生考前的学习辅导书，也可以作为授课教师的参考书。对于参加成人教育和自学考试的读者，也不失为一本有指导价值的读物。

经统一策划和集体讨论之后，全书分别由教学经验丰富的教师执笔，并由袁荫棠(中国人民大学)任主编，刘书田(北京工业大学)任付主编。全书由《微积分》、《线性代数》和《概率统计》三个分册组成，其中，《微积分》分册由葛振三(一至四章)和刘书田(五至十章)编写；《线性代数》分册由范培华(第一章)和王新民(二至六章)编写；《概率统计》分册由袁荫棠(一至三章)和范培华(四至七章)编写。

全书在成书过程中，得到了北京大学王其文、中国人民大学胡显佑、张学贞、中央财政金融大学单立波、北京工业大学赵惠斌、刘国忠、北京商学院侯文起、中央电视大学冯泰、厦门大学陈亚贞、上海财经大学朱幼文、中南财经大学袁勇行、东北财经大学龚兆仁、苏州大学程庆云、湖南财经学院苏醒、西安石油学院肖筱南等各位专家与教授的支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

书中如有不妥之处，恳请读者指正。

编　者

1997 年 6 月

目　　录

第一章　行列式……………………………………………………………(1)
§1.1　n 阶行列式 ……………………………………………………(1)
§1.2　行列式的性质 ……………………………………………………(6)
§1.3　行列式按行(列)展开…………………………………………(14)
§1.4　克莱姆法则……………………………………………………(36)
习题一 ………………………………………………………………(42)
第二章　线性方程组 ………………………………………………(54)
§2.1　线性方程组的解法…………………………………………(54)
§2.2　n 维向量……………………………………………………(62)
§2.3　向量组的秩和矩阵的秩……………………………………(75)
§2.4　线性方程组有解的判定与解的结构………………………(86)
习题二 ………………………………………………………………(98)
第三章　矩阵………………………………………………………(108)
§3.1　矩阵的运算 ……………………………………………………(108)
§3.2　几种特殊矩阵和初等矩阵 ……………………………………(119)
§3.3　分块矩阵 ………………………………………………………(124)
§3.4　可逆矩阵 ………………………………………………………(137)
习题三………………………………………………………………(157)
第四章　向量空间…………………………………………………(166)
§4.1　向量空间 ………………………………………………………(166)
§4.2　向量的内积 ……………………………………………………(180)
§4.3　正交矩阵 ………………………………………………………(185)
习题四………………………………………………………………(187)
第五章　矩阵的特征值和特征向量………………………………(192)
§5.1　矩阵的特征值和特征向量 ……………………………………(192)
§5.2　相似矩阵与矩阵的对角化 ……………………………………(205)
§5.3　实对称矩阵的对角化 …………………………………………(216)

§5.4 非负矩阵 …………………………………………………… (224)
习题五………………………………………………………………… (233)
第六章 二次型……………………………………………………… (240)
§6.1 二次型 ……………………………………………………… (240)
§6.2 二次型的标准形 …………………………………………… (248)
§6.3 正定二次型 ………………………………………………… (268)
习题六………………………………………………………………… (280)
习题答案与解法提示……………………………………………… (287)

第一章　行列式

要求与说明

1. 理解 n 阶行列式的定义及其性质.
2. 掌握用行列式的定义、性质和有关定理计算较简单的 n 阶行列式的方法.
3. 掌握克莱姆法则.

§1.1　n 阶行列式

一　基本概念

1. 排列

由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个 **n 级排列**.

例如,由自然数 $1,2\cdots,n$ 可组成的 n 级排列,其总数共有 $n!$ 个,因为排列的第一个数可在 $1,2,\cdots,n$ 中任取一个,共有 n 种取法,第二个数只能在余下的 $n-1$ 个数中再任取一个,共有 $n-1$ 种取法,依次类推,第 n 个数只有一种取法,故所有的排列为 $n(n-1)\cdot(n-2)\cdots2\cdot1=n!$.

2. 逆序与逆序数

在一个 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中,如果较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面,即 $i_t>i_s$,称这一对数 i_ti_s 构成一个**逆序**.

在一个排列中,逆序的总数称为它的**逆序数**,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如,在一个 4 级排列 4132 中,41,43,42,32 各构成一个逆序,所以逆序数为 4,即 $\tau(4132)=4$.

3. 奇排列与偶排列

如果排列的逆序数为奇数,则称它为**奇排列**.如果排列的逆序数为偶数,则称它为**偶排列**.

因为 $\tau(4132)=4$,所以排列 4132 是一个偶排列.

4. 对换

在一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，若将其中两个数 i_s 与 i_t 互换位置，其余各数位置保持不变，就得到另一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$，称这样的一个变换为**对换**，记为 $(i_s i_t)$.

二　n 阶行列式的定义

n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

是所有取自不同行、不同列的 n 个数的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和，其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 构成一个 n 级排列. 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列时，乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 前取正号. 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列时，则乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 前取负号. 即 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

n 阶行列式有时也简记为 $|a_{ij}|$. a_{ij} 称为 n 阶行列式的元素 $(i,j = 1,2,\cdots,n)$.

三　有关的定理与结论

1.【定理 1】　任意一个排列经过一次对换后，改变其奇偶性.

2.【定理 2】　n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 级排列.

因此，n 阶行列式又可以定义为

$$D = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

3. n 阶行列式共有 $n!$ 项，其中带正号的项与带负号的项各占一半.

4. 若一个行列式中有一行(列) 的元素全为零，则此行列式的值等于零.

四　几个特殊的行列式

1. 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

2. 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

3.

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & * & \iddots & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & \iddots & \\ & \iddots & * & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1}a_{n-1\,2}\cdots a_{1n}.$$

4. 设 A、B 分别是 m 阶和 n 阶方阵,则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A|\cdot|B| \qquad (**)$$

行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**.主对角线上的各元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots n)$ 称为主对角线元素.从右上角到左下角的对角线称为**次对角线**.

说明　本节要求掌握 n 阶行列式的定义及用定义计算简单的行列式,特

别是行列式中每一项前符号的确定，即逆序数的求法.

【例 1】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

分析 按行列式定义，每一项都是取自不同行不同列的 4 个元素的乘积，共有 4!项. 但此行列式中有很多零元素，因此有的项为零，故只需找出不含零元素的项. 不妨设各个字母表示的都是非零元素。于是在第 1 行中有两个非零元素 a_{11} 和 a_{12}，当第 1 行取 a_{11} 时，第 2 行只能取 a_{23}(a_{21} 与 a_{11} 同列，故不能取). 第 3 行只能取 a_{32}，第 4 行只有 a_{44}，即 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 是其中的一项. 另外，当第 1 行取 a_{12} 时，第 2 行可以取 a_{21} 或 a_{23}，但当第 2 行取 a_{23}，第 3 行只能取零元素，故第 2 行只可以取 a_{21}，第 3 行取 a_{33} 第 4 行取 a_{44}. 即另一非零项为 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$.

解 $D=(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}+(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$

$=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$.

【例 2】 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ & & \iddots & & \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 由前面所讲特殊类型行列式可直接得到

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

【例 3】 证明行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0.$$

证 由行列式定义知，它的每一项都是取自不同行不同列的 5 个元素的乘积. 在第 1 列中只有两个非零元素 a_{11} 和 a_{21}，当第 1 列取元素 a_{11} 时，第 2 列只能取 a_{22}，而第 3 列所能取的只有零元素，故这一项为零. 同理，当第 1 列取 a_{21}

时，这一项也为零. 行列式其他项也都含有零因子，所以 $D=0$.

【例 4】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1} & 0 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 此行列式按行看，每行只有一个非零元素. 按列看，每列也只有一个非零元素，这些元素又都处于不同行不同列. 所以它们的乘积构成行列式的一项，若按行的顺序排列，此项可表示为 $a_n a_{n-1} a_1 a_2 \cdots a_{n-2}$. 其逆序数为 $(n-1)+(n-2)$. 所以

$$D=(-1)^{(n-1)+(n-2)} a_n a_{n-1} a_1 \cdots a_{n-2}=-a_1 a_2 \cdots a_n.$$

【例 5】 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解 D 中不为零的项用一般形式表示为

$$a_{1n-1} a_{2n-2} \cdots a_{n-11} a_{nn}$$

逆序数 $\quad \tau(n-1, n-2, \cdots 1, n)=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

故 $\quad D=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$.

小结 以上例题都是用行列式定义进行计算的. 其特点是行列式中含有较多的零元素. 不含零因子的项只有少数几项. 关键是处理好每项前的符号，求出逆序数. 一般方法是按行序排好，计算列排列的逆序数. 当然，按列序排好，计算行的逆序数也一样. 对于一般的行列式，用定义计算几乎是不可能的. 因此，我们下面将介绍行列式的性质及利用行列式的性质计算行列式.

【例 6】 计算

$$\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$$,这里 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 是对所有的 n 级排列求和.

解 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}D$,而在所有的 n 级排列中,奇排列与偶排列各占一半,所以在和式中,带正号的 D 与带负号的 D 个数相等,因此所有行列式的和等于零.

§1.2 行列式的性质

一 行列式的性质

【性质 1】 将行列式的行、列互换,行列式的值不变.即设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D = D^{\mathrm{T}}$.行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**

上述性质说明,行列式的行和列地位是相同的.也就是说,对于“行”成立的性质,对于“列”也一定成立.

【性质 2】 行列式的两行(列)互换,行列式的值反号.

推论 若行列式有两行(列)完全相同,则行列式的值为零.

【性质3】 行列式一行(列)的公因子可以提出.即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论1 若行列式中有一行(列)的元素全为零,则此行列式的值为零.

推论2 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式的值为零.

【性质4】 若行列式中某一行(列)的所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的这一行(列)分别为对应的两个加数之一,其余的各行(列)与原来行列式的相应各行(列)相同.即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【性质5】 把行列式某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上,行列式的值不变.即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{s1}+ka_{i1} & a_{s2}+ka_{i2} & \cdots & a_{sn}+ka_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$