数学分析原理

第二卷　第二分册

格·马·菲赫金哥尔茨著
丁　寿　田　译

人　民　教　育　出　版　社

数 学 分 析 原 理

第二卷　第二分册

格·马·菲赫金哥尔茨著
丁 寿 田 译

人 民 教 育 出 版 社

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社《Государственное издательство технико-теоретической литературы》出版的菲赫金哥尔茨（Г. М. Фихтенгольц）著"数学分析原理"（Основы математического анализа）第二卷1957年第二版译出。

全书共二卷。第一卷及第二卷第一分册已有中译本，由本社出版。此系第二卷中译本的第二分册，内容是：线积分，二重积分，面积分，三重积分，多重积分，傅立叶级数及附录：数学分析进一步发展的简史。

本书可作为综合大学和师范学院数学系参考书。

简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

数学分析原理

第二卷　第二分册

格·马·菲赫金哥尔茨著

丁　寿　田　译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号　13012·0319　开本　787×1092　1/32　印张　8 4/16

字数　211,000　印数　23,501—223,500　定价(6)¥0.64

1962年12月第1版　1979年2月北京第8次印刷

第二卷第二分册目录

第二十章　綫积分

§1. 第一型綫积分

327. 第一型綫积分　我們通过一个力学問題来自然地导出这个新的积分概念。

設給了一条有长的簡单①平面曲綫(K)(图 8)，沿曲綫分布着質量，并且已知曲綫上每点M处的綫性密度$\rho(M)$。現在要来求全曲綫(K)的質量m。

为此我們在曲綫两端A与B之間任意地插入一系列的点$A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$(并将$A$写成$A_0$，$B$写成$A_n$，以求記号一律)。为确定起見，我們認为这些点是按$A$至$B$的方向标号碼的；当然，采取相反的方向标号碼也无妨碍。

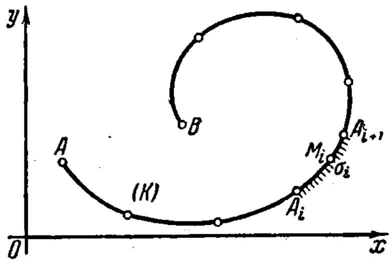

图　8.

在弧A_iA_{i+1}上任取一点M_i，算出該点上的密度$\rho(M_i)$。把这一段弧的每点上的密度都近似地算作相等而以σ_i表該弧之长，則該弧的質量近似地为：

$$m_i \doteq \rho(M_i)\sigma_i,$$

而所求的全質量为

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

---

① 所謂簡单曲綫是指这样的連續曲綫：它由参变式給出，而相应于每一点只有一个参变值；在閉曲綫的情形則“閉合点”是例外：它相应于两个极端参变值。

此式的誤差是由上面所作的近似假設而引起的。如所有各段弧长 σ_i 趋于 0 时这个誤差也趋于 0。

如此，以 λ 表弧长 σ_i 中最大者，则只要取极限就得出精确的公式：

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\rho(M_i)\sigma_i.$$

我們以一般形式来研究这种极限。現在撇开所考慮的力学問題而取一个任意的“点函数”$f(M)=f(x, y)$，它沿着一条有长連續平面曲綫(K)①被給定，并重复上面所說的过程：将曲綫(K)分成弧段（弧元素）A_iA_{i+1}，在每段上各任取一点$M_i(\xi_i, \eta_i)$，而算出这些点上的函数值 $f(M_i)=f(\xi_i, \eta_i)$并組成总和

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\sigma_i=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i;$$

它也是一种积分和。

此和在 $\lambda=\max\sigma_i$ 趋于 0 时的有限极限称为函数 $f(M)=$ $=f(x, y)$沿曲綫或路綫(K)的第一型②綫积分而表成

$$\int_{(K)}f(M)ds=\int_{(K)}f(x, y)ds \tag{1}$$

（这里 s 是曲綫的弧长而 ds 象征长度元素 σ_i）。

这极限过程的精确描述让讀者自己去做。

如此，前面所得物質曲綫的質量可以写成这样：

$$m=\int_{(K)}\rho ds. \tag{2}$$

特别指出的是，在上面的定义里路綫(K)的方向不起作用。比

① 在此假設所依据的是直角坐标系。

② 这是和下面要講的[330段]第二型綫积分不同的。

方說，当(K)不是封閉曲綫时(AB)和(BA)虽然是方向不同的曲綫，但

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(BA)} f(M)ds.$$

同样，我們可以建立沿空間曲綫(K)的积分概念：

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_{(K)} f(x, y, z)ds^{①}.$$

这里沒有什么新的原則性东西，不需再詳加解釋了。

328. 化为尋常定积分 我們假設在曲綫(K)上两个可能方向中任意选定其一，如此曲綫上每点M的位置可由弧长$s=\overset{\frown}{AM}$来决定，这里弧长是由点A算起的。于是曲綫(K)可由参变方程表出如下：

$$x=x(s),\quad y=y(s)\quad (0\leqslant s\leqslant S),$$

而沿曲綫各点給定的函数$f(x,y)$就化为变数s的复合函数$f(x(s), y(s))$.

如果以$s_i(i=0, 1, \cdots, n)$表示和弧AB上所选分点A_i相应的弧的值，則显然$\sigma_i=s_{i+1}-s_i=\Delta s_i$。以$\bar{s}_i$表示决定点$M_i$的$s$值(显然$s_i\leqslant\bar{s}_i\leqslant s_{i+1}$)，于是可以看出綫积分中的积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i))\Delta s_i,$$

同时也就是尋常定积分中的积分和，如此我們立即有：

$$\int_{(K)} f(M)ds = (R)\int_0^S f(x(s), y(s))ds^{②}, \tag{3}$$

而由一个积分的存在就可推出另一积分的存在。

---

① 所依据的是一个直角坐标系。函数f只在曲綫(K)的点上有定义。

② (R)表示积分理解为尋常的黎曼积分。

特例，在函数 $f(M)$ 連續①的时候，这个积分显然是存在的。今后我們也就假設所論函数总是連續的。

現在設曲綫 (K) 由任意参变方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T)$$

給出，而函数 φ 及 ψ 連同其导函数 φ' 及 ψ' 都連續；此外我們假設曲綫上沒有重点。于是該曲綫显然是有长的，并且如果弧 $s=\overset{\frown}{AM}=s(t)$ 随参变数 t 一起增大，則

$$s'(t)=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

[**201, 202** 段]。在(3)式右边积分中作变量替换，立即得出：

$$\int\limits_{(K)} f(M)ds=(R)\int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt. \qquad (4)$$

如此，要計算第一型綫积分时須在被积函数中将变数 x 和 y 代以坐标的参变式同时 ds 也代以弧长微分的参变形式。

如果在参变数 t 增大时弧 $\overset{\frown}{AM}$ 变小，則只要改为弧 $\overset{\frown}{MB}$，就可重新得出公式(4)。总之，无論曲綫的参变式如何，在这公式里右边的积分下限必須小于上限。

在曲綫由显式方程

$$y=y(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

給出的情形，則公式(4)变成：

$$\int\limits_{(K)} f(M)ds=(R)\int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx. \qquad (5)$$

---

① 我們指的是在曲綫 (K) 的点上沿該曲綫的連續性。以“ε-δ”語言來說，这就表示，对 $\varepsilon>0$ 可找到这样一个 $\delta>0$，使在 $\overset{\frown}{MM'}<\delta$（$M$ 及 M' 为曲綫上之点）时 $|f(M')-f(M)|<\varepsilon$。在此假設下只要 $x(s)$ 和 $y(s)$ 連續則对 s 复合函数 $f(x(s),y(s))$ 也就連續。

这个关系式还可取另一形式，在函数 $y(x)$ 連同其导函数 $y'(x)$ 都連續的假設之下曲綫 (K) 在每点上将有一定的与 y 軸不平行的切綫。以 α 表切綫与 x 軸的交角，得

$$\operatorname{tg}\alpha=y'(x),\quad |\cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}.$$

所以

$$\int\limits_{(K)} f(M)ds=\int\limits_a^b\frac{f(x,y(x))}{|\cos\alpha|}dx. \tag{6}$$

在特例，因为显然

$$\int\limits_{(K)} ds=S,$$

（这里 S 表示曲綫 (K) 之全长）于是

$$S=\int\limits_a^b\frac{dx}{|\cos\alpha|}. \tag{7}$$

附注　公式(7)我們是以形式变換得出的。如果将曲綫弧长定义为外切（不是內接）折綫全长的极限，則在曲綫以显式給出时这个定义将直接导至公式(7)。这一点讀者可以自己驗明。

329. 例　1) 設 (K) 是椭圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的四分之一，我們来計算

$$I=\int\limits_{(K)} xyds.$$

由椭圓参变式 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$ 出发我們有

$x'_t=-a\sin t$，$y'_t=b\cos t$，$\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}$.

計算可按公式(4)来进行：

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}dt.$$

这里我們令 $\cos 2t=z$，于是 $\sin 2tdt=-\frac{1}{2}dz$ 而

$$I=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z}\,dz=$$

$$=\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

附注 大多数經常遇到的曲綫（橢圓、双曲綫、正弦型曲綫等等）其弧长都不能表为初等函数，因为 ds 不能积分成有限的形式。但是对这些曲綫，$\int\limits_{(K)} f(x, y)ds$ 这个积分却有时可以算出是初等函数（如前例），这是因为乘上了 $f(x, y)$ 就改变了积分号下微分式的整个結构。

有关沿物質曲綫連續分布的質量問題可以很自然地导至这种类型的綫积分。

2）我們在第十二章［206 段］曾經在“綫性密度”$\rho=1$ 的假設之下計算过平面曲綫对坐标軸的靜力矩以及其重心的坐标。讀者不难将那里所得公式推广到質量連續分布的一般情形。如果利用所引入的綫积分概念，則結果可写成下面的形状：

$$K_y=\int\limits_{(K)}\rho x ds,\quad K_x=\int\limits_{(K)}\rho y ds,$$

$$x_c=\frac{K_y}{m}=\frac{\int\limits_{(K)}\rho x ds}{\int\limits_{(K)}\rho ds},\quad y_c=\frac{K_x}{m}=\frac{\int\limits_{(K)}\rho y ds}{\int\limits_{(K)}\rho ds}.$$

3）我們还指出第一型綫性积分的一种应用——应用于物質曲綫对質点的引力問題。

我們知道，按牛頓定律，一个質量为 m 的質点 M 吸引一个質量为 m_0 的質点 M_0 时，引力的方向是由 M_0 至 M，引力的大小則等于 $k\frac{mm_0}{r^2}$，这里 r 是距离 M_0M，而 k 是隨所采用量度单位而定的系数，为簡单起見通常可算它等于1。

如果一个質点 M_0 被一組質量各为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的質点 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 所吸引，則合力可由各質点的引力的几何加法得出。同时合力在諸坐标軸上的投影就等于各力的投影的代数和。

如果以 X 与 Y 表示合力在坐标軸上的投影，而以 θ_i 表示分矢量 $\overrightarrow{r_i}=\overrightarrow{M_0M_i}$

与 x 軸的交角(图 9), 則显然

$$X=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0 m_i}{r_i^2}\cos\theta_i,\quad Y=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0 m_i}{r_i^2}\sin\theta_i,$$

这里 r_i 如慣例表示矢量 $\vec{r_i}$ 之长。

現在設吸引質量沿曲綫 (K) 連續分布。为了計算引力我們将該曲綫分段, 并且将每段的質量集中于在它上面任意选取的一点 M_i 上而来求合力在坐标軸上的投影的近似值:

$$X\doteq\sum_{i}\frac{m_0\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\cos\theta_i,$$

$$Y\doteq\sum_{i}\frac{m_0\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\sin\theta_i,$$

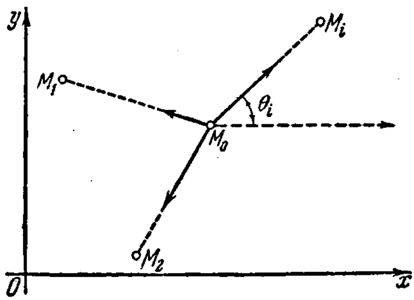

图 9.

因为在这情形各段的質量近似地等于 $\rho(M_i)\sigma_i$。如果令所有 σ_i 趋于 0, 則在极限情形得出精确的等式而总和变成了积分:

$$X=m_0\int_{(K)}\frac{\rho(M)\cos\theta}{r^2}ds,\quad Y=m_0\int_{(K)}\frac{\rho(M)\sin\theta}{r^2}ds;\tag{8}$$

这里 r 表示矢量 $\vec{r}=\overrightarrow{M_0M}$ 之长, 而 θ 表示其与 x 軸所成之角。

例如我們来求一个均匀半圓周($\rho=1$)对其中心处一个单位質量的引力。

将坐标原点取在半圓周的中心而 x 軸通过其两端(图 10)。

由于对称性可推想到 $X=0$, 如此

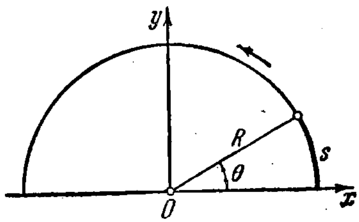

图 10.

只要找出投影 Y 就行了。按公式 (8)

$$Y=\int\frac{\sin\theta}{r^2}ds.$$

但在当前这情形 $r=R$(半圓周的半徑)而 $ds=Rd\theta$。所以

$$Y=\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\frac{2}{R}.$$

§2. 第二型綫积分

330. 第二型綫积分定义 現在来討論实际上更重要的第二型綫积分的概念。我們在此直接由它的定义开始，而其应用則等以后再講[例如見 335 段]。設給定了一条簡单曲綫 (AB) (暫假設它是非閉曲綫)并設沿該曲綫又給定了一个函数 $f(x,y)$①。将曲綫用 $A_i(x_i,y_i)$ 諸点分为 n 段而在每段 A_iA_{i+1} 上任取一点 $M_i(\xi_i,\eta_i)$ 并像以前一样算出該点上的函数值 $f(M_i)=f(\xi_i,\eta_i)$。但此值这次不是乘以弧 A_iA_{i+1} 之长而是乘以此弧在坐标軸上的投影，比方說，x 軸上的投影 $x_{i+1}-x_i=\Delta x_i$; 然后組成积分和

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\,\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i.$$

此和在 $\mu=\max A_iA_{i+1}$ 趋于0时的有限极限就叫做 $f(M)dx$ 沿曲綫或路綫 (AB) 所取的(第二型)綫积分并用符号表为

$$I=\int_{(AB)}f(M)dx=\int_{(AB)}f(x,y)dx. \tag{1}$$

同样，将 $f(M_i)$ 值乘以弧 A_iA_{i+1} 在 y 軸上的投影 Δy_i(而不是乘以 Δx_i)并組成和式

$$\sigma^*=\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\,\Delta y_i=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i,$$

---

① 参閱 220 頁第一个底注。

則其极限即为 $f(M)dy$ 的(第二型)綫积分:

$$I^* = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} f(M)dy = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} f(x, y)dy. \tag{2}$$

如果沿曲綫定义了两个函数 $P(M)=P(x, y)$ 及和 $Q(M)=$ $=Q(x, y)$ 并且存在积分

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} P(M)dx = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} P(x, y)dx,$$

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} Q(M)dy = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} Q(x, y)dy,$$

則它們的和也叫做綫积分(“一般形式”)而令

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} P(x, y)dx + \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} Q(x, y)dy^{①}. \tag{3}$$

現在我們来比較两种类型綫性积分的定义[参閱本段(1)或(2)与 **327** 段(1)]。两个定义除明显的相似之外还有重要的差异,这我們再一次强調指出: 在第一型积分里組成积分和时函数值 $f(M_i)$ 是乘以弧段 A_iA_{i+1} 之长 $\sigma_i=\Delta s_i$, 而在第二型里則 $f(M_i)$ 值是乘以該弧段在 x 軸(或 y 軸)上的投影 Δx_i(或 Δy_i)。

我們已經看到,积分路綫 (AB) 的方向在第一型积分的情形不起作用,因为弧 A_iA_{i+1} 之长 σ_i 与这方向无关。第二型积分情形就不同了: 該弧在各坐标軸上的投影主要取决于弧的方向并且方向反过来时投影也就变正負号。如此,对第二型积分有

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{BA})} f(x, y)dx = -\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} f(x, y)dx$$

同样,

① 关于綫积分历史考証讀者可查 350 段附注。

$$\int\limits_{(BA)} f(x,y)dy = -\int\limits_{(AB)} f(x,y)dy,$$

这里由一边积分的存在可推知另一边积分也存在。

用同样方式可建立沿空間曲綫 (AB)（姑且設非封閉的）的第二型綫积分的概念。即，如果函数 $f(M)=f(x, y, z)$ 給定在此曲綫的点上，則我們如前組成"积分和"

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i$$

幷且考虑它在 $\mu=\max \overline{A_iA_{i+1}}$ 趋于 0 时的极限。这个极限就叫做 $f(M)dx$ 的（第二型）綫积分幷用符号表为

$$\int\limits_{(AB)} f(M)dx = \int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dx.$$

同样可定义积分:

$$\int\limits_{(AB)} f(M)dy = \int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dy$$

及

$$\int\limits_{(AB)} f(M)dz = \int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dz.$$

最后，也可考虑"一般形式"的积分

$$\int\limits_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz = \int\limits_{(AB)} Pdx + \int\limits_{(AB)} Qdy + \int\limits_{(AB)} Rdz.$$

这里积分的正負号也随积分方向而改变。

最后注意寻常定积分的簡单性質都不难搬到綫积分上来；对此不必細講了。

331. 第二型綫积分的存在及其計算 設曲綫 $(K)=(AB)$ 由参变方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \tag{4}$$

給出，而φ和ψ是連續的并且参变数t由α变至β时曲綫即依A至B的方向描出，沿曲綫(AB)的函数$f(x,y)$也假設是連續的①。

如果对积分(1)来說，則还須补充导函数$\varphi'(t)$存在并連續这个条件。

在这些假設之下綫积分(1)就存在并且成立等式

$$\int_{(AB)} f(x,\ y)dx=(R)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt. \tag{5}$$

如此，要計算綫积分(1)，須在被积函数中将其变数x和y代以其参变表出式(4)，而dx則代以x的参变式的微分。在最后积分中积分限的次序要和曲綫上所选取的方向相应。

証明　設曲綫上所取的点$A_i(i=0,1,2,\cdots,n)$由参变数值t_i决定，而在弧A_iA_{i+1}上所选取的点M_i由参变数值τ_i决定（显然$t_i\leqslant\tau_i\leqslant t_{i+1}$）。于是积分和

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i;$$

考虑到

$$\Delta x_i=\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi'(t)dt,$$

它可写成:

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(\varphi(\tau_i),\ \psi(\tau_i))\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi'(t)dt.$$

另一方面，(5)式中右边的积分②也可表为和的形式:

---

① 类似222頁底注中的話也适用于此，只是要将弧$\overset{\frown}{MM'}$代以弦MM'。

② 因为被积函数連續，故該积分显然是存在的。