

# 数学分析原理

第二卷 第二分册

格·马·菲赫金哥尔茨著

丁寿田译

---

人民教育出版社

# 数 学 分 析 原 理

第二卷 第二分册

格·马·菲赫金哥尔茨著

丁 寿 田 译

人 民 教 育 出 版 社

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的菲赫金哥尔茨 (Г. М. Фихтенгольц) 著“数学分析原理” (Основы математического анализа) 第二卷1957年第二版译出。

全书共二卷。第一卷及第二卷第一分册已有中译本,由本社出版。此系第二卷中译本的第二分册,内容是:线积分,二重积分,面积分,三重积分,多重积分,傅立叶级数及附录:数学分析进一步发展的简史。

本书可作为综合大学和师范学院数学系参考书。

### 简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少,本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷,定价相应减少20%。希鉴谅。

## 数 学 分 析 原 理

第二卷 第二分册

---

格·马·菲赫金哥尔茨著

丁寿田译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

---

统一书号 13012·0319 开本 787×1092 1/32 印张 8 4/16

字数 211,000 印数 23,501—223,500 定价(C) ¥0.64

1962年12月第1版 1979年2月北京第8次印刷

## 第二卷第二分册目录

### 第二十章 綫积分.....219

#### § 1. 第一型綫积分.....219

327. 第一型綫积分.....219

328. 化为寻常定积分.....221

329. 例.....223

#### § 2. 第二型綫积分.....226

330. 第二型綫积分定义.....226

331. 第二型綫积分的存在  
及其計算.....228

332. 閉路綫的情形。平面的  
定向法.....232

333. 例.....233

334. 两种类型綫积分間的  
关系.....236

335. 在物理問題上的应用...237

### 第二十一章 二重积分.....241

#### § 1. 二重积分定义及简单性质.....241

336. 柱体体积問題.....241

337. 化二重积分为累次积  
分.....242

338. 二重积分定义.....245

339. 二重积分存在条件.....246

340. 可积函数类.....248

341. 可积函数及二重积分  
的性质.....251

342. 积分作为可加性区域  
函数。对区域的微分法...254

#### § 2. 二重积分的計算.....256

343. 化矩形区域上的二重  
积分为累次积分.....256

344. 化曲綫区域上二重积  
分为累次积分.....261

345. 力学上的应用.....267

#### § 3. 格林公式.....271

346. 格林公式的推导.....271

347. 以綫积分表出面积.....274

#### § 4. 綫积分与积分路綫无关的 条件.....276

348. 沿简单閉界綫的积分...276

349. 沿連結任意两点的曲  
綫的积分.....278

350. 与恰当微分問題的联  
系.....280

351. 在物理問題上的应用...284

#### § 5. 二重积分的变数替换.....286

352. 平面区域的变换.....286

353. 以曲綫坐标表出面积...291

354. 补充說明.....294

355. 几何的推导法.....296

356. 二重积分中的变数更  
换.....299

357. 与单积分的相似。定向  
区域上的积分.....301

358. 例.....302

359. 史話.....305

### 第二十二章 曲面面积·面积 分.....308

#### § 1. 双侧曲面.....308

360. 曲面的参变表示法.....308

361. 曲面之側.....312

362. 曲面的定向法及其側  
的选定.....315

363. 逐段光滑曲面的情形...318

#### § 2. 曲面面积.....319

364. 希瓦尔兹的例.....	319	§ 4. 場論初步.....	374
365. 显式方程所給曲面的 面积.....	321	388. 数量与矢量.....	374
366. 一般情形的曲面面积.....	323	389. 数量場与矢量場.....	374
367. 例.....	326	390. 沿給定方向的导数. 梯度.....	375
§ 3. 第一型面积分.....	328	391. 通过曲面的矢量流量.....	378
368. 第一型面积分定义.....	328	392. 奥斯脫罗格拉德斯基 公式. 发散量.....	379
369. 化为寻常二重积分.....	329	393. 矢量的循环量. 斯托 克斯公式. 旋轉量.....	381
370. 第一型面积分在力学 上的应用.....	331	§ 5. 多重积分.....	384
§ 4. 第二型面积分.....	334	394. $m$ 維体的体积与 $m$ 重 积分.....	384
371. 第二型面积分定义.....	334	395. 例.....	385
372. 化为寻常二重积分.....	337	<b>第二十四章 傅立叶級数.....</b>	<b>388</b>
373. 斯托克斯公式.....	339	§ 1. 导言.....	388
374. 斯托克斯积分应用于 空間綫积分的研究.....	343	396. 周期量与調和分析.....	388
<b>第二十三章 三重积分.....</b>	<b>346</b>	397. 决定系数的欧拉-傅立 叶方法.....	391
§ 1. 三重积分及其計算.....	346	398. 直交函数系.....	394
375. 立体质量計算問題.....	346	§ 2. 函数的傅立叶級数展开式.....	396
376. 三重积分及其存在条 件.....	347	399. 問題的提出. 狄里希 萊积分.....	396
377. 可积分函数及三重积 分的性質.....	348	400. 基本預备定理.....	399
378. 三重积分的計算.....	350	401. 局部化原理.....	401
379. 力学上的应用.....	354	402. 函数的傅立叶級数表 示法.....	402
§ 2. 奥斯脫罗格拉德斯基公式.....	356	403. 非周期函数的情形.....	404
380. 奥斯脫罗格拉德斯基 公式.....	356	404. 任意区間的情形.....	406
381. 奥斯脫罗格拉德斯基 公式的几个应用实例.....	358	405. 只含余弦或只含正弦 的展开式.....	407
§ 3. 三重积分变数更換.....	362	406. 例.....	410
382. 空間区域的变換.....	362	407. 連續函数展开为三角 多项式級数.....	416
383. 体积表为曲綫坐标.....	364	§ 3. 傅立叶积分.....	418
384. 几何的推导法.....	368	408. 傅立叶积分作为傅立 叶級数的极限情形.....	418
385. 三重积分的变数更換.....	369		
386. 例.....	370		
387. 史話.....	373		

409. 预备说明.....	420
410. 用傅立叶积分表出函数.....	422
411. 傅立叶公式的种种形式.....	423
412. 傅立叶变换.....	425
§ 4. 三角函数系的封闭性与完备性.....	428
413. 函数的平均逼近. 傅立叶级数收敛的极值性质.....	428
414. 三角函数系的封闭性.....	431
415. 三角函数系的完备性.....	436
416. 广义封闭性方程.....	437
417. 傅立叶级数的逐项积分.....	437
418. 几何的解释.....	439
§ 5. 三角级数简史.....	444
419. 弦振动问题.....	444

420. 达朗贝尔及欧拉解法.....	445
421. 戴劳及但尼尔·贝努里的解法.....	447
422. 关于弦振动问题的争论.....	450
423. 函数的三角展开式. 系数的决定.....	451
424. 傅立叶级数收敛性证明及其他问题.....	453
425. 结尾语.....	455

附录 数学分析进一步发展概况.....457

I. 微分方程.....	457
II. 变分法.....	458
III. 复变函数论.....	462
IV. 积分方程论.....	465
V. 实变函数论.....	468
VI. 泛函分析.....	472

## 第二十章 綫积分

### § 1. 第一型綫积分

327. 第一型綫积分 我們通过一个力学問題来自然地导出这个新的积分概念。

設給了一条有长的简单<sup>①</sup>平面曲綫( $K$ )(图 8), 沿曲綫分布着質量, 并且已知曲綫上每点  $M$  处的綫性密度  $\rho(M)$ 。現在要來求全曲綫( $K$ )的質量  $m$ 。

为此我們在曲綫兩端  $A$  与  $B$  之間任意地插入一系列的点  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  (并将  $A$  写成

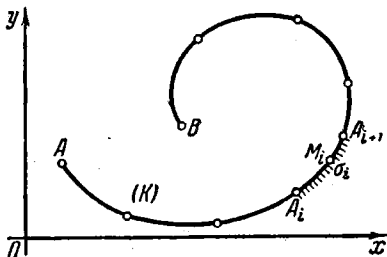


图 8.

$A_0$ ,  $B$  写成  $A_n$ , 以求記号一律)。为确定起見, 我們认为这些点是按  $A$  至  $B$  的方向标号码的; 当然, 采取相反的方向标号码也无妨碍。

在弧  $A_i A_{i+1}$  上任取一点  $M_i$ , 算出該点上的密度  $\rho(M_i)$ 。把这一段弧的每点上的密度都近似地算作相等而以  $\sigma_i$  表該弧之长, 則該弧的質量近似地为:

$$m_i \doteq \rho(M_i)\sigma_i,$$

而所求的全質量为

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

① 所謂简单曲綫是指这样的連續曲綫: 它由參变式給出, 而相应于每一点只有一个參变值; 在閉曲綫的情形則“閉合点”是例外: 它相应于两个極端參变值。

此式的誤差是由上面所作的近似假設而引起的。如所有各段弧长  $\sigma_i$  趨于 0 时这个誤差也趨于 0。

如此，以  $\lambda$  表弧长  $\sigma_i$  中最大者，則只要取极限就得出精确的公式：

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i) \sigma_i.$$

我們以一般形式来研究这种极限。現在撇开所考虑的力学問題而取一个任意的“点函数” $f(M) = f(x, y)$ ，它沿着一条有长連續平面曲綫( $K$ )<sup>①</sup>被給定，并重复上面所說的过程：将曲綫( $K$ )分成弧段(弧元素) $A_i A_{i+1}$ ，在每段上各任取一点  $M_i(\xi_i, \eta_i)$ ，而算出这些点上的函数值  $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$  并組成总和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \sigma_i;$$

它也是一种积分和。

此和在  $\lambda = \max \sigma_i$  趨于 0 时的有限极限称为函数  $f(M) = f(x, y)$  沿曲綫或路綫( $K$ )的第一型<sup>②</sup>綫积分而表成

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_{(K)} f(x, y) ds \quad (1)$$

(这里  $s$  是曲綫的弧长而  $ds$  象征长度元素  $\sigma_i$ )。

这极限过程的精确描述让讀者自己去做。

如此，前面所得物质曲綫的质量可以写成这样：

$$m = \int_{(K)} \rho ds. \quad (2)$$

特別指出的是，在上面的定义里路綫( $K$ )的方向不起作用。比

① 在此假設所依据的是直角坐标系。

② 这是和下面要讲的[§30段]第二型綫积分不同的。



方說, 当  $(K)$  不是封閉曲綫时  $(AB)$  和  $(BA)$  虽然是方向不同的曲綫, 但

$$\int_{(AB)} f(M) ds = \int_{(BA)} f(M) ds.$$

同样, 我們可以建立沿空間曲綫  $(K)$  的积分概念:

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_{(K)} f(x, y, z) ds \textcircled{1}.$$

这里没有什么新的原則性东西, 不需再詳加解釋了。

**328. 化为寻常定积分** 我們假設在曲綫  $(K)$  上两个可能方向中任意选定其一, 如此曲綫上每点  $M$  的位置可由弧长  $s = \overline{AM}$  来决定, 这里弧长是由点  $A$  算起的。于是曲綫  $(K)$  可由参变方程表出如下:

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq S),$$

而沿曲綫各点給定的函数  $f(x, y)$  就化为变数  $s$  的复合函数  $f(x(s), y(s))$ 。

如果以  $s_i (i = 0, 1, \dots, n)$  表示和弧  $AB$  上所选分点  $A_i$  相应的弧的值, 則显然  $\sigma_i = s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$ 。以  $\bar{s}_i$  表示决定点  $M_i$  的  $s$  值 (显然  $s_i \leq \bar{s}_i \leq s_{i+1}$ ), 于是可以看出綫积分中的积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i)) \Delta s_i,$$

同时也就是寻常定积分中的积分和, 如此我們立即有:

$$\int_{(K)} f(M) ds = (R) \int_0^S f(x(s), y(s)) ds \textcircled{2}, \quad (3)$$

而由一个积分的存在就可推出另一积分的存在。

① 所依据的是一个直角坐标系。函数  $f$  只在曲綫  $(K)$  的点上定义。

②  $(R)$  表示积分理解为寻常的黎曼积分。

特例，在函数  $f(M)$  連續<sup>①</sup>的时候，这个积分显然是存在的。今后我們也就假設所論函数总是連續的。

現在設曲綫  $(K)$  由任意參變方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leq t \leq T)$$

給出，而函数  $\varphi$  及  $\psi$  連同其導函数  $\varphi'$  及  $\psi'$  都連續；此外我們假設曲綫上沒有重點。于是該曲綫显然是有長的，并且如果弧  $s = \overline{AM} = s(t)$  隨參變數  $t$  一起增大，則

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

[201, 202 段]。在(3)式右边积分中作变量替換，立即得出：

$$\int_{(K)} f(M) ds = (R) \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (4)$$

如此，要計算第一型綫积分時須在被积函数中將變數  $x$  和  $y$  代以坐標的參變式同時  $ds$  也代以弧長微分的參變形式。

如果在參變數  $t$  增大時弧  $\overline{AM}$  變小，則只要改為弧  $\overline{MB}$ ，就可重新得出公式(4)。總之，無論曲綫的參變式如何，在這公式里右邊的积分下限必須小於上限。

在曲綫由顯式方程

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

給出的情形，則公式(4)變成：

$$\int_{(K)} f(M) ds = (R) \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad (5)$$

① 我們指的是在曲綫  $(K)$  的點上沿該曲綫的連續性。以“ $\epsilon$ - $\delta$ ”語言來說，這就表示，對  $\epsilon > 0$  可找到這樣一個  $\delta > 0$ ，使在  $\overline{MM'} < \delta$  ( $M$  及  $M'$  為曲綫上之點) 時  $|f(M') - f(M)| < \epsilon$ 。在此假設下只要  $x(s)$  和  $y(s)$  連續則對  $s$  複合函数  $f(x(s), y(s))$  也就連續。

这个关系式还可取另一形式, 在函数  $y(x)$  连同其导函数  $y'(x)$  都連續的假設之下曲綫  $(K)$  在每点上將有一定的与  $y$  軸不平行的切綫。以  $\alpha$  表切綫与  $x$  軸的交角, 得

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x), \quad |\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}.$$

所以

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_a^b \frac{f(x, y(x))}{|\cos \alpha|} dx. \quad (6)$$

在特例, 因为显然

$$\int_{(K)} ds = S,$$

(这里  $S$  表示曲綫  $(K)$  之全长) 于是

$$S = \int_a^b \frac{dx}{|\cos \alpha|}. \quad (7)$$

附注 公式(7)我們是以形式变换得出的。如果將曲綫弧长定义为外切(不是内接)折綫全长的极限, 則在曲綫以显式給出时这个定义將直接导至公式(7)。这一点讀者可以自己驗明。

329. 例 1) 設  $(K)$  是橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  在第一象限中的四分之一, 我們來計算

$$I = \int_{(K)} xy ds.$$

由橢圓参变式  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  出发我們有

$$x'_t = -a \sin t, \quad y'_t = b \cos t, \quad \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

計算可按公式(4)来进行:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot b \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{a^2 \frac{1 - \cos 2t}{2} + b^2 \frac{1 + \cos 2t}{2}} dt. \end{aligned}$$

这里我們令  $\cos 2t = z$ , 于是  $\sin 2t dt = -\frac{1}{2} dz$  而

$$I = \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}z} dz =$$

$$= \frac{ab}{4} \cdot \frac{2}{b^2-a^2} \cdot \frac{2}{3} \left[ \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}z \right]^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1 = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

附注 大多数經常遇到的曲綫(橢圓、双曲綫、正弦型曲綫等等)其弧长都不能表为初等函数,因为  $ds$  不能积分成有限的形式。但是对这些曲綫,

$\int_{(K)} f(x, y) ds$  这个积分却有时可以算是初等函数(如前例),这是因为乘上

了  $f(x, y)$  就改变了积分号下微分式的整个結構。

有关沿物質曲綫連續分布的質量問題可以很自然地导至这种类型的綫积分。

2) 我們在第十二章 [206 段] 曾經在“綫性密度”  $\rho=1$  的假設之下計算过平面曲綫对坐标軸的靜力矩以及其重心的坐标。讀者不难将那里所得公式推广到質量連續分布的一般情形。如果利用所引入的綫积分概念,則結果可写成下面的形状:

$$K_y = \int_{(K)} \rho x ds, \quad K_x = \int_{(K)} \rho y ds,$$

$$x_c = \frac{K_y}{m} = \frac{\int_{(K)} \rho x ds}{\int_{(K)} \rho ds}, \quad y_c = \frac{K_x}{m} = \frac{\int_{(K)} \rho y ds}{\int_{(K)} \rho ds}.$$

3) 我們还指出第一型綫性积分的一种应用——应用于物質曲綫对质点的引力問題。

我們知道,按牛頓定律,一个質量为  $m$  的质点  $M$  吸引一个質量为  $m_0$  的质点  $M_0$  时,引力的方向是由  $M_0$  至  $M$ , 引力的 size 則等于  $k \frac{mm_0}{r^2}$ , 这里  $r$  是距离  $M_0M$ , 而  $k$  是随所采用量度单位而定的系数,为簡單起見通常可算它等于 1。

如果一个质点  $M_0$  被一組質量各为  $m_1, m_2, \dots, m_n$  的质点  $M_1, M_2, \dots, M_n$  所吸引,則合力可由各质点的引力的几何加法得出。同时合力在諸坐标軸上的投影就等于各力的投影的代数和。

如果以  $X$  与  $Y$  表示合力在坐标軸上的投影,而以  $\theta$  表示分矢量  $\vec{r}_i = \overrightarrow{M_0M_i}$

与  $x$  轴的交角(图 9), 则显然

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \cos \theta_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \sin \theta_i,$$

这里  $r_i$  如惯例表示矢量  $\vec{r}_i$  之长。

现在设吸引质量沿曲线 ( $K$ ) 连续分布。为了计算引力我们将该曲线分段, 并且将每段的质量集中于在它上面任意选取的一点  $M_i$  上而求合力在坐标轴上的投影的近似值:

$$X \doteq \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i) \sigma_i}{r_i^2} \cos \theta_i,$$

$$Y \doteq \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i) \sigma_i}{r_i^2} \sin \theta_i,$$

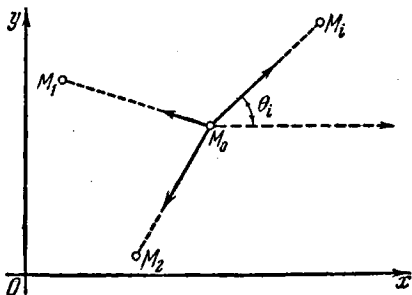


图 9.

因为在这情形各段的质量近似地等于  $\rho(M_i) \sigma_i$ 。如果令所有  $\sigma_i$  趋于 0, 则在极限情形得出精确的等式而总和变成了积分:

$$X = m_0 \int_{(K)} \frac{\rho(M) \cos \theta}{r^2} ds, \quad Y = m_0 \int_{(K)} \frac{\rho(M) \sin \theta}{r^2} ds; \quad (8)$$

这里  $r$  表示矢量  $\vec{r} = \vec{M}_0 M$  之长, 而  $\theta$  表示其与  $x$  轴所成之角。

例如我们来求一个均匀半圆周 ( $\rho = 1$ ) 对其中心处一个单位质量的引力。

将坐标原点取在半圆周的圆心而  $x$  轴通过其两端(图 10)。

由于对称性可推想到  $X = 0$ , 如此

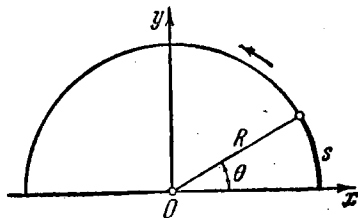


图 10.

只要找出投影  $Y$  就行了。按公式 (8)

$$Y = \int \frac{\sin \theta}{r^2} ds.$$

但在当前这情形  $r = R$  (半圆周的半径) 而  $ds = R d\theta$ 。所以

$$Y = \frac{1}{R} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{2}{R}.$$

## § 2. 第二型綫积分

**330. 第二型綫积分定义** 现在来討論实际上更重要的第二型綫积分的概念。我們在此直接由它的定义开始, 而其应用則等以后再詳[例如見 335 段]。設給定了一條簡單曲綫  $(AB)$  (暫假設它是非閉曲綫) 并設沿該曲綫又給定了一个函数  $f(x, y)$  <sup>①</sup>。將曲綫用  $A_i(x_i, y_i)$  諸点分为  $n$  段而在每段  $A_i A_{i+1}$  上任取一点  $M_i(\xi_i, \eta_i)$  并像以前一样算出該点上的函数值  $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ 。但此值这次不是乘以弧  $A_i A_{i+1}$  之长而是乘以此弧在坐标軸上的投影, 比方說,  $x$  軸上的投影  $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ ; 然后組成积分和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

此和在  $\mu = \max A_i A_{i+1}$  趋于 0 时的有限极限就叫做  $f(M) dx$  沿曲綫或路綫  $(AB)$  所取的(第二型)綫积分并用符号表为

$$I = \int_{(AB)} f(M) dx = \int_{(AB)} f(x, y) dx. \quad (1)$$

同样, 將  $f(M_i)$  值乘以弧  $A_i A_{i+1}$  在  $y$  軸上的投影  $\Delta y_i$  (而不是乘以  $\Delta x_i$ ) 并組成和式

$$\sigma^* = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta y_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i,$$

① 參閱 220 頁第一个底注。

則其極限即為  $f(M)dy$  的(第二型)綫積分:

$$I^* = \int_{(AB)} f(M)dy = \int_{(AB)} f(x, y)dy. \quad (2)$$

如果沿曲綫定義了兩個函數  $P(M) = P(x, y)$  及  $Q(M) = Q(x, y)$  並且存在積分

$$\int_{(AB)} P(M)dx = \int_{(AB)} P(x, y)dx,$$

$$\int_{(AB)} Q(M)dy = \int_{(AB)} Q(x, y)dy,$$

則它們的和也叫做綫積分(“一般形式”)而令

$$\int_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_{(AB)} P(x, y)dx + \int_{(AB)} Q(x, y)dy^{\text{①}}. \quad (3)$$

現在我們來比較兩種類型綫性積分的定義 [參閱本段(1)或(2)與 327 段(1)]. 兩個定義除明顯的相似之外還有重要的差異, 這我們再一次強調指出: 在第一型積分里組成積分和時函數值  $f(M_i)$  是乘以弧段  $A_i A_{i+1}$  之長  $\sigma_i = \Delta s_i$ , 而在第二型里則  $f(M_i)$  值是乘以該弧段在  $x$  軸(或  $y$  軸)上的投影  $\Delta x_i$  (或  $\Delta y_i$ ).

我們已經看到, 積分路綫  $(AB)$  的方向在第一型積分的情形不起作用, 因為弧  $A_i A_{i+1}$  之長  $\sigma_i$  與這方向無關. 第二型積分情形就不同了: 該弧在各坐標軸上的投影主要取決於弧的方向並且方向反過來時投影也就變正負號. 如此, 對第二型積分有

$$\int_{(BA)} f(x, y)dx = - \int_{(AB)} f(x, y)dx$$

同樣,

① 關於綫積分歷史考證讀者可查 350 段附注。

$$\int_{(BA)} f(x, y) dy = - \int_{(AB)} f(x, y) dy,$$

这里由一边积分的存在可推知另一边积分也存在。

用同样方式可建立沿空间曲线 (AB) (姑且说非封闭的) 的第二型线积分的概念。即, 如果函数  $f(M) = f(x, y, z)$  给定在此曲线的点上, 则我们如前组成“积分和”

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i$$

并且考虑它在  $\mu = \max \overline{A_i A_{i+1}}$  趋于 0 时的极限。这个极限就叫做  $f(M) dx$  的 (第二型) 线积分并用符号表为

$$\int_{(AB)} f(M) dx = \int_{(AB)} f(x, y, z) dx.$$

同样可定义积分:

$$\int_{(AB)} f(M) dy = \int_{(AB)} f(x, y, z) dy$$

及

$$\int_{(AB)} f(M) dz = \int_{(AB)} f(x, y, z) dz.$$

最后, 也可考虑“一般形式”的积分

$$\int_{(AB)} P dx + Q dy + R dz = \int_{(AB)} P dx + \int_{(AB)} Q dy + \int_{(AB)} R dz.$$

这里积分的正负号也随积分方向而改变。

最后注意寻常定积分的简单性质都不难搬到线积分上来; 对此不必细讲了。

331. 第二型线积分的存在及其计算 设曲线  $(K) = (AB)$  由参变方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (4)$$



給出，而  $\varphi$  和  $\psi$  是連續的并且參變數  $t$  由  $\alpha$  變至  $\beta$  時曲綫即依  $A$  至  $B$  的方向描出，沿曲綫  $(AB)$  的函數  $f(x, y)$  也假設是連續的<sup>①</sup>。

如果对积分(1)來說，則还須补充导函数  $\varphi'(t)$  存在并連續这个条件。

在这些假設之下綫积分(1)就存在并且成立等式

$$\int_{(AB)} f(x, y) dx = (R) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (5)$$

如此，要計算綫积分(1)，須在被积函數中將其變數  $x$  和  $y$  代以其參變表出式(4)，而  $dx$  則代以  $x$  的參變式的微分。在最后积分中积分限的次序要和曲綫上所选取的方向相应。

証明 設曲綫上所取的点  $A_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$  由參變數值  $t_i$  決定，而在弧  $A_i A_{i+1}$  上所选取的点  $M_i$  由參變數值  $\tau_i$  決定 (显然  $t_i \leq \tau_i \leq t_{i+1}$ )。于是积分和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i;$$

考慮到

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t) dt,$$

它可写成:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t) dt.$$

另一方面，(5)式中右边的积分<sup>②</sup>也可表为和的形式:

① 类似 222 頁底注中的話也适用于此，只是要将弧  $\widehat{MM'}$  代以弦  $MM'$ 。

② 因为被积函数連續，故該积分显然是存在的。