

GAODENG SHUXUE

高等数学

第二版 上册

主编 曾光菊 岳健民 余成恩



西南交通大学出版社
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

高等数学

第二版 上册

主 编 曾光菊 岳健民 余成恩
副主编 周 锋 杜道渊 李永明

西南交通大学出版社

• 成都 •

内 容 提 要

本书根据“高等数学课程教学基本要求”，并结合多年来的教学实践编写而成。全书分为上、下两册，共十章。上册内容包括一元函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何。为方便教学，每章附有复习题。本书也可作为高等学校工科专业高等数学课程的教材或参考书。

图书在版编目 (C I P) 数据

高等数学. 上册 / 曾光菊, 岳健民, 余成恩主编. —2
版. —成都: 西南交通大学出版社, 2009.8
ISBN 978-7-5643-0401-0

I. 高… II. ①曾…②岳…③余… III. 高等数学—高等
学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 151746 号

高 等 数 学

第二版 上册

主 编 曾光菊 岳健民 余成恩

*

责任编辑 张宝华

封面设计 本格设计

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 170 mm × 230 mm 印张: 16.625

字数: 300 千字 印数: 8 101—13 600 册

2006 年 8 月第 1 版

2009 年 8 月第 2 版 2009 年 8 月第 4 次印刷

ISBN 978-7-5643-0401-0

定价: 26.00 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

第二版前言

此次修订是在第一版的基础上,结合近几年的教学实践,听取了许多有经验教师的具体意见,对部分内容进行了适当调整和增删,主要体现在如下几个方面:

优化了各部分的例习题,将微分方程调整到上册,向量代数与空间解析几何调整到下册,这样有利于学生的学习,也有利于分散难点.另外,多元函数微分学中增加了方向导数与梯度,多元函数积分学中删去了极坐标的基础知识,增加了斯托克斯公式,将全微分方程一节调整到格林公式这一部分中.

上册修订人员有曾光菊(第一章)、周锋(第二章)、岳健民(第三章)、李永明(第四章)、余成恩(第五章)、杜道渊(第六章).此次修订工作主要由曾光菊、岳健民、余成恩三位同志完成.

黎克麟教授等对本书提出了许多积极建议,在此表示感谢!

由于编者水平有限,第二版还有许多不足之处,恳请使用本书的读者批评指正.

编者

2009年5月

前 言

高等数学是高等工科院校的一门重要基础课,对学生后继课程的学习以及今后的发展有着深远的影响.本书是结合多年来的教学实践,并根据“高等数学课程教学基本要求”编写而成的.全书分为上、下两册,共十章.上册六章,内容包括函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何.由于学时的减少,我们对本书的部分内容进行了适当调整,各章都配有适当的例题和习题以及复习题.可作为高等学校工科专业高等数学课程的教材或教学参考书.许彪同志主持本书(上册)编写工作,对本册进行统纂,对有的章节进行了改写.参加本书编写工作的有:曾光菊和许文俊(第一章)、周锋(第二章)、岳健民(第三章)、许彪和李永明(第四章)、余成恩(第五章)、谢巍(第六章).

李作安、黄蕴魁、曾祥龙、林灿等几位同志对原稿进行了认真审阅并提出了不少改进意见,对此表示衷心感谢!

同时,在本书的编写过程中,得到西南交通大学出版社的大力支持与帮助,在此一并表示衷心感谢!

限于编者水平,加之时间仓促,本书不足之处在所难免,敬请广大读者给予批评指正.

编者

2006年8月

目 录

第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数的概念	1
习题 1-1	6
第二节 数列的极限	7
习题 1-2	15
第三节 函数的极限	16
习题 1-3	22
第四节 极限的存在准则与两个重要极限	23
习题 1-4	29
第五节 无穷小量与无穷大量	30
习题 1-5	34
第六节 函数的连续性	35
习题 1-6	41
复习题一	42
第二章 导数与微分	43
第一节 导数概念	43
习题 2-1	51
第二节 求导法则	51
习题 2-2	60
第三节 高阶导数	61
习题 2-3	64
第四节 隐函数和由参数方程确定的函数的导数	65
习题 2-4	72
第五节 函数的微分	73
习题 2-5	79
第六节 微分的应用	79

习题 2-6	82
复习题二	83
第三章 中值定理及导数的应用	85
第一节 中值定理	85
习题 3-1	91
第二节 洛必达法则	92
习题 3-2	96
第三节 泰勒公式	97
习题 3-3	101
第四节 函数单调性的判别法	101
习题 3-4	104
第五节 函数的极值及其求法	105
习题 3-5	109
第六节 最大值、最小值问题	109
习题 3-6	111
第七节 曲线的凹凸与拐点	112
习题 3-7	115
第八节 函数图形的描绘	115
习题 3-8	118
第九节 曲 率	118
习题 3-9	124
复习题三	124
第四章 不定积分	126
第一节 不定积分的概念及性质	126
习题 4-1	130
第二节 第一类换元积分法	131
习题 4-2	137
第三节 第二类换元积分法	138
习题 4-3	144
第四节 分部积分法	144

习题 4-4	148
第五节 有理函数及三角函数有理式的积分	149
习题 4-5	154
第六节 积分表的使用	155
习题 4-6	157
复习题四	157
第五章 定积分及应用	159
第一节 定积分的概念及性质	159
习题 5-1	165
第二节 牛顿-莱布尼兹公式	166
习题 5-2	170
第三节 定积分的换元法	171
习题 5-3	175
第四节 定积分的分部积分法	176
习题 5-4	179
第五节 广义积分	179
习题 5-5	184
第六节 定积分在几何上的应用	184
习题 5-6	196
第七节 定积分在物理上的应用	197
习题 5-7	200
复习题五	200
第六章 微分方程	203
第一节 微分方程的基本概念	203
习题 6-1	205
第二节 可分离变量方程与齐次方程	206
习题 6-2	210
第三节 一阶线性微分方程	211
习题 6-3	216
第四节 可降阶的高阶微分方程	217

习题 6-4	221
第五节 高阶线性微分方程	221
习题 6-5	225
第六节 二阶常系数齐次线性微分方程	225
习题 6-6	229
第七节 二阶常系数非齐次线性微分方程	230
习题 6-7	237
复习题六	238
附录 I 二阶和三阶行列式简介	239
附录 II 几种常用的曲线	244
附录 III 积分表	247
参考文献	258

第一章 函数、极限与连续

在中学已经学过函数的定义,讨论过函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性等几何特性,为了“高等数学”学习的方便,本章先复习一下函数的有关知识.

第一节 函数的概念

一、函数

在同一现象中所碰到的各种变量,通常并不都是独立变化的,它们之间存在着依赖关系,下面先考察几个例子:

例 1 设有半径为 r 的圆,考虑内接于圆的正 n 边形的周长 L_n 和面积 S_n . 由图 1-1 容易看出,

$$L_n = 2nr \sin \frac{1}{2} \alpha_n, \quad S_n = \frac{1}{2} nr^2 \sin \alpha_n$$

其中 $\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$. 这两个公式指出了内接于圆的正 n 边形的周长 L_n 和面积 S_n 与边数 n 之间的依赖关系.

例 2 直线方程为 $y = ax + b$ (其中 a, b 都是常数),它给出了变量 x 与变量 y 的依赖关系.

抽去上面两个例子中所考虑的量的实际意义,可以看出它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系. 这种关系给出了一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果对应于每一个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定对应法则总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量.

当 x 取遍 D 的所有数值时, 相应的函数值 $f(x)$ 的全体所组成的集合叫做

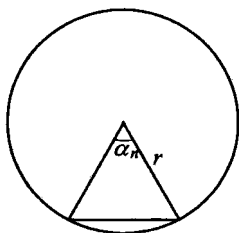


图 1-1

函数 $y=f(x)$ 的值域.

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总是只有一个,这种函数叫做单值函数,否则叫做多值函数.例1和例2的函数都是单值函数.

例3 函数 $y^2=x$, 对于任意正实数 x , 都有一对互为相反数的实数 $y=\pm\sqrt{x}$ 与之对应, 是多值函数.

以后凡没有特别的说明, 函数都是指单值函数.

下面举几个特殊函数的例子.

例4 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

例5 取整函数. 设 x 为任一实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$. 例如, $[0.5]=0$, $[\pi]=3$, $[-1.5]=-2$, $[-\pi]=-4$. 把 x 看作变量, 则得一函数

$$y=[x], \quad x \in \mathbf{R}$$

称此函数为取整函数.

例6 狄立克莱(Dirichlet)函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

此函数的图形作不出来, 其直观想象是: 有无数多个点稠密地分布在 x 轴上, 也有无数多个点稠密地分布在直线 $y=1$ 上.

二、具有某些特性的函数

1. 单调函数

如果对于某区间 X 内的任何两点 $x_1 < x_2$, 总成立 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或 $f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 X 内为单调增加 (或单调减少). 如果等号恒不成立, 则称为严格单调增加 (或严格单调减少).

2. 奇函数和偶函数

如果 $f(x)$ 的定义域为关于原点对称的区间, 并且对定义域内的任意 x 均满足 $f(-x) = -f(x)$, 就称 $f(x)$ 为奇函数, 它的图形关于原点对称; 如果对定义域内的任意 x 均满足 $f(-x) = f(x)$, 就称 $f(x)$ 为偶函数, 它的图形关于 y 轴对称.

3. 周期函数

能使 $f(x+\omega)=f(x)$ ($\omega \neq 0$) 成立的函数 $f(x)$ 称为周期函数, ω 称为周期. 如正弦函数 $y=\sin x$ 就是周期函数, 周期为 2π . 按照周期的定义, $\pm 4\pi, \pm 6\pi$ 也是正弦函数的周期, 而 2π 是它的最小正周期. 通常, 函数的周期指它的最小正周期. 但并不是每一个周期函数都有最小正周期, 例如, 狄立克莱函数, 任何非零有理数 ω 都是它的周期, 但是它没有最小正周期.

4. 有界函数

设函数 $f(x)$ 在数集 X 内有定义, 如果存在 $M>0$, 使得对于任意的 $x \in X$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 X 上有界; 如果这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

三、复合函数与反函数

1. 复合函数

先考察一个例子. 设有一个质量为 m 的沿直线运动的物体, 速度是 v , 那么它的动能为

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

如果这个物体是自由落体, 则其速度为

$$v = gt$$

其中 g 是重力加速度. 于是它的动能是

$$E = \frac{1}{2}m(gt)^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2$$

现在抽去其中的具体意义, 便得到这样两个函数

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = gt$$

将 $v=gt$ 代入函数 $E = \frac{1}{2}mv^2$, 可得 E 通过中间变量 v 而成为 t 的函数. 这种形式的函数称为复合函数.

一般来说, 若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U , 而函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X , 值域为 U^* , 并且 $U^* \subset U$, 那么对于 X 内的每一个 x , 经过中间变量 u , 相应的, 得到唯一确定的一个值 y . 于是 y 经过中间变量 u 而成为 x 的函数, 记为

$$y = f[\varphi(x)]$$

这种函数称为复合函数,而 u 称为中间变量.

利用这一概念,有时可以把函数分解为几个函数,另一方面也可以用它来产生新的函数.应当指出,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域不能超出函数 $y=f(u)$ 的定义域 U ,这是极为重要的,否则不能由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合成一个复合函数.

例7 已知函数 $f(x)=2x^2+1$, $g(x)=\cos x$, 求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$, $f[f(x)]$.

解 设 $f(u)=2u^2+1$, $u=g(x)=\cos x$, 则将 $u=g(x)$ 代入函数 $f(u)$, 则有

$$f[g(x)]=2g^2(x)+1=2\cos^2 x+1$$

同样,

$$g[f(x)]=\cos[f(x)]=\cos(2x^2+1)$$

$$f[f(x)]=2f^2(x)+1=8x^4+8x^2+3$$

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 对于任意的 $y \in W$, 在 D 上有唯一确定的一个 x 与 y 对应, 且满足 $y=f(x)$. 如果把 y 看作自变量, x 看作因变量, 就可以得到一个新的函数 $x=f^{-1}(y)$. 称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 而把函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

此时, $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数, 或者说, $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数. 前者的定义域和后者的值域相同, 前者的值域和后者的定义域相同.

例如, 直接函数 $y=f(x)=4x+3$ ($x \in \mathbf{R}$) 的反函数为

$$x=f^{-1}(y)=\frac{1}{4}(y-3), \quad y \in \mathbf{R}$$

习惯上用 x 表示自变量, y 表示因变量, 于是可约定 $y=f^{-1}(x)$ 是直接函数 $y=f(x)$ 的反函数.

我们还有下面的结论:

若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上严格单调, 则 $y=f(x)$ 在区间 I 上一定存在反函数.

四、初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数叫做基本初等函数.

1. 幂函数 $y=x^a$ ($a \in \mathbf{R}$)

它的定义域和值域依 a 的取值不同而不同, 但是无论 a 取何值, 幂函数在 x

$\in (0, +\infty)$ 内总有定义. 当 $a \in \mathbf{N}^+$ 或 $a = \frac{1}{2n-1}$ 且 $n \in \mathbf{N}^+$ 时, 定义域为 $\mathbf{R}$.

2. 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$.

3. 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$

它的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 对数函数 $y = \log_a x$ 是指数函数 $y = a^x$ 的反函数.

特别地, 当 $a = e = 2.718\ 281\ 828 \cdots$ 作为指数函数和对数函数的底时, 函数分别记为 $y = e^x$ 和 $y = \ln x$.

4. 三角函数

三角函数有正弦函数 $y = \sin x$ 、余弦函数 $y = \cos x$ 、正切函数 $y = \tan x$ 、余切函数 $y = \cot x$ 、正割函数 $y = \sec x$ 和余割函数 $y = \csc x$. 三角函数为周期函数, 正弦函数和余弦函数的周期为 2π , 正切函数和余切函数的周期为 π . 还要指出, 在微积分中, 三角函数的自变量 x 一般是弧度.

5. 反三角函数

反三角函数主要包括反正弦函数 $y = \arcsin x$ 、反余弦函数 $y = \arccos x$ 、反正切函数 $y = \arctan x$ 和反余切函数 $y = \text{arccot} x$ 等.

通常把由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的复合所得到的并能用一个解析式表达的函数, 称为初等函数. 例如, $y = \ln(\sin x + 4) + e^{2x}$, $y = \sqrt{\cos x + a^x}$ 就是初等函数.

初等函数的表达形式直接明了, 研究起来比较方便. 本书中讨论的函数主要是初等函数.

下面简单地介绍一下邻域的概念.

五、邻域

设 a 与 δ 是两个实数, 并且 $\delta > 0$, 把满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的全体实数 x 称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} = \{x \mid |x - a| < \delta\}$$

点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 如图 1-2 所示.

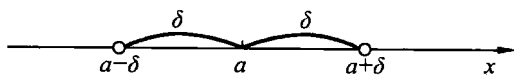


图 1-2

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离, 所以, $U(a, \delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

把满足不等式 $0 < |x-a| < \delta$ 的全体实数 x 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x-a| < \delta\}$$

习 题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x};$

(2) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2};$

(3) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}.$

2. 设 $\varphi(t) = t^3 + 1$, 求 $\varphi(t^2)$, $[\varphi(t)]^2$.

3. 证明: 函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数, 并求它的反函数.

4. 下列函数是由哪些函数复合而成的.

(1) $y = \sqrt{3x-1};$

(2) $y = \sin^2(1+2x);$

(3) $y = (1+\ln x)^5;$

(4) $y = \arctan(e^x);$

(5) $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}};$

(6) $y = \ln^2 \arccos(x^3).$

5. 指出下列函数哪些是初等函数.

(1) $y = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases};$

(2) $y = [x];$

(3) $y = x^x;$

(4) $y = \operatorname{sgn} x.$

6. 说明函数 $y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 表示同一函数的理由, 这函数是初等函数吗?

7. 利用 $y = \sin x$ 的图形作出下列函数的图形.

(1) $y = |\sin x|;$ (2) $y = \sin |x|;$ (3) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right).$

8. 半径为 R 的圆形铁片, 自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥, 试将这圆锥的体积表示为 α 的函数.

* 9. 证明: 定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数 $f(x)$ 均可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

* 10. 已知函数 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上有定义, 求 $\max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\}.$

第二节 数列的极限

在许多实际问题中,为了掌握变量的变化规律,仅仅通过有限次的算术运算是求不出来的,往往需要从它的变化过程来判断它的变化趋势.

例如,有一个变量,它开始时的值是 $\frac{1}{2}$,然后,其值是 $\frac{1}{3}$,接着,其值是 $\frac{1}{4}$,再接着,其值是 $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots$,如此无限地变下去,虽然是无穷尽的,但它的变化却有一个趋势,就是在它的变化过程中无限趋近于0.于是就说这个变量的极限是0.

又如,求圆的面积和圆周长.最初,人们只知道求多边形的面积和求直线段的长度,然而,通过极限的思想就可以解决这个问题.其方法是:在一个圆周内,作它的内接正多边形,这时正多边形的面积和周长都不会等于圆面积和圆周长.然而,只要正多边形的边数不断增加,这些正多边形的面积和周长必将随着边数的不断增加而不断地接近圆面积和圆周长.这个“不断接近”的过程就是一个极限过程,正所谓“割之弥细,失之越少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体而无所失矣.”

在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法,已成为高等数学中的一种基本方法,因此有必要作进一步的阐明.

先说明数列的概念. 一列无穷多个数

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

按次序一个接一个的排列下去,就叫做数列. 数列中的每一个数叫做数列的项,第 n 项 x_n 叫做数列的一般项或通项. 我们记这个数列为 $\{x_n\}$. 例如,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots$$

$$1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \dots, 1+\frac{1}{n}, \dots$$

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots$$

都是数列的例子,它们的一般项依次为

$$\frac{1}{n+1}, 1+\frac{1}{n}, n^2$$

按函数的定义,数列 $\{x_n\}$ 也可看作定义在正整数集合上的函数: $x_n = f(n)$,

当自变量 n 依次取 $1, 2, 3, \dots$ 等自然数时, 对应的函数值就排列成数列 $\{x_n\}$.

现在讨论这样一种数列 $\{x_n\}$, 在它的变化过程中, 随着 n 的不断增大, x_n 将无限趋近于一个常数. 例如, 数列 $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ 无限趋近于 0, 数列 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ 无限趋近于 1. 但数列 $\{n^2\}$ 却没有这样的特征.

现在, 以数列 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ 为例来讨论如何用数学语言表达“无限趋近于”. 所谓数列 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ 无限趋近于 1, 指的是随着 n 的不断增大, $1+\frac{1}{n}$ 与 1 之差的绝对值越来越接近 0, 也就是说, 当 n 增大时, $1+\frac{1}{n}$ 与 1 的差的绝对值将相当小.

进一步又可以说, 任意给定一个无论多么小的正数 ϵ , 当 n 充分大时, $1+\frac{1}{n}$ 与 1 之差的绝对值总会小于这个 ϵ , 甚至可以用下面的方法找到这样的 n : 为了使得

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}<\epsilon$$

成立, 需解此不等式, 即

$$n>\frac{1}{\epsilon}$$

即只要 $n>\frac{1}{\epsilon}$, 就能保证 $1+\frac{1}{n}$ 与 1 之差的绝对值小于这个任意给定的正数 ϵ .

概括起来就是: 对任意给定一个无论多么小的正数 ϵ , 只要 $n>\frac{1}{\epsilon}$, 就能保证 $1+\frac{1}{n}$ 与 1 之差的绝对值小于 ϵ , 这就意味着 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ 越来越接近 1. 略加抽象, 便得到数列极限的定义.

一、数列极限的定义

定义 1.2 设 $\{x_n\}$ 是一个数列, a 是常数. 对于任意给定的正数 ϵ (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n , 不等式

$$|x_n - a| < \epsilon$$

都成立, 则称常数 a 是数列 x_n 的极限, 或者称数列 x_n 收敛于 a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

或