Jiaoxue Yu Ceshi

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

高二 数学

教学与测试

- 新教材
- 教师用书
- A方案
- 必修

苏州大学出版社

高二数学教学与测试

（A 方案 · 必修）

（教师用书）

苏州大学《中学数学月刊》编辑部　主编

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高二数学教学与测试. 教师用书(A方案)/苏州大学《中学数学月刊》编辑部主编. —2版. —苏州:苏州大学出版社,2002.6(2006.6重印)
必修
ISBN 7-81037-967-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. 苏… Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第034534号

敬告读者

为了便于读者识别盗版书,我社2006年印制的"中学教学与测试系列丛书",封面贴有"非常数码产品身份码标贴",正版图书刮开标贴,即可查证。

如有读者发现有盗印或销售盗版书的线索,请及时向当地新闻出版和工商行政管理部门举报,或向本社反映!

本社联系电话:0512-67258802 67258810

高二数学教学与测试
教师用书(A方案)
苏州大学《中学数学月刊》编辑部 主编
责任编辑 谢金海

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路200号 邮编:215021)
江苏省新华书店经销
海安县印刷总厂印装
(地址:海安县双楼镇 邮编:226671)

开本787×1092 1/16 印张24 字数596千
2002年6月第1版 2006年6月第10次修订印刷
ISBN 7-81037-967-4/G·416 定价:32.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512—67258835

目录

Contents

第六章　不 等 式

第七章　直线和圆的方程

第八章　圆锥曲线方程

第九章　直线、平面、简单几何体

第十章　排列、组合和概率

第六章 不 等 式

1. 不等式的性质(1)

一、基础训练题

1. 下列命题中正确的是 (C)

(A) 若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$

(B) 若 $a>b,c>d$,则 $a-c>b-d$ ×

(C) 若 $ab>0,a>b$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

(D) 若 $a>b,c<d$,则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ ×

$c<0$

2. 用“>”、“<”号填空:如果 $a>b>0>c$,那么 $\frac{c}{a}$ __>__ $\frac{c}{b}$.

3. 已知 $M=(x^2+1)^2,N=x^4+3x^2+1$,其中 $x\neq0$,则 M、N 的大小关系是 __$M<N$__.

$x^4+2x^2+1<N$

4. 若 $a<0,-1<b<0$,则 a,ab,ab^2 从小到大的排列为 __$a<ab^2<ab$__.

$a<0$ $0<ab<-a$

5. 当 $a>0>b,c<d<0$ 时,给出以下四个结论:①$ad<bc$;②$a+c^2>b+d^2$;③$a(b-c)>b(d-c)$.其中正确结论的序号是 __①,②__.

$a<ab^2<ab$

二、例 题

1. 已知 $a>2,b>2$,比较 $a+b$ 与 ab 的大小.

$ab-a-b=a(b-1)-(b-1)-1=\underbrace{(a-1)}_{>1}\underbrace{(b-1)}_{>1}-1>0$

$ab>(a+b)$

解法 1 $ab-(a+b)=ab-a-(b-1)-1=(b-1)(a-1)-1$. ∵ $a>2,b>2$.

∴ $a-1>1,b-1>1$,∴ $(a-1)(b-1)>1$. ∴ $(b-1)(a-1)-1>0$. ∴ $a+b<ab$.

解法 2 $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$,∵ $a>2,b>2$,∴ $\frac{1}{a}<\frac{1}{2},\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$.

∴ $\frac{1}{b}+\frac{1}{a}<1$,∴ $\frac{a+b}{ab}<1$,∴ $a+b<ab$.

$1+2x^4-2x^3-x^2=(x-1)(2x^3-x+1)$

2. 设 $A=1+2x^4,B=2x^3+x^2,x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq1$,求证:$A>B$.

$=2x^3(x-1)-(x+1)(x-1)$

$=(x-1)$

证明 ∵ $A-B=1+2x^4-(2x^3+x^2)=2x^4-2x^3-x^2+1=2x^3(x-1)-(x+1)(x-1)=(x-1)(2x^3-x-1)=(x-1)(2x^3-2x^2+2x^2-2x+x-1)=(x-1)^2(2x^2+2x+1)=(x-1)^2\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$ (*).

∵ $x\neq1$,∴ (*)>0,∴ $A-B>0$,即 $A>B$.

3. 设 $a>0$ 且 $a\neq1$,比较 $\log_a(a^3+1)$ 与 $\log_a(a^2+1)$ 的大小.

解 ∵ $a^3+1-(a^2+1)=a^2(a-1)$. ∴ 当 $a>1$ 时,$a^3+1>a^2+1$,∴ $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$,当 $0<a<1$ 时,$a^3+1<a^2+1$,∴ $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$,∴ 当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时,恒有 $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$.

三、思考题

已知 $f(x)=-x^3+1$,用函数单调性的定义证明:$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减.

证明 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,设 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=(-x_1{}^3+1)-(-x_2{}^3+1)=x_2{}^3-x_1{}^3=(x_2-x_1)(x_2{}^2+x_2x_2+x_1{}^2)$ (*).

$\because$ $x_1\neq x_2$,$\therefore$ x_1,x_2 中至少有一个不为零,不妨设 $x_2\neq 0$.

$\therefore$ $x_2{}^2+x_1x_2+x_1{}^2=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2{}^2>0$,又 $x_2-x_1>0$,$\therefore$ (*)>0.

$\therefore$ $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,由函数单调性定义知,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减.

四、说 明

1. $a\geqq b\Leftrightarrow a-b\geqq 0$,这一结论是推导不等式性质的依据,也是证明不等式的基本思路.关于不等式性质除了课本上讲授的五个定理外,还应熟悉如下性质:①$a>b,c<d\Rightarrow a-c>b-d$.②$a>b>0,\alpha>0\Rightarrow a^\alpha>b^\alpha$;$a>b>0,\alpha<0\Rightarrow a^\alpha<b^\alpha$.③$a>0,b>0$,则 $a\geqq b\Leftrightarrow\frac{a}{b}\geqq 1$.④$a>b>0,0<c<d\Rightarrow\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

当不等式两边乘方、开方或同乘以一个数(或式子)时,要特别注意不等号是否应改向.

2. 比较两个代数式的大小,作差法是最常用的方法,其一般步骤是作差→变形→判断大小→结论.

五、备用题

1. 若 x,y,z 互不相等,且 $x+y+z=0$,则

(A) 必有两数之和为负数　　(B) 必有两数之和为正数

(C) 必有两数之积为负数　　(D) 必有两数之积为正数 D

其中不正确的为 (D)

解 $\because$ x,y,z 互不相等,不妨设 $x>y>z$.由于 $x+y+z=0$,故 x 必为正数,z 必为负数,由 $0=x+y+z>y+z$,即知(A)正确.又由 $0=x+y+z<x+y$,即知(B)正确.又 $xz<0$,知(C)正确.若设 $x=3,y=0,z=-3$ 满足条件,但(D)不成立,故应选(D).

2. 若 $x\in(0,+\infty)$,则$\frac{x}{1+x^2}$ <u>$\leqslant$</u> $\frac{1}{2}$.

$2(\sqrt{2}-1)=\frac{2}{\sqrt{2}+1}>\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

解 $\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2}=\frac{-(x-1)^2}{2(1+x^2)}\leqslant 0$.

3. 比较 $2(\sqrt{3}-\sqrt{2}),\frac{1}{\sqrt{2}},2(\sqrt{2}-1)$ 的大小.　$2(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}<\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

解 $\because$ $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}<\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,又$\because$ $2(\sqrt{2}-1)=\frac{2}{\sqrt{2}+1}>\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\therefore$ $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\frac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-1)$.

$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<b^2<a^2$

4. 若 $-1<a<b<0$,试比较$\frac{1}{a},\frac{1}{b},a^2,b^2$ 的大小关系.

解 首先由于 a^2,b^2 是正数,$\frac{1}{a},\frac{1}{b}$是负数,所以只需比较 a^2 与 b^2 的大小,以及$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的大小.

$\because$ $-1<a<b<0$,$\therefore$ $-a>-b>0$,$\therefore$ $a^2>b^2>0$;$a<b<0$,$\therefore$ $a\cdot\frac{1}{ab}<b\cdot\frac{1}{ab}<0$,即$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$.

$\therefore$ $a^2>b^2>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

$-\frac{\pi}{2}<-\beta<\pi$

$-\frac{\pi}{6}-\pi<2\alpha-\frac{1}{3}\beta<\frac{\pi}{3}+\pi$ $-\frac{7}{6}\pi<\quad<\frac{4}{3}\pi$

5. 已知$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\pi<\beta<\frac{\pi}{2}$，求$2\alpha-\frac{1}{3}\beta$的取值范围.

解 $\because -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore -\pi<2\alpha<\pi$ ①. $\because -\pi<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore -\frac{\pi}{6}<-\frac{1}{3}\beta<\frac{\pi}{3}$ ②.

①＋②，得$-\frac{7}{6}\pi<2\alpha-\frac{1}{3}\beta<\frac{4}{3}\pi$，即$2\alpha-\frac{1}{3}\beta$的取值范围是$\left(-\frac{7}{6}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$.

6. 实数a,b,c,d满足下列三个条件：

(1) $d>c$；　(2) $a+b=c+d$；　(3) $a+d<b+c$.

$2a<2c$

$a<c<d<b$

请将a,b,c,d按照从小到大的次序排列，并证明你的结论.

解 $\because a+d<b+c$，$\therefore d-b<c-a$ ①. 又$\because a+b=c+d$，$\therefore c-a=b-d$ ②.

$\therefore$ 由①，②得$\begin{cases}d-b<b-d,\\a-c<c-a,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}d<b,\\a<c.\end{cases}$ 又$\because d>c$，$\therefore b>d>c>a$.

六、自我测试

1. 设$P=(x-3)(x-5)$，$Q=(x-4)^2$，则P,Q的大小关系是 (C)

(A) $P>Q$　(B) $P=Q$　(C) $P<Q$　(D) P,Q的大小与x的值有关

2. “$a\neq3$或$b\neq-1$”是“$a^2+b^2-6a+2b>-10$”的 (C)

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件　(C) 充要条件　(D) 既不充分又不必要条件

3. 若$a<b<0$，则下列不等式关系中，不能成立的是 (A)

(A) $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　(B) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　(C) $|a|>|b|$　(D) $a^2>b^2$

解 $\because \frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{a-(a-b)}{a(a-b)}=\frac{b}{a(a-b)}<0$，$\therefore$ 应选择(A).

4. 若$a^2+a<0$，则$a,a^2,-a,-a^2$从大到小的顺序是 $\underline{-a>a^2>-a^2>a}$.

5. 已知$a<b<0$，$c>0$，在空格处填上恰当的不等号或等号：

(1) $\frac{a}{b}$ $\underline{\ >\ }$ 1；$\frac{1}{a}$ $\underline{\ >\ }$ $\frac{1}{b}$；b^2 $\underline{\ <\ }$ a^2；a^3 $\underline{\ <\ }$ b^3；$|a|$ $\underline{\ >\ }$ $-b$.

(2) $c-a$ $\underline{\ >\ }$ $c-b$；若$ad>bd$，则d $\underline{\ <\ }$ 0；$b-a$ $\underline{\ =\ }$ $|a|-|b|$；$\sqrt{|a|}$ $\underline{\ >\ }$ $\sqrt{|b|}$；$\frac{a-b}{c}$ $\underline{\ <\ }$ $\frac{c}{b-a}$.

6. 给定命题：①$a>b$且$ab<0\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；②$\sqrt{a}>\sqrt{b}\Leftrightarrow a>b$；③$|a|<b\Leftrightarrow -b<a<b$；④$ac^2>bc^2\Leftrightarrow a>b$. 其中真命题的序号是 $\underline{③}$.

7. 设$a=x^2-2x+1$，$b=x^2-8x+16$. 且$3<x<4$，则$\sqrt{a}$与$\sqrt{b}$的大小关系为 $\underline{\sqrt{a}>\sqrt{b}}$.

解 $\because a=(x-1)^2$，$b=(x-4)^2$，由$3<x<4$，$\therefore \sqrt{a}=x-1$，$\sqrt{b}=4-x$.

$\therefore \sqrt{a}-\sqrt{b}=(x-1)-(4-x)=2x-5>0$，$\therefore \sqrt{a}>\sqrt{b}$.

8. 当$x_1<x_2<0$时，比较$\sqrt{1+x_1^2}$与$\sqrt{1+x_2^2}$的大小.

解 $\because \sqrt{1+x_1^2}-\sqrt{1+x_2^2}=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}}>0$($\because x_1<x_2<0$)，

$\therefore \sqrt{1+x_1^2}-\sqrt{1+x_2^2}>0$，$\therefore \sqrt{1+x_1^2}>\sqrt{1+x_2^2}$.

9. 当$a\neq-1$且$a\neq0$时，比较$\frac{1}{1+a}$与$1-a$的大小.

解 $\frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{1-(1-a^2)}{1+a}=\frac{a^2}{1+a}$，$\because a\neq0$，$\therefore a^2>0$. $\therefore$ 当 $a<-1$ 时 $\frac{a^2}{1+a}<0$，$\therefore \frac{a}{1+a}<1-a$；当 $-1<a<0$ 或 $a>0$ 时，$\frac{a^2}{1+a}>0$，$\therefore \frac{1}{1+a}>1-a$.

10. 已知 $0<x<1$，比较 $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$ 与 $(a+b)^2$ 的大小.

解 $\because \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}-(a+b)^2=\frac{1-x}{x}\cdot a^2+\frac{x}{1-x}\cdot b^2-2ab=\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}a-\sqrt{\frac{x}{1-x}}b\right)^2\geqslant0$

($\because 0<x<1$，$\therefore 1-x>0$). $\therefore \frac{a^2}{x}+\frac{xb^2}{1-x}-(a+b)^2\geqslant0$，即 $\frac{a^2}{x}+\frac{xb^2}{1-x}\geqslant(a+b)^2$.

11. 已知 $a>b>0$，$c<d<0$，$e<0$. 求证：$\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

证明 $\left.\begin{cases}a>b>0,\\c<d<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>b>0,\\-c>-d>0\end{cases}\Rightarrow a-c>b-d>0\Rightarrow\begin{matrix}(a-c)^2>(b-d)^2\\e<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

2. 不等式的性质(2)

一、基础训练题

1. 当 $a>b>c$ 时，则一定有 (B)

(A) $ab>ac$　(B) $(a-b)|c-a|>0$　(C) $a|c|>b|c|$　(D) $|ab|>|bc|$

2. 若 $x>0$，$y>0$，则 x^3+y^3 ___$\geqslant$___ x^2y+xy^2（填上适当的不等号）.

3. $\log_2 3$ 与 $\frac{3}{2}$ 的大小关系是 ___$\log_2 3>\frac{3}{2}$___.

解 $\because \log_2 3-\frac{3}{2}=\log_2 3-\frac{3}{2}\log_2 2=\log_2 3-\log_2\sqrt{8}=\log_2\sqrt{9}-\log_2\sqrt{8}>0$.

4. 若 $a>b$ 与 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 同时成立，则 a，b 应满足的条件为 ___$ab>0$___.

5. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid x>1$ 且 $y>1\}$，$N=\{(x,y)\mid x+y>2$ 且 $(x-1)(y-1)>0\}$，则集合 M 与 N 的关系是 ___$M=N$___.

解 $\because \begin{cases}x>1,\\y>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0,\\y-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(y-1)>0,\\(x-1)+(y-1)>0,\end{cases}$ $\therefore M=N$.

二、例　题

1. 已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$，且 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$. 求证：$\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}$.

证明 $\because a>0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$，由 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ 得 $ad>bc$，

$\therefore ad+cd>bc+cd$. 即 $d(a+c)>c(b+d)$. $\therefore \frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}$.

2. 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，比较 $2\sin2\alpha$ 与 $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ 的大小.

解 $\because 2\sin2\alpha-\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{4\sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\alpha)-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}(-4\cos^2\alpha+4\cos\alpha-1)=-\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}(2\cos\alpha-1)^2$ （*）. $\because \alpha\in(0,\pi)$，$\therefore \sin\alpha>0, 1-\cos\alpha>0, (2\cos\alpha-1)^2\geqslant0$，$\therefore$ （*）$\leqslant0$，$\therefore 2\sin2\alpha-\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\leqslant0$，即 $2\sin2\alpha\leqslant\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

3. 求证：$a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$.

证法 1（将差化成几个平方和） $(a^2+b^2)-(ab+a+b-1)=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2)=\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2]\geqslant0$，$\therefore a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$.

证法 2（将差看作 a 的二次三项式，再配成平方和） $(a^2+b^2)-(ab+a+b-1)=a^2-(b+1)a+b^2-b+1=\left(a-\dfrac{b+1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2-\dfrac{3}{2}b+\dfrac{3}{4}=\left(a-\dfrac{b+1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(b-1)^2\geqslant0$，$\therefore a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$.

证法 3（将差看作 a 的二次三项式，利用根的判别式证） 对于 a 的二次三项式 $a^2-(b+1)a+b^2-b+1$，$\Delta=(b+1)^2-4(b^2-b+1)=-3(b-1)^2\leqslant0$，又二次项系数为 1，故此二次三项式恒大于（或等于）零，即 $a^2-(b+1)a+b^2-b+1\geqslant0$，$\therefore a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$.

$\underbrace{-4\leq a-c\leq -1}_{f(1)}$ $\underbrace{-1\leq 4a-c\leq 5}_{f(2)}$

三、思考题

已知函数 $f(x)=ax^2-c$，$-4\leqslant f(1)\leqslant-1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant5$. 求 $f(3)$ 的取值范围.

$a=\frac{1}{3}(f(2)-f(1))$

解 由 $f(x)=ax^2-c$，$\therefore \begin{cases}f(1)=a-c,\\ f(2)=4a-c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}f(2)-\dfrac{1}{3}f(1),\\ c=\dfrac{1}{3}f(2)-\dfrac{4}{3}f(1).\end{cases}$

$c=\frac{1}{3}(f(2)-4f(1))$

$9a-c$

$\therefore f(3)=9a-c=\dfrac{8}{5}f(2)-\dfrac{5}{3}f(1)$，又 $-4\leqslant f(1)\leqslant-1$，$\therefore \dfrac{5}{3}\leqslant-\dfrac{5}{3}f(1)\leqslant\dfrac{20}{3}$.

$3f(2)-3f(1)-\frac{1}{3}f(2)+\frac{4}{3}f(1)$

同理 $-\dfrac{8}{3}\leqslant\dfrac{8}{3}f(2)\leqslant\dfrac{40}{3}$. $\therefore -1\leqslant\dfrac{8}{3}f(2)-\dfrac{5}{3}f(1)\leqslant20$. 即 $-1\leqslant f(3)\leqslant20$.

$\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$

$-\frac{8}{3}\leq\frac{8}{3}f(2)\leq\frac{40}{3}$ $-4\leq f(1)\leq 1$ $+\frac{5}{3}\leq-\frac{5}{3}f(1)\leq\frac{20}{3}$

四、说 明

$-1\leq\ \ \leq 20$

1. 比较法是证明不等式的基本方法，比较法可以采用差值比较法（简称求差法）或比值比较法（简称求商法）.

2. 使用比较法时，对式子进行变形是关键，通常情况下，通过因式分解，配方等手段，将复杂数学式的大小比较转化为简单数学式的大小比较. 具有一定的灵活性，对具体问题应作具体分析.

3. 要加强特殊化思想的应用，特别对大小比较的选择、填空题，取特殊值进行排除，不失为一个好办法.

五、备用题

1. 下列各式中，对任何实数 x 都成立的一个式子是 （C）

(A) $\lg(x^2+1)\geqslant\lg2x$ (B) $x^2+1>2x$ (C) $\dfrac{1}{x^2+1}\leqslant1$ (D) $x+\dfrac{1}{x}\geqslant2$

解 考虑 $x=-1$ 时的情况，可以排除选项(A)与(D). 再考虑 $x=1$ 时的情况又可排除(B)，从而应选择(C).

2. 若 $a\geqslant b, c\geqslant d$，则在：①$(a-d)^2<(b-c)^2$；②$(a-d)^3\geqslant(b-c)^3$；③$\sqrt{a-d}\geqslant\sqrt{b-c}$；④$(a-d)^{-1}>(b-c)^{-1}$中一定成立的是__②__.（写出序号即可）

解 ∵ $a\geqslant b, c\geqslant d$，∴ $a-d\geqslant b-c$. 但是 $a-d$ 与 $b-c$ 可以是正的，也可以是负的.
∴ ①，③及④都不一定成立，而②一定成立.

3. 已知 $1\leqslant a-b\leqslant 2, 2\leqslant a+b\leqslant 4$，求 $5a-b$ 的范围.

解 令 $5a-b=x(a-b)+y(a+b)=(x+y)a+(-x+y)b$.

∴ $\begin{cases}x+y=5,\\-x+y=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$ 又 $\begin{cases}3\leqslant 3(a-b)\leqslant 6, & ①\\4\leqslant 2(a+b)\leqslant 8. & ②\end{cases}$

①+②得 $7\leqslant 5a-b\leqslant 14$.

4. 已知：$a^3>b^3, ab>0$，求证：$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

证明 ∵ $a^3>b^3$，∴ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)>0$. 又∵ $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$，

∴ $a-b>0$，即 $a>b$. 又 $ab>0$，∴ $\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$，即 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

5. 已知 $f(x)=\lg\frac{10^x+10^{-x}}{2}$，当 $x>0$ 时，试比较 $f(x+1)$ 与 $f(x)+f(1)$ 的大小.

解 $f(x+1)=\lg\frac{10^{x+1}+10^{-x-1}}{2}$，$f(x)+f(1)=\lg\frac{(10^x+10^{-x})(10+10^{-1})}{4}$.

∵ $\frac{10^{x+1}+10^{-x-1}}{2}-\frac{(10^x+10^{-x})(10+10^{-1})}{4}=\frac{1}{4}[10^{x+1}+10^{-x-1}-10^{x-1}-10^{1-x}]$

$=\frac{1}{4}[10^x(10-10^{-1})+10^{-x}(10^{-1}-10)]=\frac{1}{4}(10^x-10^{-x})(10-10^{-1})>0$（∵ $x>0$），

∴ $\frac{10^{x+1}+10^{-x-1}}{2}>\frac{(10^x+10^{-x})(10+10^{-1})}{4}$，∴ $f(x+1)>f(x)+f(1)$.

6. 在等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$中，$a_1=b_1=a>0, a_3=b_3>0, a_1\neq a_3$. 试比较 a_5 与 b_5 的大小.

解 设等差数列的公差为 d，等比数列的公比为 q.
∵ $a_3=b_3$，∴ $a+2d=aq^2, 2d=aq^2-a$，∴ $a_5-b_5=a+4d-aq^4=a+2(aq^2-a)-aq^4=-a(q^2-1)^2$.
∵ $a_1\neq a_3$，∴ $q^2\neq 1$，∴ $-a(q^2-1)^2<0$，∴ $a_5<b_5$.

六、自我测试

1. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，那么下列命题正确的是 (C)

(A) $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$　　(B) $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\Rightarrow a>b$

(C) $\left.\begin{matrix}a^3>b^3\\ab<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　(D) $\left.\begin{matrix}a^2>b^2\\ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

解 考虑 $c=0$ 及 $c<0$ 的情况，可以排除选项(A)与(B). 而 $a=-2$ 与 $b=-1$ 时，符合选项(D)的条件但得不出其结论，从而应选择(C). 其实我们也可以直接推导选项(C)是正确的.

2. 已知 $c<0$，则下列不等式中成立的是 (C)

(A) $c>2^c$　　(B) $c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$　　(C) $2^c<\left(\frac{1}{2}\right)^c$　　(D) $2^c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$

3. 若 $a<b, c<d$，且 $(c-a)(c-b)>0, (d-a)(d-b)<0$，则 (D)

(A) $a<c<d<b$　　(B) $c<a<b<d$　　(C) $a<c<b<d$　　(D) $c<a<d<b$

解 由已知条件 $(c-a)(c-b)>0$ 可知 $c<a$ 或 $c>b$；
由已知条件 $(d-a)(d-b)<0$ 又可知 $a<d<b$. 又∵ $c<d$，∴ $c<a<d<b$，应选择(D).

4. 若 $x_1>2,x_2>2$,则 x_1+x_2 与 x_1x_2 的大小关系为 <u>$x_1+x_2<x_1x_2$</u>.

解 $x_1>2,x_2>2$,则 $x_1-2>0,x_2-2>0$,∴ $(x_1-2)(x_2-2)>0$,∴ $x_1x_2+4>2(x_1+x_2)$.
又∵ $x_1x_2>4$,∴ $2x_1x_2>x_1x_2+4>2(x_1+x_2)$,∴ $x_1x_2>x_1+x_2$.

5. 用适当的符号连接下列各式:

(1) $\frac{2x}{1+x^2}$ <u>$<$</u> $1(x\in(0,+\infty)$ 且 $x\neq1)$;

(2) $\log_a(1+a)$ <u>$>$</u> $\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)(a>0$ 且 $a\neq1)$;

(3) $(1-a)^{\frac{1}{3}}$ <u>$>$</u> $(1-a)^{\frac{1}{2}}(0<a<1)$.

6. 若 $x^2+x<0$,则 $x^2,x,-x^2,-x$ 从小到大排列的顺序是 <u>$x<-x^2<x^2<-x$</u>.

解 ∵ $x^2+x<0$,∴ $-1<x<0$,且 $x^2<-x,x<-x^2$,∴ $x<-x^2<x^2<-x$.

7. 填上适当的条件,使命题成立.命题:若 $a>b>0$ 且 <u>$x>0>y$ 或 $0<x<y$</u>,则 $\frac{a}{x}>\frac{b}{y}$.

8. 已知函数 $g(x)=2^x-1$,它的反函数为 $y=f(x)$.设 $a>b>0$,试比较 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的大小.

解 ∵ $g(x)=2^x-1$,∴ 它的反函数为 $f(x)=\log_2(x+1)(x>-1)$,∵ $a>b>0$,∴ $a+1>b+1>0$,根据对数函数的单调性知 $\log_2(a+1)>\log_2(b+1)$,∴ $f(a)>f(b)$.

9. 如果 $30<x<42,16<y<24$,求证:$-18<x-2y<10$.

证明 ∵ $30<x<42,16<y<24$,∴ $-48<-2y<-32$,
∴ $30-48<x-2y<42-32$,∴ $-18<x-2y<10$.

10. 已知 $a,d\in\mathbf{R},d\neq0$,比较 $(a-d)^3+(a+d)^3$ 与 $2a^3$ 的大小.

证明 ∵ $(a-d)^3+(a+d)^3-2a^3=[(a-d)+(a+d)][(a-d)^2-(a-d)(a+d)+(a+d)^2]-2a^3=2a(a^2+3d^2)-2a^3=6ad^2$.∵ $a,d\in\mathbf{R},d\neq0$.∴ $d^2>0$.∴ 当 $a>0$ 时,$(a-d)^3+(a+d)^3>2a^3$;
当 $a=0$ 时,$(a-d)^3+(a+d)^3=2a^3$;当 $a<0$ 时,$(a-d)^3+(a+d)^3<2a^3$.

11. 已知 a,b 为正数,$n\in\mathbf{N}^*$,求证:$\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

证明
$$\left(\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{b^{n-1}}{a^n}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{a^{n-1}}{b^n}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{b^n}$$
$$=(a^{n-1}-b^{n-1})\cdot\left(\frac{1}{b^n}-\frac{1}{a^n}\right)=\frac{(a^n-b^n)(a^{n-1}-b^{n-1})}{a^nb^n}.\quad(*)$$

(1) 若 $n=1$,则($*$)式为零,原不等式取“=”;

(2) 若 $n\geqslant2$,则当 $a>b>0$ 时,$a^n>b^n$ 且 $a^{n-1}>b^{n-1}$,($*$)式大于零;
当 $0<a<b$ 时,$a^n<b^n$ 且 $a^{n-1}<b^{n-1}$,($*$)式仍大于零;当 $a=b$ 时,($*$)式等于零.

综上知,$\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$,$a=b$ 或 $n=1$ 时不等式中等号成立.

3. 算术平均数与几何平均数

一、基础训练题

1. 已知 a,b 是正数，$\frac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$和 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$的大小顺序是 (D)

(A) $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　　(B) $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\sqrt{ab}$

(C) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{a+b}{2}$　　(D) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$

2. 设 $f(x)=x+\frac{2}{x}+2(x>0)$，$f(x)$的值域为 $\underline{[2+2\sqrt{2},+\infty)}$.

3. 设 $x<0$，则函数 $y=3+3x+\frac{1}{x}$的最大值是 $\underline{3-2\sqrt{3}}$.

4. 若 $\lg x+\lg y=2$，则$\frac{x+y}{xy}$的最小值为 $\underline{\frac{1}{5}}$.

5. 若 x,y 是正数，且$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$，则 xy 有最$\underline{\text{小}}$值(填大或小)为$\underline{16}$.

二、例　题

1. 已知函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq1,x\neq0)$有下列判断：①函数的值域是$[2,+\infty)$；②当 $x>0$ 时，$f(x)$有最小值 2；③当 $x<0$ 时，$f(x)\in(-\infty,-2]$；④$|f(x)|$的函数值一定不小于 2. 其中正确判断的序号为 $\underline{③、④}$ (将你认为正确的序号都填上).

说明　应用算术平均数与几何平均数的关系这个重要不等式研究函数最值时，一定要注意“一正二定三相等”.

2. 已知正数 x,y 满足 $x+y=1$.

(1) 求$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$的最小值；　(2) 求 $xy+\frac{1}{xy}$的最小值.

解　(1) $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2(x+y)}{x}+\frac{x+y}{y}=2+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}+1=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant3+2\sqrt{2}$，当且仅当$\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$，

即 $x=2-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}-1$ 时，上述不等式中等号成立. ∴ $\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)_{\min}=3+2\sqrt{2}$.

说明　本例易出现如下错解：

$$\left.\begin{array}{l}1=x+y\geqslant2\sqrt{xy}\\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqslant2\sqrt{\frac{2}{xy}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqslant2\sqrt{xy}\cdot2\sqrt{\frac{2}{xy}}=4\sqrt{2}$$，由此错误地认为$\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)_{\min}=4\sqrt{2}$.

还可用消元或换元法给出本例的其它解法.

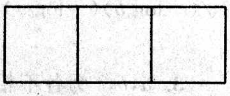
(2) 令 $xy=t$，则由 $1=x+y\geqslant2\sqrt{xy}$，知 $0<t\leqslant\frac{1}{4}$.

因 $xy+\frac{1}{xy}=t+\frac{1}{t}\geqslant2$，但取“=”时 $t=1\notin\left(0,\frac{1}{4}\right]$，故均值不等式“失灵”.

此时，可以证明 $t+\frac{1}{t}$在$\left(0,\frac{1}{4}\right]$上为减函数(证略)，从而 $xy+\frac{1}{xy}$的最小值为$\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$.

说明　运用均值不等式求最值等号不成立时，常考虑用函数的单调性求最值.

3. 某工厂拟建一座平面图为矩形且面积为 400 平方米的三级污水处理池，平面图如右图所示. 池外圈建造单价为每米 200 元，中间两条隔墙建造单价每米 250 元，池底建造单价为每平方米 80 元（池壁的厚度忽略不计，且池无盖）.



(1) 试设计污水池的长和宽，使总造价最低，并求出最低造价；

(2) 若受场地限制，长与宽都不能超过 25 米，则污水池的最低造价为多少？

解　(1) 设污水池的长为 x，则宽为 $\frac{400}{x}$，总造价

$$y=\left(2x+2\cdot\frac{400}{x}\right)\cdot 200+2\cdot 250\cdot\frac{400}{x}+80\times 400=400\left(x+\frac{900}{x}\right)+32\,000$$

$$\geqslant 400\cdot 2\sqrt{x\cdot\frac{900}{x}}+32\,000=56\,000(\text{元})$$，当且仅当 $x=\frac{900}{x}$，即 $x=30$ 时取等号.

答：污水池的长为 30 米、宽为 $\frac{40}{3}$ 米时，最低总造价为 56 000 元.

(2) $\because$ $x\leqslant 25$ 且 $\frac{400}{x}\leqslant 25$，$\therefore$ $16\leqslant x\leqslant 25$.

而总造价 $y=f(x)$ 在 $[16,25]$ 上为减函数，$\therefore$ $y_{\min}=f(25)=56\,400$(元).

答：污水池的长为 25 米、宽为 16 米时，最低总造价为 56 400 元.

三、思考题

已知方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根 $x_1>0$，求证：方程 $cx^2+bx+a=0$ 必有一根 x_2，使得 $x_1+x_2\geqslant 2$.

证明　$\because$ $x_1>0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，$\therefore$ $ax_1{}^2+bx_1+c=0$，两边除以 $x_1{}^2$，得 $\frac{c}{x_1{}^2}+\frac{b}{x_1}+a=0$.

$\therefore$ $\frac{1}{x_1}$ 是方程 $cx^2+bx+a=0$ 的根，即 $x_2=\frac{1}{x_1}$. $\therefore$ $x_1+x_2=x_1+\frac{1}{x_1}\geqslant 2$.

四、说　明

1. 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数这一结论有多种表述形式，如：

$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$，$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$.

2. 两个正数的和为常数，则它们的积有最大值；两个正数的积为常数，则它们的和有最小值. 这两个结论常常应用于求解最值问题. 在具体应用时，要注意“一正、二定、三相等”.

3. 将要求最值的函数变形，使其符合“一正、二定、三相等”的条件从而求出最值是常用方法，要熟悉常见的变形.

五、备用题

1. 设 $x>0$，$y>0$，且 $x+y\leqslant 4$，则有　(B)

(A) $\frac{1}{x+y}\leqslant\frac{1}{4}$　(B) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 1$　(C) $\sqrt{xy}\geqslant 2$　(D) $\frac{1}{xy}\geqslant 1$

解　$4\geqslant x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，$\therefore$ $\sqrt{xy}\leqslant 2$，$xy\leqslant 4$，$\frac{1}{xy}\geqslant\frac{1}{4}$. 而 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}\geqslant\frac{2\sqrt{xy}}{xy}=\frac{2}{\sqrt{xy}}\geqslant\frac{2}{2}=1$，当且仅当 $x=y$ 且 $xy=4$，即 $x=y=2$ 时取等号. $\therefore$ 选(B).

2. 当 $a>1$，$0<b<1$ 时，$\log_a b+\log_b a$ 的范围是 $\underline{\ (-\infty,-2]\ }$.

解 ∵ $a>1,0<b<1$，∴ $\log_a b<0,\log_b a<0$，∴ $-\log_a b>0,-\log_b a>0$，∴ $-\log_a b-\log_b a\geqslant 2\sqrt{(-\log_a b)(-\log_b a)}=2$，当且仅当 $b=\frac{1}{a}$ 时取等号. ∴ $\log_a b+\log_b a\leqslant -2$.

3. a,b,c 为各不相等的正数，且 $a+b+c=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的范围是 $\underline{(9,+\infty)}$.

解 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)>9$（注意 a,b,c 不全相等，故不能同时取等号），∴ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的范围是 $(9,+\infty)$.

4. 若 $x+2y=1$，求 2^x+4^y 的最小值.

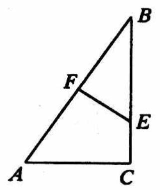
解 $2^x+4^y=2^x+2^{2y}\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot 2^{2y}}=2\cdot 2^{\frac{x+2y}{2}}=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $2^x=2^{2y}$，即 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{4}$ 时，2^x+4^y 取最小值 $2\sqrt{2}$.

5. $a,b,c\in(0,+\infty)$，求证：(1) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}$； (2) $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

证明 (1) ∵ $\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{4}\geqslant 0$（当 $a=b$ 时等号成立），∴ $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，因不等式两边均为非负实数，∴ $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\left|\frac{a+b}{2}\right|=\frac{a+b}{2}$.

(2) 由(1)得 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$，同理 $\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$，$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$，三不等式相加，即得 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$，等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$. 一条直线分 $\triangle ABC$ 的面积为相等的两部分，且夹在 AB 与 BC 之间线段 EF 为最短，求 EF 长.



解 设 $BE=x$，$BF=y$，则由 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，得 $\frac{1}{2}xy\sin B=3$，$\frac{1}{2}xy\cdot\frac{3}{5}=3$，$xy=10$. $EF^2=x^2+y^2-2xy\cos B=x^2+y^2-20\times\frac{4}{5}\geqslant 2xy-16=2\times 10-16=4$，当 $x=y=\sqrt{10}$ 时取等号. ∴ $EF_{\min}=2$ 即为所求.

六、自我测试

1. 若 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a+b=3$，则 2^a+2^b 的最小值为 (B)

(A) 6 (B) $4\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{6}$

解 $2^a+2^b\geqslant 2\sqrt{2^{a+b}}=4\sqrt{2}$.

2. “$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$”是“$a>0,b>0$”的 (B)

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分又不必要条件

提示 $a=b=0$，也有 $a+b\geqslant\sqrt{ab}$.

3. 若 $0<x<1$，则 $x(3-3x)$ 取最大值时，x 等于 (B)

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{2}{3}$

4. 若 $\lg x+\lg y=1$，则 $\frac{5}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值为 $\underline{\ 2\ }$.

解 ∵ $xy=10$，∴ $\frac{5}{x}+\frac{2}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{5}{x}\cdot\frac{2}{y}}=2$.

5. 若正数 a,b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的取值范围是 <u>$[9,+\infty)$</u>.

解 ∵ $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，∴ $ab\geqslant 2\sqrt{ab}+3$，$(\sqrt{ab})^2-2\sqrt{ab}-3\geqslant 0$，$(\sqrt{ab}+1)(\sqrt{ab}-3)\geqslant 0$，

∴ $\sqrt{ab}\geqslant 3$，$ab\geqslant 9$.

6. 设 $x>0$，则函数 $y=\frac{(x+2)(x+8)}{x}$ 的最小值为 <u>18</u>.

解 ∵ $y=\frac{(x+2)(x+8)}{x}=\frac{x^2+10x+16}{x}=x+\frac{16}{x}+10\geqslant 2\sqrt{16}+10=18$，

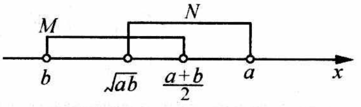
等号当且仅当 $x=\frac{16}{x}$ 时，即 $x=4$ 时成立，∴ 所求的函数的最小值为 18.

7. 已知 $b<a<0$，给出下列不等式：① $-a>-b$；② $a+b<ab$；③ $|a|>|b|$；④ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$. 其中正确的不等式有 <u>2</u> 个.

提示 ②、④正确.

8. 已在 $a>b>0$，全集 $I=\mathbf{R}$；$M=\left\{x\mid b<x<\frac{a+b}{2}\right\}$，$N=\{x\mid\sqrt{ab}<x<a\}$，求 $M\cap \complement_{\mathbf{R}}N$.

解 由 $0<b<a$，得 $b<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<a$. 又∵ $\complement_{\mathbf{R}}N=\{x\mid x\leqslant\sqrt{ab}$ 或 $x\geqslant a\}$，∴ $M\cap\complement_{\mathbf{R}}N=\{x\mid b<x\leqslant\sqrt{ab}\}$.



9. 已知正数 x,y 满足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，求 $2x+y$ 的最小值.

解 ∵ $2x+y=(2x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=3+\frac{2x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=3+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{2x}{y}=\frac{y}{x}$，即 $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=\sqrt{2}+1$ 时，不等式中等号成立，∴ $(2x+y)_{\min}=3+2\sqrt{2}$.

10. 建造一个容积为 8m^3，深为 2m 的长方体无盖水池，如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元，求水池的最低总造价.

解 设长方体的底面边长分别为 am 和 bm，则水池容积为 $2ab=8$，即 $ab=4$ 为定值. 水池的总造价 $y=4(a+b)\cdot 80+120ab=320(a+b)+480\geqslant 320\cdot 2\sqrt{ab}+480=1\,280+480=1\,760$（元）. 即当 $a=b=2$m 时，最低总造价为 1 760 元.

11. 已知正数 a,b，且 $4a^2+b^2=4$，求 $y=\sqrt{a^2(1+b^2)}$ 的最大值.

解 ∵ $y=\sqrt{a^2(1+b^2)}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2(1+b^2)}$，而 $\sqrt{4a^2(1+b^2)}\leqslant\frac{4a^2+1+b^2}{2}=\frac{5}{2}$，

∴ $y=\sqrt{a^2(1+b^2)}$ 的最大值为 $\frac{5}{4}$.

4. 不等式的证明(1)

一、基础训练题

1. 已知 a,b,c 为不全相等的实数，$P=a^2+b^2+c^2+3$，$Q=2(a+b+c)$，那么 P 与 Q 的大小关系是 (A)

(A) $P>Q$　　(B) $P\geqslant Q$　　(C) $P<Q$　　(D) $P\leqslant Q$

2. 已知 $x\neq y$，用不等号连接下列两式：x^4+y^4 __$>$__ x^3y+xy^3.

3. 设 $a>b>0$，则 $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ __$<$__ $\sqrt[3]{a-b}$.(填“$>$”或“$<$”)

提示 两边三次方后作差或取特殊值，如 $a=8,b=1$.

4. 下列命题中，正确的序号是__③，④，⑤，⑥__.

① 若 $a>b,c=d$，则 $ac^2>bd^2$；　　② 若 $a>b$，且 $ab<0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

③ 若 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$，$n\in\mathbf{N}$，$n>1$，则 $a>b$；　　④ 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$；

⑤ 若 $a>b>c$，$a+b+c=0$，则 $ab>ac$，$ac<bc$.　　⑥ 若 $a>b$，则 $ac^2\geqslant bc^2$.

5. 若 a,b 是不等的正数，则 ab^k+a^kb 与 $a^{k+1}+b^{k+1}(k\in\mathbf{N}^*)$ 的大小关系是__$ab^k+a^kb<a^{k+1}+b^{k+1}$__.

提示 作差或取特殊值如 $a=2,b=1,k=1$.

二、例　题

1. 已知 $a\neq 2$，求证：$\frac{4a}{4+a^2}<1$.

证明 $\frac{4a}{4+a^2}-1=\frac{4a-4-a^2}{4+a^2}=-\frac{a^2-4a+4}{4+a^2}=-\frac{(a-2)^2}{4+a^2}$.

$\because a\neq 2$，$\therefore (a-2)^2>0$，$4+a^2>0$，$\therefore \frac{4a}{4+a^2}-1<0$ 即 $\frac{4a}{4+a^2}<1$.

注 不等式的证明，从开始注意养成学生规范化的表述.

2. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，求证：$a^2+b^2+1>ab+a$.

证明 1 $\because a^2+b^2+1-(ab+a)=\left(\frac{a^2+b^2}{2}-ab\right)+\left(\frac{a^2}{4}+1-a\right)+\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{2}\right)=\frac{1}{2}(a-b)^2+\left(\frac{a}{2}-1\right)^2+\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{2}\right)>0$，$\therefore a^2+b^2+1>ab+a$.

证明 2 $\because a^2+b^2+1-(ab+a)=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2-2ab-2a)=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2+1)]=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-1)^2+(b^2+1)]>0$，$\therefore a^2+b+1>ab+a$.

3. 已知 a,b 均为正数，求证：$a^ab^b\geqslant a^bb^a$.

证明 $\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$，当 $a>b>0$ 时，$\frac{a}{b}>1$，$a-b>0$，

由指数函数的性质，$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$；当 $a=b>0$ 时，$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}=1$；当 $0<a<b$ 时，$0<\frac{a}{b}<1$，$a-b<0$，同理 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$. $\therefore \frac{a^ab^b}{a^bb^a}\geqslant 1$. 又 $a^bb^a>0$，$\therefore a^ab^b\geqslant a^bb^a$.