"十一五"规划教材
教育部高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目
西安交通大学对口支援新疆大学系列教材项目

# 高等数学

## （上册）


主编　王大猛　李治明
编者　万传良　阿力木·艾海提
夏米西努尔·阿不都热合曼
茹先·阿合买提



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

"十一五"规划教材

教育部高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目

西安交通大学对口支援新疆大学系列教材项目

# 高等数学

## （上册）


主编　王大猛　李治明

编者　万传良　阿力木·艾海提

夏米西努尔·阿不都热合曼

茹先·阿合买提



西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

## 内容简介

本书是教育部“高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目”的研究与改革成果，也是西安交通大学对口支援新疆大学系列教材项目之一。本书依据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合作者多年的教学经验，以提高民族学生数学素养、培养和提高学生应用数学方法解决问题的能力为目的编写而成。全书分为上下两册出版，上册内容包括函数、极限和连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程四章。书中每一节的习题分为 A、B 两组，A 组为基本题，B 组题虽然适当提高了难度，但也不含技巧性过高的题目，便于学生根据自己的程度选择使用；另外，每章后附有少量综合练习题，以便使学生得到综合运用所学知识的训练。

本书主要适合于民族地区理工科非数学类各专业的学生使用，也可作为其他院校非数学类各专业的教材和参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学. 上册/王大猛等主编. —西安：西安交通大学出版社，2009. 9

ISBN 978-7-5605-3175-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. 王… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 150504 号

| | |
|---|---|
| **书　　名** | 高等数学(上册) |
| **主　　编** | 王大猛　李治明 |
| **责任编辑** | 任振国 |
| **出版发行** | 西安交通大学出版社<br>(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049) |
| **网　　址** | http://www.xjtupress.com |
| **电　　话** | (029)82668357　82667874(发行中心)<br>(029)82668315　82669096(总编办) |
| **传　　真** | (029)82668280 |
| **印　　刷** | 西安东江印务有限公司 |
| **开　　本** | 727mm×960mm　1/16　**印张** 17.375　**字数** 319 千字 |
| **版次印次** | 2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷 |
| **书　　号** | ISBN 978-7-5605-3175-5/O・302 |
| **定　　价** | 26.00 元 |

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

# 前　言

高等数学是高等学校的一门重要基础课，它不仅是许多后续课程的基础，而且在现代科学技术和经济建设中的作用越来越重要。在当代大学生的知识能力结构中，数学知识与应用数学解决问题的能力已经成为不可缺少的部分。高等数学这门课程的思想和方法，是人类文明发展史上理性智慧的产物，它不仅提供了解决实际问题的有力数学工具，同时还给学生提供一种思维的训练，帮助学生提高作为复合型、创造型、应用型人才所必需的科学文化素质和修养。

在我国高等教育进入"大众化教育阶段"以后，高等教育在具体培养目标和教学要求等方面呈现出多元化、多层次的新情况。因此，如何根据不同层次高等院校的不同要求，编写出不同层次和要求的教材，是摆在广大教师面前的一项急待完成的重要任务。本教材定位是给民族学生编写的一本要求较低的高等数学教材。由于种种历史原因，从整体上来说，民族学生进入大学时数学知识的起点相对要低一些，而目前流行的本科教材，经过我们多年的使用和比较，都不是很适合民族学生使用。所以，我们根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会新修订的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，结合编者们多年的教学经验，编写了这本希望能更适合民族学生使用的教材。

本教材以提高民族学生数学素养为目的，着力培养和提高学生应用数学方法解决问题的能力。在内容的选取上，既注重微积分的传统知识内容，又渗透了一些现代数学观点。在叙述上，力求简明扼要、清楚易懂，贴近教学实际，便于教师教和学生学，删去了一些比较繁琐和枝节的内容，而对一些学生理解起来有一定困难的概念和定理，则不惜笔墨加以解释，如教材中详细比较了函数两种定义的异同等。我们还注重从几何直观对概念和定理加以解释说明，便于学生对相关概念和定理的理解和掌握，如从几何直观上讲解函数连续的概念等等。

本教材分为上下两册共九章，上册包括函数、极限和连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程等四章；下册包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数等五章。本书在习题配备中删去了一些技巧要求偏高的题目，把习题分为 A、B 两组，A 组为基本题，B 组题虽适当提高了难度，但也不含技巧性过高的题目，便于学生根据自己的程度选择使用。另外，每章后还附有少量的综合练习题，以便使学生得到综合运用所学知识的训练。

本书的第 1 章、第 7 章、第 8 章、第 9 章由王大猛编写，第 2 章、第 3 章、第 4 章由李治明编写，第 5 章、第 6 章由万传良编写。本书的作者还有阿力木·艾海提，夏米西努尔·阿不都热合曼，茹先·阿合买提，他们对搜集资料、编选习题、制图排版都做了许多工作。本书由王大猛、李治明对全书进行统稿。

在这里我们要特别感谢西安交通大学的马知恩教授和王绵森教授，他们多次来我校具体指导工作，传授先进的教育思想和理念，对我们的帮助和启发很大。王绵森教授对全部书稿作了认真审阅，提出了许多有价值的、建设性的意见，再次表示衷心感谢！我们还要感谢西安交通大学出版社的郭建忠副社长和任振国主任，在他们的具体帮助下，本书才能较快地出版。

由于编写者水平有限，书中难免有错漏和不妥之处，敬祈专家、读者予以指正。

编　者

2009 年 5 月

# 目　录

# 第 1 章　函数、极限、连续

高等数学是研究微积分及其应用的学科。极限方法是研究微积分的基本方法，连续是极限方法的直接应用，连续函数也是我们研究的主要对象。

本章将对微积分的研究作知识基础上的准备。

## 1.1　函　数

### 1.1.1　预备知识

**1. 常用集合的符号**

本书所说的数都是实数，全体实数的总体称为实数集，记做 $\mathbf{R}$。我们知道，若把数轴上的点对应到它的坐标，则数轴上的点就与实数集建立了一一对应。为方便起见，以后实数与数轴上的点的称呼不加区别。例如，数 $x$ 有时说点 $x$，反过来也一样。

本书所说的数集都是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集，实数集 $\mathbf{R}$ 有下列重要子集：自然数集、正整数集、整数集、有理数集、正实数集等，它们分别用符号 $\mathbf{N}$、$\mathbf{N}^+$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}^+$ 表示。

没有元素的集合称为空集，记做 $\varnothing$，例如集合 $\{x \mid x^2+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$ 就是空集。

**2. 区　间**

各种区间的符号、名称、定义如表 1.1 所列，其中 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，符号"$+\infty$"与"$-\infty$"分别读作"正无穷"与"负无穷"。

有限区间与无限区间统称区间，区间常用 $I$ 表示。

**3. 邻域、内点**

对任意的正实数 $\delta$，开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 称为**点 $a$ 的 $\delta$ 邻域**，简称为**点 $a$ 的邻域**，记为 $U(a,\ \delta)$ 或简记为 $U(a)$。数集 $U(a,\delta)-\{a\}$ 称为**点 $a$ 的去心 $\delta$ 邻域**，记为 $U(a,\ \delta)$ 或简记为 $U(a)$。

设 $I$ 为区间，$x\in I$，若存在邻域 $U(x,\ \delta)\subset I$，则称 $x$ 为 $I$ 的**内点**，显然开区间与无穷开区间都是由其内点组成的。

**4. 逻辑符号**

符号"$\forall$"表示"对任意给定"的意思。如"对任意一个实数 $x$"可记作"$\forall x \in \mathbf{R}$"。这里的实数 $x$ 有任意性与给定性两层意思,任意性是指它可以代表实数集 $\mathbf{R}$ 中任意一个数,给定性是指 $x$ 一旦从 $\mathbf{R}$ 中取出后,它在数轴上的位置就确定了,它就是一个具体的、固定的数。

**表 1.1 各种区间的定义**

| 符号 | 名称 | 定义 | 类型 |
| --- | --- | --- | --- |
| $(a, b)$ | 开区间 | $\{x \mid a<x<b\}$ | 有限区间 |
| $[a, b]$ | 闭区间 | $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ | 有限区间 |
| $(a, b]$ | 半开区间(或半闭区间) | $\{x \mid a<x\leqslant b\}$ | 有限区间 |
| $[a, b)$ | 半开区间(或半闭区间) | $\{x \mid a\leqslant x<b\}$ | 有限区间 |
| $(a, +\infty)$ | 无穷开区间 | $\{x \mid x>a\}$ | 无限区间 |
| $(-\infty, a)$ | 无穷开区间 | $\{x \mid x<a\}$ | 无限区间 |
| $(-\infty, +\infty)$ | 无穷开区间 | $\{x \mid x\in \mathbf{R}\}$ | 无限区间 |
| $[a, +\infty)$ | 无穷半开区间 | $\{x \mid x\geqslant a\}$ | 无限区间 |
| $(-\infty, a]$ | 无穷半开区间 | $\{x \mid x\leqslant a\}$ | 无限区间 |

符号"$\exists$"表示"存在"的意思。例如,"$\forall a\in \mathbf{R}$, $\exists n\in \mathbf{N}^+$,使得 $n\geqslant a$"。

符号"$\triangleq$"表示"定义"的意思。例如数 $x$ 的绝对值为

$$|x| \triangleq \begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

其含义是:符号"$\triangleq$"的左端表示 $x$ 的绝对值的记号,其右端表示 $x$ 的绝对值的含义。

符号"$\Rightarrow$"表示"蕴涵"或"推得",例如,设 $A$、$B$ 是两个命题,"$A\Rightarrow B$"是指,若命题 $A$ 成立,则命题 $B$ 成立,或命题 $A$ 蕴涵命题 $B$。这时称 $A$ 是 $B$ 的充分条件,同时也称 $B$ 是 $A$ 的必要条件。

符号"$\Leftrightarrow$"表示"充分必要"或"等价"。"$A\Leftrightarrow B$"表示命题 $A$ 与命题 $B$ 等价,或命题 $A$ 蕴涵命题 $B$,同时命题 $B$ 也蕴涵命题 $A$,即"$A\Rightarrow B$"与"$B\Rightarrow A$"同时成立。例如,设 $a$, $b\in \mathbf{R}$,则 $a^2+b^2=0$ 的充分必要(简称充要)条件是 $a=0$ 且 $b=0$,可记为 $a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$。

### 1.1.2　函数的概念

**1. 变 量**

研究事物的变化、运动，要求在数学中引入变量的概念。变量，顾名思义，就是变化着的量，即允许或可以取不同数值的量。关于变量的一般说法是："如果符号 $x$ 能表示对象集合 $E$ 中的任意元素，那么就称 $x$ 为变量，称 $E$ 为 $x$ 的变化范围或变化域。"其中，$x$、$E$ 也可换为其他字母。

在本书中，变化域中的元素均为实数。

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变化，而是相互联系并遵循着一定的变化规律。例如，圆的面积 $A$ 与它的半径 $r$ 之间的相依关系由公式 $A=\pi r^2$ 给定。当半径 $r$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式可以确定圆面积 $A$ 的相应数值。

又如，设自由落体运动中物体下落的时间为 $t$，下落的距离为 $s$，开始下落的时刻为 $t=0$，那么，$s$ 与 $t$ 之间的相依关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 给定。假定物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 $t$ 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时，由上式就可以确定该时刻 $t$ 物体下落的距离 $s$ 的相应数值。

**2. 函数的定义**

如上所述，事物之间的互相制约与联系，使得变量与变量之间呈现出某种相互依赖关系。变量之间的相依关系就是函数概念的实质。通常有以下两种给出函数定义的方式。

**定义 1.1：（关于函数的传统定义）　设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，如果当变量 $x$ 在其变化范围 $D$ 内任意取定一个数值时，变量 $y$ 按照一定的法则 $f$ 总有唯一确定的数值和它对应，则称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数，记为 $y=f(x)$，数集 $D$ 叫做这个函数的定义域，$x$ 叫做自变量，$y$ 叫做因变量。**

**当 $x$ 取数值 $x_0\in D$ 时，与 $x_0$ 对应的 $y$ 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的函数值，记作 $f(x_0)$。当 $x$ 取遍 $D$ 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$ 称为该函数的值域。**

**定义 1.2：（利用映射给出函数的定义）　设 $X$ 和 $Y$ 是两个非空集合，如果存在一个法则 $f$，使得对于 $X$ 中每个元素 $x$，按法则 $f$，在 $Y$ 中有唯一的元素 $y$ 与之对应，则称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的映射，记作 $f:X\rightarrow Y$。其中，$y$ 称为元素 $x$ 在映射 $f$ 下的像，并记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$。而 $x$ 称为元素 $y$ 在映射 $f$ 下的一个原像。集合 $X$ 称为映射 $f$ 的定义域，$X$ 中所有元素的像组成的集合称为映射 $f$ 的值域，记作**

$f(X)$,即 $f(X)=\{y=f(x)\mid x\in X\}\subset Y$。

**如果数集 $D\subset\mathbf{R}$,则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 $D$ 上的函数,通常记为 $y=f(x)$, $x\in D$。**

在定义 1.1 中,称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数,在定义 1.2 中,称数集到数集的映射(是一种对应法则)为函数,两种说法不一致,这给学习者带来了困惑。为此,我们给出以下讨论:

定义 1.1 和定义 1.2 的共性是存在一种"单值性"的对应。按定义 1.1 的说法,即 $\forall x\in D$,变量 $y$ 按一定法则 $f$ 总有唯一确定的数值和它对应;按定义 1.2 的说法,即 $\forall x\in 1$,按法则 $f$,在集合 $Y$ 中有唯一确定的数 $y$ 与之对应。函数概念所包含的实质内容,正是这种"单值性"的对应,那就是给定自变量一个值,就可唯一确定地对应出函数的一个数值来。

定义 1.1 和定义 1.2 的不同之处在于定义 1.1 中把变量 $y$ 称做函数,而定义 1.2 中则是把映射 $f$(即对应 $f$)称为函数。其实,变量 $y$ 和映射 $f$ 是可以互相唯一确定的:如果变量 $y$ 给定了,即 $\forall x\in D$,变量 $y$ 的值都唯一确定了,这种关系本身就是一种映射;如果给定映射 $f$,那么 $\forall x\in D$,按照 $f$,就有变量 $y$ 的唯一的值与 $x$ 对应。

函数的两种定义只是把函数的名称一个用在变量 $y$ 上,一个用在映射 $f$ 上,实质上都是表述了一种"单值的对应"。把变量 $y$ 称为函数,比较简明,容易理解一些,而由于函数的实质是一种单值对应,所以目前数学书籍中一般都采用第二种定义。其实不论采用哪一种定义,都不会影响对于函数的讨论,即对于"单值对应"这种依赖关系的讨论。现在有些书中干脆不加解释地把两种定义放在一起,而表述为"设 $D\subset\mathbf{R}$,则 $D$ 到 $\mathbf{R}$ 的任一映射 $f$ 称为定义在 $D$ 上的函数,通常记为 $y=f(x)$, $x\in D$,$x$ 称为函数的自变量,$y$ 称为函数的因变量,习惯上也称 $y$ 为 $x$ 的函数。"今后,我们就采用这最后一种定义。

需要指出,按函数定义,记号 $f$ 和 $f(x)$的含义是有区别的,前者表示自变量 $x$ 和因变量 $y$ 之间的函数关系,而后者表示与自变量 $x$ 对应的函数值,但为了叙述方便,除了符号 $f$,习惯上也常用记号 $f(x)$,或 $y=f(x)$来表述函数。

函数的记号 $f$ 也可改用其他字母,如 $\varphi$、$\psi$、$F$、$G$ 等,相应地,函数可记作 $y=\varphi(x)$、$y=F(x)$等等。有时还直接利用因变量的记号来表示函数,即把函数记作 $y=y(x)$,这时字母 $y$ 既表示因变量,又表示函数。

函数的自变量 $x$ 和因变量 $y$ 也可以换用其他字母,如 $u$、$v$、$s$、$t$ 等等。

从函数的定义可以看出,函数概念有两个要素:定义域和对应法则。如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的。

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的。例如圆面积公式 $A=\pi r^2$ 的定义域 $D=(0, +\infty)$；某天一昼夜温度 $T$ 随时间 $t$ 变化的规律 $T=T(t)$ 的定义域 $D=[0, 24]$。

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数。这时我们约定：函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数所组成的集合（这样约定的定义域通常称为函数的自然定义域），例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1, 1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1, 1)$。

具体表示一个函数时，必须明确指出函数的定义域和对应法则（但自然定义域常常不明确表出，可根据算式自行判定）。表示函数的对应法则可用表格法、图形法、解析法（即算式表示法），有时也可用语言表述。中学代数课中讨论过许多具体的函数，如幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等，这些函数称为**基本初等函数**，在本课程以后的讨论中将反复出现。下面再举几个函数的例子。

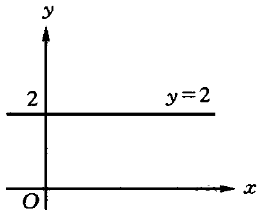

图 1-1

**例 1.1.1**　常函数 $y=2$ 的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=\{2\}$，它的图形是一条平行于 $x$ 轴的直线，它的图形如图 1-1 所示。

**例 1.1.2**　数 $x$ 的绝对值记为 $|x|$，如果把 $x$ 看作变量，则有函数

$$f(x)=|x| \triangleq \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

这个函数称为绝对值函数，它的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=[0, +\infty]$，它的图形如图 1-2 所示。

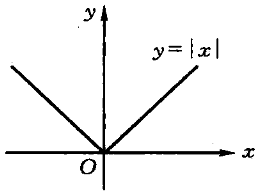

图 1-2

**例 1.1.3**　函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x \triangleq \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

称为**符号函数**。它的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=\{-1, 0, 1\}$，它的图形如图 1-3 所示。对于任何实数 $x$，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

例如，$\operatorname{sgn}(-3)\times|-3|=-1\times 3=-3$。

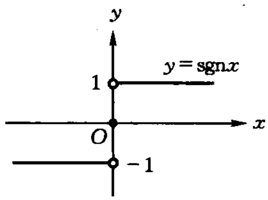

图 1-3

**例 1.1.4**　设 $x$ 为一实数，不超过 $x$ 的最大整数简称为 $x$ 的最大整数，记作 $[x]$。例如 $[\frac{2}{3}]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$。

一般地有 $[x]=n$，当 $x\in[n,\ n+1)$，$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$，把 $x$ 看作变量，则函数 $f(x)=[x]$ 称为**取整函数**，它的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域为整数集 $\mathbf{Z}$，它的图形如图 1-4 所示，这图形称为阶梯曲线，在 $x$ 的整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1。

从例 2 和例 3 看到，有些函数在其定义域的不同部分，对应法则由不同的算式表示，这种函数称为**分段函数**，分段函数在实际问题中是经常出现的。

**例 1.1.5**　火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费计算，每千克收 0.3 元。当超过 50 千克时，超重部分按每千克 0.5 元收费，这时运费 $y$(元)与重量 $x$(千克)构成函数关系：

$$y=\begin{cases}0.3x, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 15+0.5(x-50), & x>50\end{cases}$$

这就是一个分段函数。

**例 1.1.6**　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域 $D=[0,\ +\infty)$，当 $x\in[0,\ 1]$ 时，对应的函数值 $f(x)=2\sqrt{x}$；当 $x\in(1,\ +\infty)$ 时，对应的函数值 $f(x)=1+x$。例如 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$f(3)=1+3=4$。它的图形如图 1-5 所示。

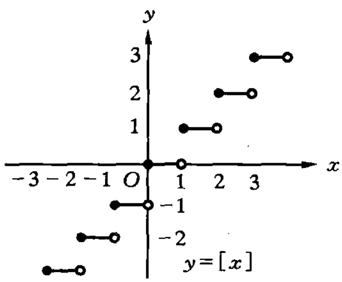


图 1-4

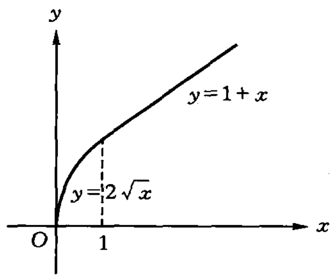


图 1-5

### 1.1.3　函数的几种特性

**1. 函数的有界性**

设函数的定义域为 $D$，数集 $X\subset D$，如果存在正数 $M$，使得 $\forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 $X$ 内**有界**；如果这样的 $M$ 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 $X$ 内**无界**。

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的（可取 $M\geqslant 1$）。函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的，因为不存在这样的整数 $M$，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0, 1)$ 内的一切 $x$ 都成立。但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内是有界的，例如可取 $M=1$，则 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对于区间 $(1, 2)$ 内的一切 $x$ 值都成立。

函数有界的定义也可以这样表述：如果存在常数 $M_1$ 和 $M_2$，使得 $\forall x\in X$，都有 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$，就称 $f(x)$ 在 $X$ 上有界，并分别称 $M_1$ 和 $M_2$ 为 $f(x)$ 在 $X$ 上的一个下界和一个上界。

**2. 函数的单调性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I\subset D$。如果对于区间 $I$ 内任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内是**单调增加的**；如果对于区间 $I$ 内任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内是**单调减少的**。

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的；在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的。

**3. 函数的奇偶性**

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$）。如果 $\forall x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；如果 $\forall x\in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**。

例如，在 $(-\infty, +\infty)$ 上，$f(x)=x^2$ 是偶函数，$f(x)=x^3$ 是奇函数，而 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数，又非偶函数。

奇函数的图形是关于原点对称的；而偶函数的图形是关于 $y$ 轴对称的。

**4. 函数的周期性**

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的数 $l$，使得对于定义域内的任何 $x$ 值，$x\pm l$ 仍在定义域内，且关系式 $f(x\pm l)=f(x)$ 恒成立，则 $f(x)$ 叫做**周期函数**，$l$ 叫做 $f(x)$ 的**周期**（通常，周期函数的周期是指最小正周期）。