高等学校公修数学规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主编 朱石焕 许素梅

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

郑州大学出版社

高等学校公修数学规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主编　朱石焕　许素梅

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/朱石焕,许素梅主编.—郑州:郑州大学出版社,2009.1

ISBN 978-7-81106-910-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①朱…②许… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 196185 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052

出版人:邓世平　　发行部电话:0371-66966070

全国新华书店经销

河南龙华印务有限公司印制

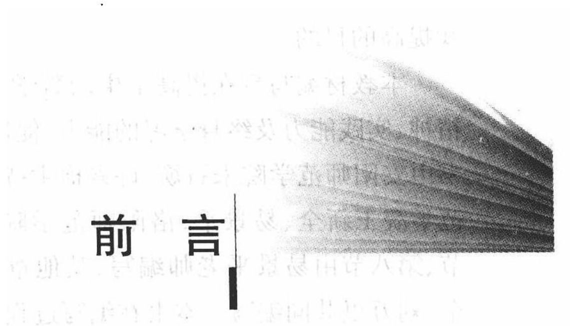
开本:710 mm×1 010 mm　　1/16

印张:12.25

字数:235 千字

版次:2009 年 1 月第 1 版　　印次:2009 年 1 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-81106-910-5　　定价:20.00 元



前 言

随着我国高等教育“大众化”阶段的到来，提高大学生的素质是大学培养目标的重要内容之一，而数学素质是大学生素质的一个重要方面。“一个国家只有它的数学蓬勃发展时，才能表现出它的国力强大”（拉普拉斯）。由于高校招生规模扩大，学生的结构和素质也有很大的变化，给高校教学带来了很大困难。为了贯彻落实教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会于 2004 年至 2005 年陆续公布的工科类、经济管理类、医药类数学基础课程教学基本要求，在学校有关领导的大力支持下，我院自 2004 年以来，大力开展数学教学改革，采取了分层教学等措施，取得了一系列教学成果，其中配套教材的改革也取得了丰硕成果。本套教材共包括线性代数、高等数学、微积分、概率论与数理统计四册，计划从 2008 年陆续出版。期望通过本套教材的编写与研究，进一步推动我院精品课程建设。

本套教材的最大特点是分层设计，适合不同院系、不同专业学生使用，教师可结合本校实际选讲；其次是适合学生自学，教材内容深入浅出，可满足不同层次学生的知识需求；第三，以学生为本，即重教，又重学，在学生学懂与学会之间加大训练力度。

本册《线性代数》主要包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型等内容。书中带“ * ”号部分，可供教师选讲与学生选学，各章节选配了适量习题。本教材既考虑现代化教学手段的使用，增加教学信息量，提高教学效率，增强教学效果，又体现以学生为本的教育理念，贯彻科学发展观，以期全方面

提升学生的综合素质和创新能力，真正达到提高学生自我教育、自我提高的目的。

本教材编写旨在提高学生的数学科学知识，培养学生的创新精神、实践能力及终身学习的能力，促进学生素质的全面发展。本书由安阳师范学院朱石焕、许素梅主持编写，参加编写的有安阳师范学院王新全、易景平，洛阳师范学院刘万里，其中第三章第七节、第八节由易景平老师编写，其他章节由朱石焕、许素梅、王新全、刘万里共同编写。本书在编写过程中，得到了安阳师范学院各级领导的大力支持，提出了不少建设性建议，在此一并表示感谢。由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，希望广大教师和学生在使用过程中继续提出修改意见。

编　者

2008 年 10 月

目录

第一章 行列式

行列式是研究线性方程组的一个重要工具,而线性方程组又是线性代数的一个重要部分. 如今,行列式在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用,是常用的一种计算工具,特别是在本门课程中,利用它可研究线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性.

第一节 排列与逆序

为了给出 n 阶行列式的概念,我们首先引入排列与逆序.

定义 1.1 由 n 个数码 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个没有重复数码的有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$,称为一个 n 级排列.

例如,321 和 213 都是三级排列,2314 是一个四级排列.

这里的排列就是中学代数里所说的 n 个不同元素的全排列,因此由数码 $1,2,3,\cdots,n$ 所组成的所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个. 例如,由数码 1、2、3 所组成的所有不同的三级排列共有 $3!=6$ 个. 它们是:123、132、213、231、312、321. 在以上所有的三级排列中,除排列 123 是按从小到大顺序排列(称此排列为自然排列)以外,其余的排列中,都有较大的数码排在较小的数码前面.

定义 1.2 在一个排列中,如果大数排在小数的前面,则称这对数构成一个逆序;排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 如果

一个排列的逆序数为奇数叫做奇排列，逆序数为偶数则叫做偶排列．规定逆序数为零的排列为偶排列．

给了任意的一个排列，我们可以按照以下方法来计算它的逆序数：首先看有多少数码排在最小数 1 的前面，设为 m_1 个，那么就有 m_1 个数码与 1 构成逆序；然后划去 1，此时最小数是 2，再看有多少数码排在最小数 2 的前面，设为 m_2，则有 m_2 个数码与 2 构成逆序；如此进行下去，最后设 n 前面有 m_n（显然 $m_n=0$）个数码，则这个排列的逆序数是 $m_1+m_2+\cdots+m_n$．

例 1 $\tau(561243)=2+2+3+2+0=9$．

例 2 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数．

解 $\tau(n(n-1)\cdots321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$．

定义 1.3 把一个排列中某两个数码 i、j 的位置互换，而其余的数码不动，得到另一个排列，这一变换称为一个对换，记为 (i,j)．相邻两个数码的对换称为相邻对换．

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性．

证明 首先讨论相邻对换的情形，即排列

$$\cdots jk\cdots \tag{1.1}$$

经过对换 (j,k) 变成

$$\cdots kj\cdots \tag{1.2}$$

显然，j、k 以外的数码彼此间的逆序状况在排列(1.1)和(1.2)中是一样的，j、k 以外的数码与 j（或 k）的逆序状况在排列(1.1)和(1.2)中也是一样的．如果 j 与 k 在排列(1.1)中构成逆序，则它们在排列(1.2)中是顺序，这时(1.2)的逆序数比(1.1)的逆序数少 1；如果 j 与 k 在排列(1.1)中是顺序，则它们在(1.2)中构成逆序，这时(1.2)的逆序数比(1.1)的逆序数多 1．总之，排列(1.1)与(1.2)的逆序数相差 1 个，所以排列(1.1)与(1.2)的奇偶性相反．这就证明了相邻对换改变排列的奇偶性．

下面讨论一般的情况，设排列为

$$\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots \tag{1.3}$$

经过对换 (j,k)，变成

$$\cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots \tag{1.4}$$

不难看出，排列(1.3)变成排列(1.4)可以通过一系列相邻对换来实现．先从排列(1.3)出发，把 k 与 i_s 对换，再与 i_{s-1} 对换…，也就是说，把 k 一位一位地向前移，经过 $s+1$ 次相邻对换，排列(1.3)变成

$$\cdots kji_1i_2\cdots i_s\cdots \tag{1.5}$$

从排列(1.5)出发,再将 j 一位一位地向后移,经 s 次相邻对换,排列(1.5)就变成了排列(1.4). 于是,总共经过 $2s+1$ 次相邻对换,就把排列(1.3)变成了排列(1.4). 由于一次相邻对换会改变排列的奇偶性,因此 $2s+1$ 次相邻对换会改变排列的奇偶性. 所以排列(1.3)与(1.4)奇偶性相反. 这就证明了对换改变排列的奇偶性.

推论 奇数次对换改变排列的奇偶性,偶数次对换不改变排列的奇偶性.

定理 1.2 $n(n>1)$级排列中奇、偶排列各占一半,均为$\frac{n!}{2}$个.

证明 假设在 n 级排列中共有 s 个奇排列,t 个偶排列,则 $s+t=n!$. 将 s 个奇排列中的前两个数码对换,得到 s 个偶排列,因此 $s\leqslant t$. 同样可证 $t\leqslant s$,故 $s=t$,即奇、偶排列的总数相等,各占$\frac{n!}{2}$个.

定理 1.3 任意一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 与自然序排列 $123\cdots n$ 都可经过一系列对换互换,并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

证明 我们对排列的级数 n 用数学归纳法,证明任意 n 级排列经一系列的对换可以化为自然排列.

$n=1$ 时,由于 1 级排列只有一个,结论显然成立.

假设结论对 $n-1$ 级排列已经成立,看 n 级排列的情况.

对于 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$,如果 $j_n=n$,则 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 是 $n-1$ 级排列,由归纳假设,$n-1$级排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 可以经一系列对换变成 $123\cdots(n-1)$,于是这一系列的对换也就把 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成了 $123\cdots n$. 如果 $j_n\neq n$,那么对 $j_1j_2\cdots j_n$ 作对换(j_n,n),它就变成了 $j_1'j_2'\cdots j_{n-1}'n$,这就归结为上面的情况,因此结论成立.

相仿地,$123\cdots n$ 也可以经一系列对换变成 $j_1j_2\cdots j_n$.

由于 $12\cdots n$ 是偶排列,由定理 1.1 的推论知,所作对换的个数与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 有相同的奇偶性.

第二节 二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{aligned}\right\}. \tag{1.6}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可用消元法求得解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.7}$$

式(1.7)中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得，其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1.6)的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组(1.6)中的位置，排成二行二列(横排为行，竖排为列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.8}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.8)所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1.9)的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义可用对角线法则来记忆. 把 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差.

利用二阶行列式的概念，式(1.7)中 x_1、x_2 的分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\qquad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么式(1.7)可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意：这里的分母 D 是由方程组(1.6)的系数所确定的二阶行列式，称为系数行列式；x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 分别替换 D 中 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式；x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 分别替换 D 中 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1 求解二元线性方程组 $\begin{cases}3x_1-2x_2=12,\\ 2x_1+x_2=1.\end{cases}$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}12 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 12\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

二、三阶行列式

定义 1.4 设有 9 个数排成三行三列的数表：

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\tag{1.10}$$

记

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

称为数表(1.10)所确定的三阶行列式.

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{vmatrix}=1\cdot0\cdot5+3\cdot3\cdot2+2\cdot(-1)\cdot1-1\cdot3\cdot1-3\cdot(-1)\cdot5-2\cdot0\cdot2=28.$$

例 3 求解方程 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=0.$

解 方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned}D&=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12\\ &=x^2-5x+6.\end{aligned}$$

由 $x^2-5x+6=0$ 解得 $x=2$ 或 $x=3$.

第三节　n 阶行列式的定义

观察三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

易见:

(1)三阶行列式共有 $6=3!$ 项;

(2)每项都取自不同行不同列的三个元素的乘积;

(3)每项的符号是,当该项元素的行标按自然顺序排列后,若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.

故三阶行列式可定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 为对所有三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

定义 1.4　由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{1j_2}\cdots a_{nj_n},$$

称为 n 阶行列式,它表示数值

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},\quad \tau=\tau(j_1j_1\cdots j_n),$$

其中,求和式中共有 $n!$ 项.

一阶行列式 $|a|$ 就是 a.

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$.

由定理 1.2 可知:n 阶行列式共有 $n!$ 项,且冠以正号的项和冠以负号的项(不算元素本身所带的负号)各占一半.

例 1 计算 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 D_1 中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$不显含 0,且列标构成排列的逆序数为

$$\tau(12\cdots n)=0.$$

故 $$D_1=(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

D_2 中只有一项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$不显含 0,且列标构成排列的逆序数为

$$\tau(n\cdots 21)=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

故 $$D_2=(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

结论:

(1)以主对角线为分界线的上(下)三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

(2)以副对角线为分界线的上(下)三角行列式的值等于副对角线上元素的乘积,并冠以符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

特例:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

由于数的乘法满足交换律,所以行列式的一般项中各元素的位置可以任意交换,于是可以证明以下结论。

定理 1.4 n 阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 及 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列.(证略)

推论 n 阶行列式的展开式又可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

该式称为行列式按列自然排列的展开式.

第四节 行列式的性质

利用行列式的定义计算较高阶的行列式,计算量是相当大的,因此为了简化行列式的计算,有必要研究行列式的性质.

性质1(转置变换) 行列式的行列互换,行列式的值不变,即:

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\tag{1.11}$$

则 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证明 令 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=D,\quad \tau=\tau(p_1p_2\cdots p_n).$$

我们称 D^{T} 为 D 的转置行列式. 性质1可以简述为行列式等于它的转置行列式. 同时也说明,在行列式中行与列的地位是对称的,因此凡是对行成立的结论对列也成立,反之,对列成立的结论对行也成立. 下面我们所谈的行列式的性质大多是对行来说的,对于列也有相同的性质,以下不再赘述.

性质2(倍法变换) 行列式某一行(列)元素的公因子可提到行列式符号之外,即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明

$$\text{左端}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$= 右端.$

推论 若行列式中某一行(列)的元素全为零,则行列式的值为零.

性质3(分行变换) 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则行列式可按此行(列)拆成两个行列式之和,即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明

$$\begin{aligned} 左端 &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= 右端. \end{aligned}$$

性质3表明,当某一行(列)的元素为两数之和时,行列式关于该行(列)可分解为两个行列式.若 n 阶行列式的每个元素都表示成两数和,则它可分解成 2^n 个行列式.例如二阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.$$

性质4 若行列式中有两行(列)相同,则行列式为零.

所谓两行(列)相同指的是两行(列)对应元素都相等.

证明 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n} \tag{1.12}$$

中第 i 行与第 k 行相同,即 $a_{ij}=a_{kj}, j=1,2,\cdots,n$. 为了证明行列式(1.12)为零,只需证明行列式(1.12)右端出现的项全能两两相消即可.事实上,与项

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n} \tag{1.13}$$

同时出现的项还有

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.14}$$

比较这两项,由 $a_{ij_i}=a_{kj_i}$,$a_{ij_k}=a_{kj_k}$,故这两项具有相同的数值,但排列

$$j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n \quad 与 \quad j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n$$

相差一个对换,因此具有相反的奇偶性,所以这两项的符号相反,故(1.13)+(1.14)=0. 易知(1.12)中的项全能两两相消,故行列式为零.

性质5 若行列式中两行(列)成比例,则行列式为零.(证明留给同学们)

性质6(消法变换) 把行列式的某一行(列)的倍数加到另一行(列)上,行列式不变.(证明留给同学们)

性质7(换法变换) 对换行列式中两行(列)的位置,行列式反号.

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_i+r_k]{\text{性质6}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_k-r_i]{\text{性质6}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_i+r_k]{\text{性质6}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$