

SUIJIWEIFEN FANGCHENG
JIQI ZAI HUILIU JISUANZHONG
DE YINGYONG

随机微分方程 及其在汇流计算中的应用

◎ 孙颖娜 邢贞相 芮孝芳 付强 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

随机微分方程 及其在汇流计算中的应用

◎ 孙颖娜 邢贞相 芮孝芳 付强 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书借助于随机微分方程理论和随机系统的概念,对汇流过程中的各种不确定性因素进行了分析,并以 Nash 模型为基础,针对具有随机输入项、随机参数项和两者结合情况下对汇流过程进行数学描述和分析,建立了随机汇流模型;并且利用随机理论,建立了出流过程自相关函数与 Nash 模型参数之间的关系。

本书对解决各种随机性因素对汇流过程的随机不确定性影响,可为防洪决策中提供预报值的不确定度以考虑风险损失提供科学的依据。可供从事水文学及水资源、水利工程科学、环境科学等的科学研究人员和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机微分方程及其在汇流计算中的应用 / 孙颖娜等
著. — 北京:中国水利水电出版社, 2010.1
ISBN 978-7-5084-7180-8

I. ①随… II. ①孙… III. ①随机微分方程—应用—
汇流—水力计算 IV. ①TV131.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第014980号

书 名	随机微分方程及其在汇流计算中的应用
作 者	孙颖娜 邢贞相 芮孝芳 付强 著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京市兴怀印刷厂
规 格	184mm×260mm 16开本 8.5印张 202千字
版 次	2010年1月第1版 2010年1月第1次印刷
印 数	0001—1500册
定 价	28.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

作者简介

孙颖娜 女, 1976年8月生, 汉族, 中共党员, 博士。1999年7月毕业于东北农业大学农田水利专业, 获得工学学士学位; 2002年6月毕业于东北农业大学农业水土工程专业, 获得工学硕士学位; 2006年6月毕业于河海大学水文学及水资源专业, 获得工学博士学位。这些年来主要从事产汇流不确定性理论、水文预报、流域水文模型等方面的研究, 在《水科学进展》、《河海大学学报》、《水电能源科学》、《水文》等期刊上发表论文10余篇, 先后主持和参加了国家及省部级科研项目6项。

邢贞相 男, 1976年8月生, 汉族, 中共党员, 毕业于河海大学水文学及水资源专业, 博士。主要研究方向有水资源系统优化配置、水资源不确定性分析、水资源评价、水文预报、农业系统工程建模等; 在《水利学报》、《农业工程学报》、《系统工程理论与实践》等国内外期刊上发表论文20余篇, 其中EI收录7篇、SCI收录1篇、ISTP收录3篇; 参加国家级、省部级科研项目8项, 主持省级科研项目1项, 参加国际学术会议4次。

芮孝芳 男, 1939年12月生。1963年毕业于华东水利学院(1985年改名为河海大学)陆地水文专业, 同年留校任教。1981~1982年受公派赴荷兰Delft大学留学, 获硕士学位。河海大学资深教授、博士生导师, 兼任《水利水电科技进展》杂志主编、《水科学进展》、《河海大学学报》和《水文》等杂志编委。主要研究方向: 产汇流理论、流域水文模型、数字水文学、地貌水文学、防洪规划和洪水预报。已在国内外发表学术论文120余篇, 出版专著《水文学原理》、《产汇流理论》、《河流水文学》、《径流形成原理》和《水文学研究进展》等。

付强 男, 1973年6月生, 汉族, 中共党员, 博士, 教授, 博士生导师。1995年7月、1997年7月、2000年7月在东北农业大学分别获得工学学士、硕士及博士学位。2002年5月在四川大学水利工程博士后流动站完成博士后研究工作。主要从事节水灌溉理论与技术、农业水土资源优化利用与管理等方面的研究。主持国家及省部级科研项目10余项, 发表学术论文100余篇, 其中被SCI、EI、ISTP收录70余篇。出版学术专著6部。曾担任4部教材的主编及副主编。获科研奖励10余项。

汇流是径流形成过程中的一种重要水文现象，是流域内净雨转化成出口断面流量和河道中洪水波运动的物理过程。汇流过程是一个十分复杂的过程，人们至今还很难掌握影响汇流过程的全部因素。目前广泛应用的汇流计算模型通常认为输入和模型结构及参数都是确定性的，即对于一个汇流系统来说，其系统响应是唯一的，这显然是一种简化和近似。在实际上，汇流规律既有确定性的一面，又有随机性的一面，为此，引入了随机微分方程理论和随机系统的概念，来对汇流过程进行数学描述和分析。这种将一种现象的确定性和随机性统一考虑的思路比仅作为确定性问题来解更符合汇流现象和本质。本书借助于随机微分方程理论和随机系统概念，建立了具有随机输入和模型参数为随机性及两者均为随机性情况下的汇流模型，导出了汇流系统输入为白噪声和马尔可夫噪声情况下，出流过程自相关函数与 Nash 模型参数之间的关系。希望能为国内学者进行相关研究提供一定的参考。

本书包括绪论、随机微分方程基础知识、随机不确定性汇流系统、确定 Nash 模型参数的随机理论方法、具有随机输入的 Nash 汇流模型、参数为随机的 Nash 汇流模型、模型参数与输入均为随机性的汇流系统等 7 章，分别介绍了采用相关函数法确定 Nash 模型参数的具体方法步骤；应用随机微分方程理论建立了输入具有高斯白噪声过程的 Nash 汇流模型，采用解析解法和数值解法分别求解该随机微分方程；建立了模型输入为确定性、参数为随机性的随机汇流模型，用两种方法对其进行求解，一种是应用 Liouville 定理得到出流过程满足的概率密度；另一种是对入流为单位函数，模型参数分别服从正态分布和 gamma 分布，解得随机 S 曲线；建立了输入和模型参数均具有随机性的随机汇流模型，并给出了出流过程满足的概率密度函数。

在本书编写过程中，我们参阅了许多相关书籍及学术论文等，在此向各位表示诚挚的感谢。另外，本书的出版得到了黑龙江省博士后资助基金项目 (LBH-08255)、中国博士后科学基金 (2009451116)、黑龙江省教育厅科学技术研究项目 (11451022)、黑龙江省教育厅科学技术研究项目 (11531267)、黑龙江大学科学研究基金的联合资助，在此，对国家、省府和学校所给予我们的支持也一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，编写时间仓促，书中必然有许多缺陷和不妥之处，恳请同行专家和广大读者多提宝贵意见，给予批评指正，我们将在今后的研究工作中加以改进。

著 者

2009年9月16日

目 录

前 言

绪论	1
0.1 人类面临的水问题	1
0.2 水文预报理论发展简介	2
0.3 国内外汇流理论研究进展	3
0.3.1 物理方向	3
0.3.2 系统分析方向	4
0.3.3 随机水文模拟方向	5
0.4 本书的主要内容及技术路线	6
0.5 线性集总式流域汇流模型简介	6
0.5.1 单一线性水库模型	8
0.5.2 Clark 模型	8
0.5.3 Nash 模型	8
0.6 沿渡河流域自然情况简介	10
0.6.1 流域水系	10
0.6.2 气象条件	10
0.6.3 水文特性	11
参考文献	12
第 1 章 随机微分方程基础知识	16
1.1 基本概念	16
1.1.1 随机过程及其分类	16
1.1.2 随机过程的数字特征	17
1.1.3 几种重要的随机过程	20
1.1.4 平稳随机过程的谱分析	22
1.2 均方微积分	23
1.2.1 均方收敛	23
1.2.2 均方连续性	24
1.2.3 均方可微性	24
1.2.4 均方可积性	24
1.3 随机常微分方程	24
1.3.1 随机微分方程的基本形式	24

1.3.2	伊藤方程	24
1.3.3	伊藤积分	25
1.3.4	伊藤微分法则	25
1.4	有随机初始条件的微分方程	26
1.4.1	随机变量的变换	26
1.4.2	Liouville 定理	27
1.5	有随机非齐次项的微分方程	28
1.5.1	伊藤型线性微分方程	29
1.5.2	伊藤线性方程解过程的均值和相关函数	29
1.5.3	分布函数和密度函数	30
1.5.4	福克尔—普朗克方程	30
1.6	有随机常系数的微分方程	31
	参考文献	33

第2章 随机不确定性汇流系统 34

2.1	汇流系统理论基础	34
2.1.1	流域调蓄的观点	34
2.1.2	水质点运动学的观点	34
2.1.3	计算水力学观点	35
2.1.4	系统分析的观点	35
2.1.5	随机水文学的观点	35
2.2	汇流系统的分类	37
2.2.1	确定性系统和随机性系统	37
2.2.2	线性系统和非线性系统	37
2.2.3	线性时变系统和线性时不变系统	39
2.2.4	连续时间系统和离散时间系统	39
2.2.5	稳定系统和非稳定系统	39
2.2.6	因果系统和非因果系统	39
2.3	汇流系统的响应函数	40
2.3.1	汇流系统的数学表达	40
2.3.2	简单入流过程	41
2.3.3	汇流曲线	43
2.4	线性汇流系统的卷积	45
2.5	水文不确定性的研究概况	46
2.5.1	水文不确定性的来源	46
2.5.2	水文不确定性研究的进展	48

2.5.3 水文不确定性研究的方法	49
2.6 汇流系统的随机不确定性	49
参考文献	51

第3章 确定 Nash 模型参数的随机理论方法	54
3.1 概述	54
3.2 矩法确定 Nash 模型参数	55
3.3 地形地貌参数确定 Nash 模型参数	56
3.3.1 利用地形地貌资料推求参数 n 的计算公式	57
3.3.2 利用地形地貌资料推求参数 k 的计算公式	57
3.4 相关函数法确定 Nash 模型参数	58
3.4.1 基本方程	58
3.4.2 输入为白噪声过程的情况	59
3.4.3 输入为马尔可夫噪声的情况	60
3.5 应用的方法步骤	64
3.5.1 计算实测出流过程的相关函数	64
3.5.2 确定马尔可夫噪声中的 β 值	64
3.5.3 确定 Nash 模型参数	65
3.6 在河道汇流中的应用	65
3.6.1 参数率定和精度分析	65
3.6.2 校核预报及精度分析	68
3.7 在流域汇流中的应用	70
3.7.1 参数率定和精度分析	70
3.7.2 校核预报及精度分析	72
3.8 结论	75
参考文献	76

第4章 具有随机输入的 Nash 汇流模型	78
4.1 随机微分方程的建立	79
4.2 解析解	80
4.2.1 1 个线性水库的情形	83
4.2.2 2 个线性水库串联的情形	84
4.2.3 3 个线性水库串联的情形	85
4.3 数值解	86
4.3.1 1 个线性水库的情形	86
4.3.2 2 个线性水库串联的情形	87
4.3.3 3 个线性水库串联的情形	88

4.3.4	随机性解与确定性解的比较	88
4.4	算例	89
4.4.1	入流过程处理	89
4.4.2	参数率定及精度分析	89
4.4.3	降雨径流过程的模拟	90
4.5	结论	96
	参考文献	96
第5章	参数为随机的 Nash 汇流模型	98
5.1	随机微分方程的建立	98
5.2	随机微分方程的解	99
5.2.1	1 个线性水库的情形	99
5.2.2	2 个线性水库串联的情形	100
5.2.3	3 个线性水库串联的情形	101
5.3	随机 S 曲线	103
5.3.1	随机 S 曲线的矩	103
5.3.2	α 服从正态分布的情形	104
5.3.3	α 服从 gamma 分布的情形	105
5.4	算例	106
5.4.1	概率密度法	106
5.4.2	随机 S 曲线法	110
5.4.3	计算方法比较	115
5.5	结论	115
	参考文献	115
第6章	模型参数与输入均为随机性的汇流系统	117
6.1	流域汇流系统的随机数学模型	117
6.1.1	基本微分方程	117
6.1.2	矩方程的建立	118
6.1.3	福克尔—普朗克方程的建立	119
6.2	实例	122
	参考文献	124

绪 论

水是地球上一切生命必不可少的资源，它是农业的命脉，工业的血液，城市的形成、发展和生存的重要条件，这使其有效地管理和利用成为社会上重要的目标，而环境的质量也直接或间接依赖于水资源的有效利用。为此，我们要清楚地认识水文物理系统，解决在水资源规划、防洪、减污等方面的水问题，就必须寻找水的某种特性。模拟降雨—径流水文过程是水文系统认识系统化的一种手段，利用已有的空间或时间测量结果去推断未知、特别是没有实测数据的流域，以便评估未来水文情势变化，这也是对水文学家的挑战^[1]。

0.1 人类面临的水问题^[2-5]

(1) 水旱灾害是人类面临的主要自然灾害。中国是历史悠久的文明古国，幅员辽阔，山丘遍布，河流众多（流域面积在 100km² 以上的河流有 50000 多条），洪旱灾害频繁。据我国历史资料记载，在 1949 年以前的 2155 年间，中国发生较大的水灾 1092 次，较大的旱灾 1056 次。人类为了生存与发展，与水旱灾害作斗争已有几千年历史，不断地从经验和教训中认识、掌握自然界中水文现象及其运动、变化规律，形成水文科学理论，对水文情势进行分析，并预测未来可能出现的水文要素的变化。但时至今日，水旱灾害造成的损失仍位居诸自然灾害之首。据统计，在世界范围内因水、旱灾害造成的损失占各种自然灾害总损失的比例达 55%，其中水灾为 40%，旱灾为 15%。中国每年因水、旱灾害造成的损失占各种自然灾害总损失的比例要大于 55%。中国江河大洪水和特大洪水的出现发生了值得注意的倾向：一是长江、淮河及其以南地区和东北的松花江、辽河流域，大洪水和特大洪水发生频次增加；二是“小流量高水位”现象时有发生；三是有些地方，同样的降雨量和过程产生的洪水比过去的更大。

(2) 全球气候变暖增加了解决水问题的难度。人口的增加、工业的发展，导致二氧化碳等温室气体大量的排放，“温室效应”加剧，全球气候变暖，海平面上升，水文循环发生很大变化。全球气候变暖已对中国产生比较明显的影响：一是使中国一些地区降水量减少，如山西汾河流域多年平均降水量已由过去的 558mm 减少到现在的 449mm；二是海平面明显上升，据分析，近百年来中国海平面平均每年上升了 0.14cm，其中天津、江苏、上海和广东沿海近百年来海平面上升超过了 20cm。降水量减少加重了一些地区的干旱缺水，海平面上升加重了沿海地区和感潮河段的水灾。

(3) 水污染加剧的势头还未得到有效的控制。有很长一段时间，人们对保护水环境意识淡薄，走了一条“先发展经济，后治理环境”的路子，留下了许多环境方面的后遗症。全国河流因大量排入污水而受到污染，使得有 23.3% 的河段不宜灌溉；符合饮用水、渔业用水标准的只占 14.1%，特别是北方的一些河流，流域内人口集中，工业发达，排入

的污水量大,河流水量又较南方河流小,年径流量变化幅度大,在枯水期,主干流水质甚至已降到不能利用的程度。南方河流水量虽然大,但由于中国企业工业的排污量大,而且约 80% 以上不经处理直接排入江河湖库等水体,致使一些大城市附近的河段,已出现局部的水污染,有些河段污染已经相当严重。水污染的加剧,不仅带来了严重的生态与环境问题,而且也增加了一些缺水地区和缺水城市的缺水程度,甚至出现缺乏安全饮用水的危机。

(4) 不合理的工程措施和管理产生了负面的影响。盲目砍伐森林,不合理地筑坝拦水、围垦、跨流域引水、引水灌溉和地下水开采等,都有可能带来负面的影响。对森林的乱砍滥伐,致使水土流失严重,恶化了当地生态与环境,造成了河道淤积,加之不合理的围垦,减少了水体的调蓄能力和输水能力,从而降低了江河防洪标准。大量修建蓄水工程,导致下游河道淤积萎缩,防洪能力降低,湿地缩小,河口水环境恶化,生物多样性减少。

总结以往的经验教训,采取相应的措施,合理开发利用和保护水资源,预测、预报和防治水旱灾害,从而实现资源、环境和社会经济协调健康的发展是当前及未来水资源高效利用的必由之路。

0.2 水文预报理论发展简介

洪水是一种高度复杂的自然现象,它会给人类正常生活、生产带来损失与祸害。为了防治、缓解或消除洪灾损失,保护人民生命财产安全,促进工农业发展,保护生态环境和社会经济的良好循环,出现了为抗洪抢险提供依据的水文预报技术,即以河流和流域为主,以实测水文、气象等资料为依据,运用水文学原理对水文现象及其变化与特征进行剖析,分析和探求其内部因素与外界影响因素,以及在它们作用下的演变规律,作出及时准确的水文预报,为防汛决策提供重要的科学依据,可以获得减免洪水灾害损失的巨大经济和社会效益,日益受到普遍的重视和关注^[6]。

水文预报技术是从 20 世纪 30 年代发展起来的。由于生产力的发展,人们期望能科学地了解和掌握河流洪水与枯水的变化规律,以便能预报洪水与枯水的发生和大小,达到与洪水和谐共处、与水旱灾害作斗争的目的。我国的水文预报方法和技术在大量的实践经验和科学研究成果基础上,水文情报预报工作由点到面迅速发展。从理论上讲,水文预报理论包括产流理论和汇流理论,汇流理论又包括流域汇流理论和河道洪水演算理论^[7]。最早的产流理论是 1931 年 Horton^[8]提出的,他在“The role of infiltration in the Hydrologic cycle”一文中,提出了著名的下渗理论,随后这一概念被广泛应用,之后又出现了许多下渗理论,如 Green-Ampt 下渗理论、Philip 下渗理论、Holtan 下渗理论等。1932 年舍尔曼 (Sherman)^[9]提出了单位线;1935 年霍顿^[10]在“地表径流现象”中提出了均质包气带的产流理论。关于河道洪水波的理论研究大致沿着三条基本途径^[11]:以圣维南方程组为出发点的水力学途径,以水量平衡和槽蓄方程为基础的水文学途径,及应用系统分析方法的研究途径。水力学途径中应用较为广泛的是运动波与扩散波模型,典型的水文学模型有马斯京根法^[12],特征河长法^[13,14]等。从 20 世纪 40 年代起,水文学家试图通过简单的

数学关系概括复杂的水文现象。1946 年 Cook^[15]提出了下渗指数法, 1949 年 Linsley^[16]提出了前期雨量指标 API 法。

20 世纪 50 年代, 系统理论引入了洪水预报理论, 与此同时, 系统分析的许多概念、方法也逐步引入到了水文学领域, 揭开了水文模型研制的序幕。从此, 系统理论的应用进入了加速发展时期。

0.3 国内外汇流理论研究进展

汇流理论是从 19 世纪后期逐渐发展起来的, 并在 20 世纪 30~60 年代取得了重大的突破。19 世纪以前, 人们对汇流现象仅有感官认识或只能作简单定量的分析。19 世纪, 以牛顿力学为基础的古典科学得到了极大的发展。在物理科学领域中, 以牛顿力学为基础, 统一了声学、光学、电磁学和热力学, 在水科学领域中, 基于牛顿力学, 于 1856 年提出了渗流运动规律的 Darcy 定律, 于 1871 年提出了描述明渠缓变不稳定流运动规律的圣维南基本微分方程组, 前者为土壤水和地下水动力学奠定了基础; 后者为研究河道及坡面洪水运动和流域汇流奠定了基础^[17-20]。

经过 100 多年的发展, 汇流理论与计算方法的研究主要沿着以下三个方向发展。

0.3.1 物理方向

这是专指从物质运动来探讨汇流过程物理规律的研究方向。根据这一方向建立起来的汇流模型的主要特点是只要已知地形、地貌特征资料和水力特征资料即可求出其中包含的各项参数。

正如许多物质的运动都具有粒子性和波动性一样, 水的运动也具有这样的二重性。利用水流运动的粒子性处理汇流问题, 就是考察流域出口断面在某一时刻的流量是由哪些水质点组成的, 是怎样组成的; 利用水流运动的波动性处理汇流问题, 就是考察传播流量在传播场中的运动规律, 即这种运动是如何受物质不灭定律和能量、动量守恒定律的控制的, 据此可导出水动力学的解析解或数值解。圣维南 (ST. Venant) 方程组是波流量传播规律的数学描述, 因此, 所有基于圣维南方程组求解的汇流计算方法都属于用“波动性”来处理汇流问题的; 最早日本学者速水颂一郎于 1951 年提出了以圣维南方程组为基础的扩散波模型。此后, Dooge, Cunge, Price 和 Koussis 等都作过一些理论上的讨论^[21-25]。河海大学芮孝芳教授导得扩散系数与特征河长之间的关系^[26], 提供了按水文资料确定扩散系数的方法, 并且讨论了扩散波的坦化特征和基于线性扩散模型解析解的计算方法, 对解析解的可用性给出了实例证明。

流域地貌瞬时单位线理论是以水的“粒子性”寻找水质点等待时间的概率密度函数来解释汇流过程的^[27-32]。最早, 路斯 (Ross)^[21]试图用等流时线概念处理水质点尺度与水质点流达时间两个问题, 但成果并不令人满意。这种方法考虑了一些影响汇流的基本因素, 如汇流速度、流域面积和形状等, 但他没考虑流域的调节作用。1969 年, 苏康 (Surkan)^[33]设想把流域按矩形网格划分成许多单元, 每个单元包含的水体作为一个“水质点”, 并分别考虑他们的流达时间, 这种确定水质点尺度和流达时间的方法比等流时线

概念前进了一步。1978 年, Boyd^[34]建立了汇流模型参数与分叉比、河长比、面积比等地貌参数之间的经验关系。1979 年, 罗得里古兹依得布 (Rodriguez - Iturbe) 等人^[35]将瞬时单位线 (IUH) 与流域地貌参数联系在一起, 首先提出了地貌瞬时单位线的概念 (GIUH); 1980 年 Gupat 等人^[36]又作了重要补充, 进一步完善了地貌单位线理论 (GUH), 他们把大量质点随机运动的马尔可夫过程理论和统计物理学研究方法引入了流域汇流研究, 把流域视为随机实验的对象, 为从理论上导出流域汇流模型参数与流域及河长的地形、地貌特征之间的内在关系提供了可能性^[37-39]。后来, Rodriguez - Iturbe^[40]等和 Wang^[41]等拓展了 GIUH 理论, 在假设河道单元为运动波的前提下, 考虑了河网流速随流量的非线性变化。

20 世纪 80 年代, Troutman 等人提出了地形单位线 (Topological IUH)^[42-44], 实际上是结合近代定量地貌学理论的等流时线方法的推广, 目的是推求时间—面积曲线。根据地貌瞬时单位线理论, Wang C T, Gupta U K. etc 探索了流域汇流的非线性机理, Georgakakos A P 和 Kabouris J C^[45]处理了包括地表径流和地下径流在内的流域汇流问题, Rinaldo. etc^[46]提出了流域汇流受控于地貌扩散和水动力扩散的新观点。2002 年芮孝芳根据流域汇流地貌扩散和动力扩散作用的结果, 利用河道响应函数描述水动力扩散, 利用宽度函数描述地貌扩散, 导出了流域瞬时地貌单位线的表达式^[47]。

0.3.2 系统分析方向

由系统分析途径建立的汇流模型通常有概念性模型和“黑箱模型”之分。“黑箱”模型参数的识别依赖于实测的入、出流资料, 它不需要知道系统的内部结构信息, 在输入和输出时间序列之间的数学关系不用物理规则导出, 这个系统的输入时间序列是流域上的平均降雨, 输出的是一个或几个线性水库串联的全部出流过程。而所建立起来的概念性模型, 目前也主要依据实测入、出流资料来率定参数。

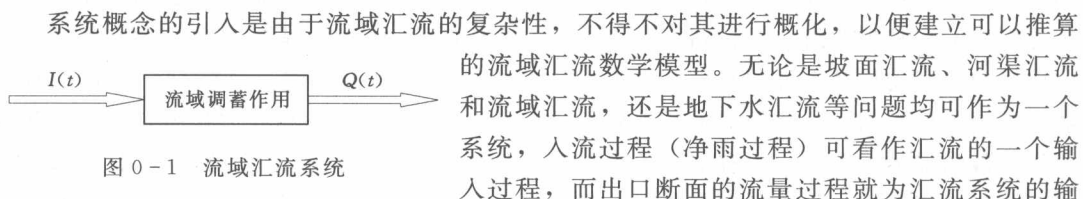


图 0-1 流域汇流系统

系统概念的引入是由于流域汇流的复杂性, 不得不对其进行概化, 以便建立可以推算的流域汇流数学模型。无论是坡面汇流、河渠汇流和流域汇流, 还是地下水汇流等问题均可作为一个系统, 入流过程 (净雨过程) 可看作汇流的一个输入过程, 而出口断面的流量过程就为汇流系统的输出过程, 即系统的响应, 而系统的作用就是流域的调蓄作用 (图 0-1), 整个流域汇流过程看作一个汇流系统。汇流系统的内部作用可以是线性的、非线性的、时变的、时不变的微分方程, 也可以是线性的、非线性的、时变的、时不变的差分方程^[48-52]。

近代在汇流理论中引入系统概念和系统分析方法, 最早可追溯到 1932 年 L. K. Sherman 提出的单位线的概念。1934 年, 左贺 (Zoch) 建立了线性水库和瞬时单位线的概念。1938 年麦克锡 (G. T. Macarty) 提出了马斯京根流量演算法。该算法因在美国 Muskingum 河上做流量演算而得名。1945 年, Clark 使用面积—时间曲线与单一线性水库串联系统来模拟流域汇流。1958 年, 爱尔兰水文学家 J. E. Nash^[53,54]和 J. C. Dooge^[55]明确地将系统概念引入流域汇流, 提出了用一系列串联水库来模拟汇流构成流域动力系统。1960 年, Dooge 提出了一般性流域汇流单位线, 相继提出时变水文系统概念和各种流域非线性汇流理论和计算方法。1961 年, J. 阿莫罗契等人也开始用系统分析方法来处

理汇流问题^[56]，他们把流域看作一个系统，将降雨过程 $I(t)$ 作为系统的输入，系统的输出为出口断面的流量过程 $Q(t)$ 。他们根据系统的输入和输出资料来推求系统的作用，而并不探讨输入形成输出的物理机制。这种用系统的观点来研究汇流单位线是近代水文学的一个重要成就，已经是各国水文学家真正有意识的应用系统理论观点来探求汇流理论和计算方法的开始。基于系统分析方法求解的汇流模型在我国水文预报的实践中已得到越来越广泛的应用，如总径流线性响应模型（TLR）、约束线性系统模型（CLS）、线性扰动模型（LPM）等^[57]。

0.3.3 随机水文模拟方向

由这一方向建立起来的汇流模型的显著特点是可以根据入、出流过程的统计资料特性来确定模型参数，或对入流过程是随机性的，而模型参数是确定性的汇流系统，确定其出流过程的随机结构特性，或对入流是确定性的，但模型参数具有随机性结构的汇流系统，确定其出流过程的随机结构特性。与前两种研究途径相比，该研究方向更具有新意。

水的物质结构即不同于固体，也不同于气体，即非严密有序又非完全随机，而是一种松散的结构关系，分析力学不能精确支配它，统计力学也不能精确描述它。因此，水在物质结构上的这种特殊性，必然要求在探讨其运动规律时使确定性研究方法和随机性研究方法有机结合，相互补充。20 世纪 80 年代以来，地貌瞬时单位线的创立，以及水文随机模拟技术的发展，已经显示了这种确定性与随机性研究方法的相结合在探索水文规律中的重要作用。

20 世纪 70 年代以来，随机水文学发展成为水文科学的一个分支^[58,59]，主要研究时间序列分析、卡尔曼滤波理论和蒙特卡洛方法在水文学中的应用^[60]。卡尔曼滤波等理论被引入到水文学领域，在一定程度上提高了水文预报的预报精度。就广义而言，这些模型属于随机模型的范畴，随机理论的应用和随机模型的建立是卡尔曼滤波实时预报的关键之一。从这个意义上说，随机模型在近代水文预报中同样占有重要的地位^[61]。

1971 年，Quimpo^[62]指出“参数水文学”与“随机水文学”存在着某种联系。芮孝芳教授就汇流系统的入流为白噪声过程时，推导出 Nash 模型的参数 n 和 k 与汇流系统出流过程的相关函数的关系式^[63]。这就寻找出当入流为白噪声过程时汇流模型参数与汇流系统与出流过程随机结构特性之间的关系，这种情况下，只依据汇流系统的出流资料就能确定汇流模型参数。

瞬时单位线一直是广泛应用在降雨径流预测中的设计工具，它的求得是流域上复杂降雨径流过程的简化^[64-78]。由于模型中条件的简化和水文数据的随机性，导致了瞬时单位线的不确定性^[74]。1970 年后，许多学者把随机的方法引入到了概念性模型^[79-89]。概念性瞬时单位线的随机性分析的最新发展是随机微分方程理论的应用^[90-93]。最早 Moran, Bernier, Quimpo, Weiss, Unny 和 Karmeshu, Unny, Koch, Bodo^[86-88]致力于有随机输入的概念性模型的研究。Sarino 和 Serrano (1990)^[89]认为 Nash 模型中的蓄量常数 k 可以看作是随机变量，把随机变量 k 表示成均值 $\bar{k}$ 和有零均值的小扰动量 k' 之和，即 $k = \bar{k} + k'$ 。并且从相应的随机微分方程中推导出了 $n=1$ 和 $n=2$ 时随机瞬时单位线的表达式 $q_n(t)$ (n 为线性水库的个数)。Hjemfele 和 Wang (1994)^[90]把上述随机瞬时单位线的解扩展到

了 $n=3$ 和 $n=4$ 的情况, 并推论得到 n 个线性水库串联时出流过程的一般解形式为

$$q_n(t) = t^{n-1} e^{-t/\bar{k}} \left\{ \frac{1}{(n-1)! \bar{k}^n} - \frac{k'[(n-1)\bar{k}-t]}{(n-1)! \bar{k}^{n+2}} + \frac{(k')^2[n(n-1)\bar{k}^2-2n\bar{k}t+t^2]}{2(n-1)! \bar{k}^{n+4}} - \frac{(k')^3[(n+1)n(n-1)\bar{k}^3-3(n+1)n\bar{k}^2t+3(n+1)\bar{k}t^2-t^3]}{6(n-1)! \bar{k}^{n+6}} \right\} \quad (0-1)$$

这个方程在 $n>3$ 时确定其统计特性的难度就增加很多, Gwo-Fong Lin 和 Yu-ming Wang^[91-94] 在前人的基础上, 给出了 Nash 模型参数 k 为具有标准正态分布和 Γ 分布的随机变量时的随机瞬时单位线的解过程。

0.4 本书的主要内容及技术路线

第一章主要介绍随机微分方程基础知识。

第二章详细介绍随机不确定性汇流系统, 包括汇流系统的概念、分类及线性汇流系统、响应函数、水文不确定性的来源及研究进展和研究方法等。

第三章介绍了确定 Nash 模型参数的随机理论方法。主要是根据汇流系统入、出流的随机结构特征, 确定 Nash 模型的参数。包括输入为白噪声和马尔可夫噪声两种情况。

第四章详细介绍具有随机输入的 Nash 汇流模型。主要介绍对于入流为随机性, 而模型参数为确定性的随机线性汇流系统, 确定出流过程的随机结构特征的方法。

第五章介绍了参数为随机的 Nash 汇流模型。主要是对于入流为确定性的, 模型参数为随机性的随机线性汇流系统, 确定其出流过程的随机结构特征的方法。

第六章介绍了参数和输入均具有随机性的汇流系统。

0.5 线性集总式流域汇流模型简介

流域水文模型是由描述流域降雨径流形成过程的各函数构成的一种物理结构或概念性结构, 或者说是通过一组耦合函数关系及相应参数来模拟流域降雨径流形成过程的一种结构, 它严格满足流域水量平衡原理。流域水文模型的输入是降雨、蒸发能力等, 输出是流域出口断面流量过程或流域蓄水过程或流域蒸发过程等。应用流域水文模型探索水文规律是揭示水文规律的一种重要手段, 而数学描述是建立模型的第一个阶段。普遍认为数学是描述自然界过程的有力工具。可靠的数学模型可在一定已知的条件下评价和预测水文系统的性能。因此, 以数学为基础的流域水文模型既可用于对流域径流形成规律的探求, 又可用于处理实际应用问题。

流域汇流模型属于数学模型, 一个流域的汇流过程见图 0-2。流域汇流模型根据其历史发展一般可分为系统模型、集总式的概念性模型和分布式的水文物理模型。目前应用最为广泛的是系统模型和集总式的概念性模型。概念性流域汇流模型是指由基本元件(图 0-3), 如“线性渠道”、“线性水库”、面积—时间曲线等单独或按一定排列方式(串联、并联或混联)所构成的流域汇流模型。“线性渠道”的作用是仅使流量过程线发生推移, 而不发生扭曲, “线性水库”的作用是使流量过程线发生坦化, 面积—时间曲线考虑净雨

输入在流域上的分散性对流量过程线的推移和坦化影响。由于下面内容的需要,在这里首先介绍一下瞬时单位线的概念。在汇流计算中,把均匀分布的瞬时脉冲净雨在流域出口断面所形成的流量过程线称为流域瞬时单位线(或响应函数)。

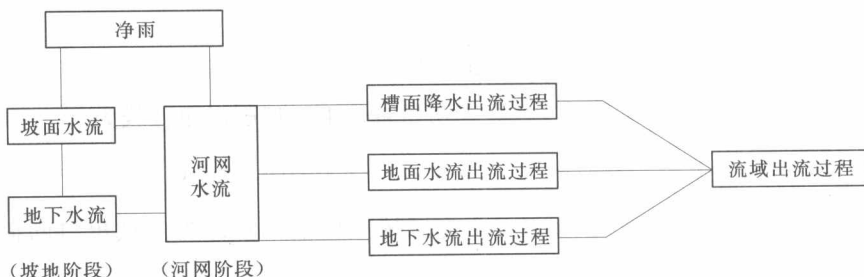


图 0-2 流域汇流过程框图

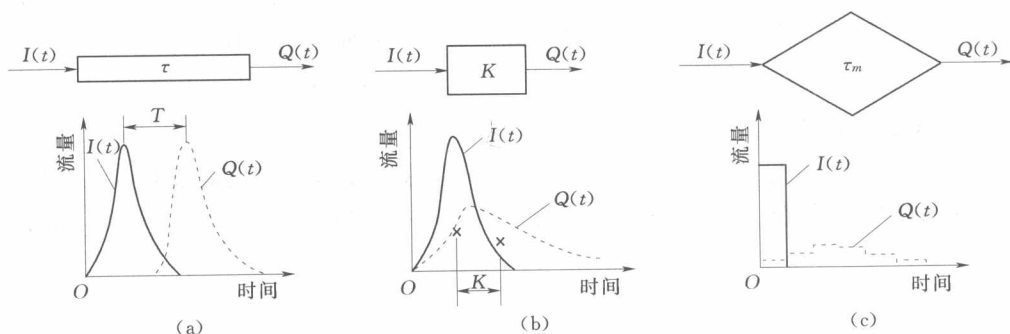


图 0-3 线性概念性元件

(a) 线性渠道; (b) 线性水库; (c) 面积-时间曲线

对于线性渠道,其瞬时单位线为

$$u(0, t) = \delta(t - \frac{L}{C}) \quad (0-2)$$

式中: L 为渠道长度; C 为洪水波波速。

对于线性水库,其瞬时单位线为

$$u(0, t) = \frac{1}{k} e^{-t/k} \quad (0-3)$$

式中: k 为线性水库蓄量系数。

对于面积-时间曲线,其瞬时单位线为

$$u(0, t) = \frac{\partial \omega(t)}{\partial t} \quad (0-4)$$

当流域汇流系统由两个概念性元件串联而成时,其瞬时单位线为这两个概念性元件瞬时单位线的卷积;当流域汇流系统由两个概念性元件并联而成时,其瞬时单位线为这两个概念性元件瞬时单位线的加权平均;对于混联的排列组合情况,显然是以上两种情况的综合。