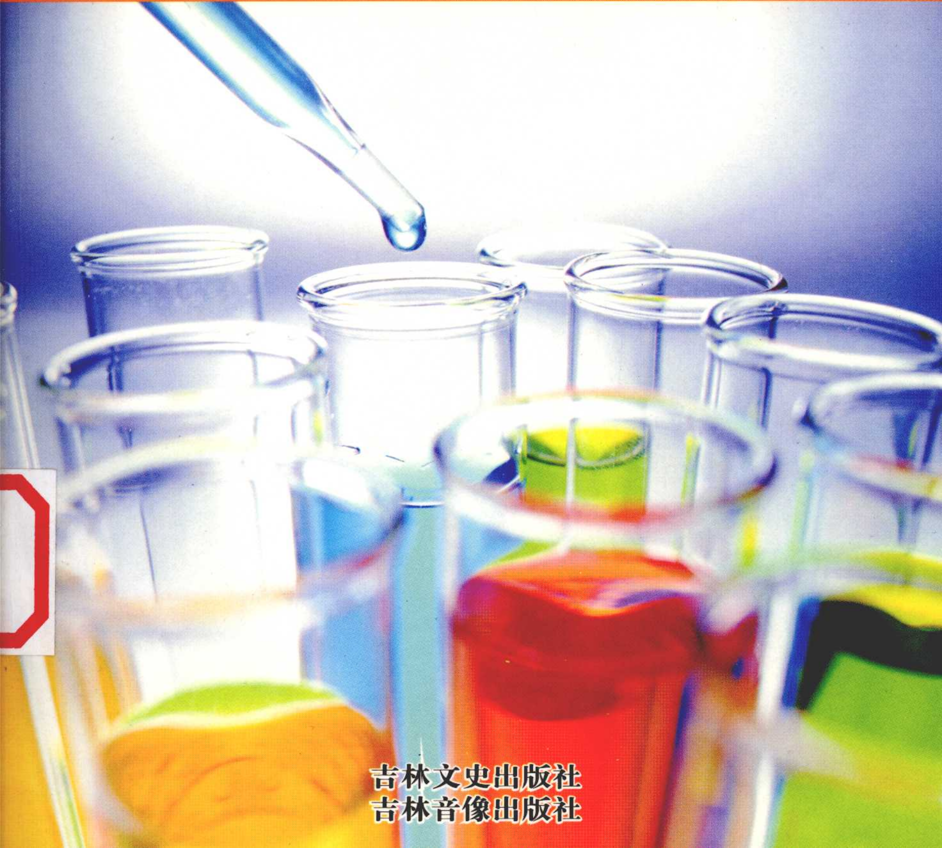
Famous Teachers' New Lesson Plans

名师新教案 · 优秀学生学习方法全书

A Collection of The Outstanding Students' Study Methods

数学学习法 下
物理学习法 化学学习法



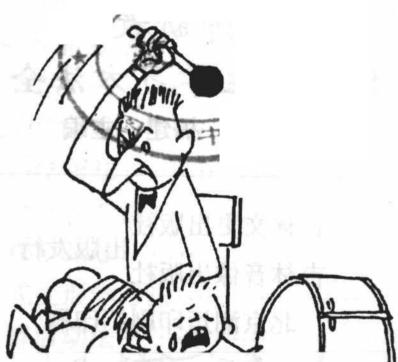
吉林文史出版社
吉林音像出版社

名师新教案

优秀学生学习方法全书 8

数学学习法　下
物理学习法
化学学习法

金鸣　福建⊙主编



吉林文史出版社
吉林音像出版社

图书在版编目(CIP)数据

名师新教案—优秀学生学习方法全书/金鸣主编。—长春:吉林文史出版社,2006.2
ISBN 7-80702-113-6
Ⅰ.名... Ⅱ.金... Ⅲ.学习方法—优秀学生—教案
Ⅳ.G.206

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 080133 号

名师新教案
优秀学生学习方法全书
金鸣 福建 主编

吉林文史出版社
吉林音像出版社 出版发行
北京潮运印刷厂印刷

开本:850×1168mm 1/32 印张:120
字数:2000 千字 2006 年 3 月第 1 次印刷
印数:5000
ISBN 7-80702-113-6/G·206
定价:348.00 元(全 16 卷)

第八卷 目 录

换元奇妙法

多年来致力于数学学习法研究的陆海泉老师指出:“换元,作为一种重要的思想方法,贯串于整个中学数学教材之中,相当重要。”为此陆老师归纳并总结了10种换元方法,以启示同学们注意换元方法的多样性和换元技巧的灵活性。

这十种方法依次是:局部换元法、整体换元法、常值换元法、均值换元法、增次换元法、对称换元法、多元换元法、三角换元法、比值换元法和复数换元法。

1、局部换元法

局部换元是中学生最早接触到的基本换元方法。局部换元的作用主要是将比较复杂的新的问题,化归为比较简单的已经解决了的问题。例如:

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{6}{X}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{2} & ① \\[2ex] \dfrac{8}{X}-\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{10} & ② \end{cases}$$

解:设$\dfrac{1}{X}=a,\dfrac{1}{y}=b$,则原方程组变为

$$\begin{cases} 6a+6b=\dfrac{1}{2} \\[2ex] 8a-3b=\dfrac{3}{10} \end{cases}$$

解整式方程组,得$\begin{cases} a=\dfrac{1}{20} \\[2ex] b=\dfrac{1}{30} \end{cases}$

由此可得 $\begin{cases} X=20 \\ y=30 \end{cases}$(检验略,下同)

2、整体换元法

整体换元法是对数学问题时行整体处理的一种方法，就是将所要解决的问题视作为一个整体，并设为 A，通过运算求出 A，从而使问题获得解决。例如：

计算：$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$

解：设 $A=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$

则 $A^3=(7+5\sqrt{2})+(7-5\sqrt{2})+3\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\cdot(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}})$

即 $A^3=14-3A$，解之得 $A=2$

因此，$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$

3、常值换元法

特值实质上就是常值换元，这不仅适用于解选择题，在一些运算较为复杂的问题中，实施常值换元，可以使解题过程特别简练。例如：

计算 $1989\times20002000-2000\times19891989$

直接计算比较繁复。若设 $1989=X$，则 $2000=X+11$，就可以将复杂的数字计算，转化为简单的代数式的化简。

解：设 $1989=X$，则 $2000=X+11$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=X[10000(X+11)+(X+11)]\\&\quad-(X+11)(10000X+X)\\&=10001X(X+11)-10001X(X+11)\\&=0\end{aligned}$$

4、均值换元法

取考察对象的平均值换元，有时会使某些问题的解法更为灵巧简便。例如：

解方程 $(\sqrt[3]{X+1}-1)^4+(\sqrt[3]{X+1}-3)^4=16$

解：设 $y=\sqrt[3]{X+1}-2$

则原方程可化为 $(y+1)^4+(y-1)^4=16$

整理得 $y^4+6y^2-7=0$

$\therefore y^2=1$　或 $y^2=-7$（舍去）

再由　$\sqrt[3]{X+1}-2=\pm1$

可解得　$X_1=26, X_2=0$

5、增次换元法

按常规，换元可使方程降次，但是用特殊的换元法，增高未知数的次数，有时也使问题解决得更为简捷。例如：

解方程 $2(X+\sqrt{X^2-1})=(X-1+\sqrt{X+1})^2$

解：显然有 $X\geqslant1$，若令 $y=\sqrt{X-1}$，

则 $X-1=y^2, X=y^2+1$，代入原方程，得

$2(y^2+1+y\sqrt{y^2+2})=(y^2+\sqrt{y^2+2})^2$

化简得 $y(y-1)(y^2+y+2\sqrt{y^2+2})=0$

易知 $y^2+y+2\sqrt{y^2+2}>0$，

$\therefore y=0$ 或 $y=1$

因此，$X_1=1, X_2=2$

6、对称换元法

解含有形如 $AX^2+Ay^2+BXy+CX+Cy+E$ 的式子的一类问题，用常规方法往往有困难，若采用对称换元，则可化难为易，化繁为简。例如：

若 $X^2+Xy+y^2=3$，

求 $M=X^2+y^2$ 的最大值和最小值。

解：令 $X=m-n,\ y=m+n$

则 $X^2+Xy+y^2=3$ 可化为 $3m^2+m^2=3$

此时，$M=X^2+y^2=2m^2+2n^2$

$$=2m^2+2(3-3m^2)=6-4m^2$$

$\because -1\leqslant m\leqslant 1$,

$\therefore M_{max}=6, M_{min}=2$

7、多元换元法

有些无理方程,可施行多元代换,转化为方程组。例如:

解方程 $\sqrt[3]{(5-X)^2}+\sqrt[3]{(4+X)^2}$

$$=\sqrt[3]{20+X-X^2}+3$$

解:令 $\sqrt[3]{5-X}=u, \sqrt[3]{4+X}=v$

则 $\begin{cases}u^3+v^3=9,\\ u^2+v^2=-uv=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{matrix}u=2\\ v=1\end{matrix}$ 或 $\begin{matrix}u=1\\ v=2\end{matrix}$

从而可得原方程的解为 $X=4, X^2=-3$

8、三角换元法

利用三角函数某些特殊性质,施行三角换元,可以将难以解决的代数问题,转化为三角问题。这是我们在数学解题中必须重视的一种换元技巧。例如:

解方程 $\sin X+\cos X+\sin X\cos X=1$

解:令 $\sin X+\cos X=t(-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$

则 $\sin X\cos X=\frac{1}{2}(t^2-1)$,代入原方程,得

$t^2+2t-3=0 \therefore t=1$ 或 $t=-3$(舍去)

于是 $\sin X+\cos X=1, X=k\pi(-1)^k\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\pi(k\in z)$

9、比值换元法

解一类连等条件$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$……的问题时,设这些比的比值为 k,转化为含 k 的问题来解决,方法尤为巧妙。例如:

已知 X、y、z 满足 $X-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$试求 X、y、z 为何值时 $X^2+y^2+z^2$ 有最小值。

解：设 $X-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}=k$

则有　$X=k+1, y=2k-1, z=3k+2$

于是　$X^2+y^2+z^2=14k^2+10k+6$

$$=14(k+\frac{5}{14})^2+\frac{59}{14}\geqslant\frac{59}{14}$$

因此，当 $k=-\frac{5}{14}$，即 $X=\frac{9}{14}, y=-\frac{12}{7}, z=\frac{13}{14}$ 时，

$X^2+y^2+z^2$ 有最小值 $\frac{59}{14}$。

10、复数换元法

复数换元，就是通过引进适当的复数，把有关实数看作是这个复数的实部或虚部，而后利用复数的性质及其运算解决问题。例如：

已知：$\sin A+\sin 3A+\sin 5A=a$

$\cos A+\cos 3A+\cos 5A=b$

求证(1) $b\neq 0$ 时，$tg3A=\frac{a}{b}$

(2) $(1+2\cos 2A)^2=a^2+b^2$

(1986年高考理科数学试题)

证明：设 $z=\cos A+i\sin A$，则 $z+z^3+z^5=b+a_i$

由　$|z|=1$ 得 $z^2+\frac{1}{z^2}=2\cos 2A$

故　$z+z^3+z^5=z^3(1+z^2+\frac{1}{z^2})=z^3(1+2\cos 2A)$

即　$(1+2\cos 2A)\cdot(\cos 3A+i\sin 3A)=b+a_i$

所以，当 $b\neq 0$ 时，$tg3A=\frac{a}{b}$

又由 $|z^3(1+2\cos 2A)|=|b+a_i|$，得

$$(1+2\cos 2A)^2=a^2+b^2$$

换元这一方法，从初中到高中均要用到，陆老师对这一方法进

行了很好的总结，希望同学们好好体会。

空间问题平面法

浙江省余姚县姚坚平老师说："化空间问题为平面问题是解立体几何题的常用思想方法。"但许多同学似乎重视不够。为此姚老师特意总结归纳了五种常用的空间问题平面化的方法。

将空间问题平面化，会大大降低问题的难度。为此常用的五种方法是：降维法、三角形法、辅助平面法、截面法和展开法。

1、降维法

平面几何的基本元素是点、线，立体几何的基本元素是点、线、面。在解立体几何的有关问题时，我们引进"降级"的思想方法，即将"面"降为"线"，"线"降为"点"，把三维空间图形降级成二维平面图形。如球降为圆，长方体降为矩形，棱锥降为三角形等。根据平面问题的解题思路，通过类比，找到解决空间问题的思想方法。例如：

P为正三棱锥底面内任意一点，过P引底面垂线与棱锥侧面所在平面交于X、Y、C，若正三棱锥的高为h，求PX+ PY+PC。

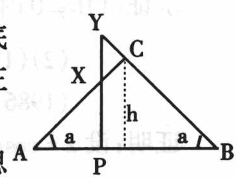


图1

姚老师提示说：直接解本例，图难作且思路难找，通过降维，棱 锥的侧面降为三角形的腰，底面降为三角形的底边，则正三棱锥应降为等腰三角形。相应的平面问题即为：P为等腰三角形底边上任意一点，过P作底边的垂线与两腰所在直线交于X、Y，等腰三角形的高为h，求PX+PY。如图1，$PX = AP \cdot tga$，$PY = BP \cdot tga$，故 $PX + PY = tga(PA + PB) = tga \cdot AB = 2 \cdot tga \cdot \frac{AB}{2} = 2h$。

依此方法易求出 $PX + PY + PC = 3h$（此时a侧面与底面所成的角）。

2、三解形法

不少立体几何问题,已知和所求元素的图形虽不在同一平面内,但通过(直角)三角形中的边角关系,可把这些不同平面内元素间的关系转化到一个三角内,从而在一个三角形解决问题。例如:

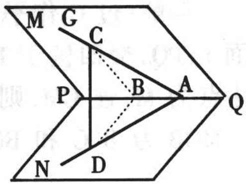


图2

过二面角 M-PQ-N 的棱上一点 A,在平面 M 内引一条射线 AG 和棱 PQ 成 45°角。AG 和平面 N 成 30°角,求二面角 M-PQ-M 的度数。

解:如图2,在 AG 上取一点 C,过 C 作 CB⊥N 于 D,连 AD,则∠CAD 为 AG 与 N 所成的角,即∠CAD = 30°,再过 C 作 CB⊥PQ 于 B,连 BD,则∠CBD 为所求二面角的平面角。设 AC = a,则在 Rt△ABC 中,$BC = AC \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2a}$,在 Rt△ADC 中,$DV = AC \cdot \sin 30° = \frac{1}{2}a$。所以,在 Rt△BDC 中,$\sin\angle CBD = \frac{DC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,得∠CBD = 45°,即所求二面角的大小为 45°。

姚老师解释道:上例中,两已知角∠GAB = 45°、∠GAD = 30°,分别在平面 N 和 GAD 中,而所求角∠GBD 则在平面 GBD 中,三个不同平面内的元素,通过三角形中的边角关系,把条件∠GAB = 45°转化到 BG 上,把∠GAD = 30°转化到 GD 上,则 DG、BG 和所求的∠GBD 在同一 Rt△GDB 上,问题便迎刃而解。

3、辅助平面法

所谓辅助平面法,就是通过作辅助平面,把有关元素移到所作平面内,便于在同一平面内建立已知和未知的关系,以解决问题。例如:

如图3,正方体 ABCD-A′B′C′D′中,棱长为 a,G 是上底面的

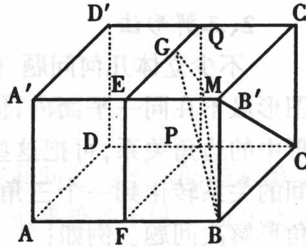


图 3

中心,求 B'C 和 BG 所成的角。

简解:过 G 作平行于面 B_1C 的平面 EFPQ,交四棱于 E、F、P、Q。设 PQ 中点为 M,连 GM,则 GM∥B′C,所以∠MGB 为 B′C 和 BG 所成的角。连 MB,在 △GMB 中,$GM=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$$GB=\sqrt{a^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a \quad BM=\sqrt{PB^2+PM^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2+a^2+(\frac{1}{2}a)^2}=\sqrt{6}a$$

$$\text{所以}\cos\angle MGB=\frac{(\frac{\sqrt{6}}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2-(\frac{\sqrt{6}}{2}a)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

即$\angle MGB=\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$

4、截面法

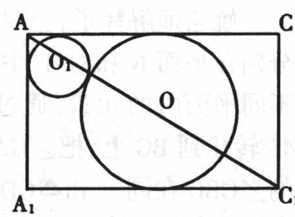


图 4

对立体几何中的有些问题,特别是涉及旋转体的问题,可以通过作截面,使问题中的元素都落在一截面内。这样问题便可在平面内解决了。例如在棱长为 2a 的立方体容 器内装满水,先把半径为 a 的球放入水中,然后再放人一个球,使它淹没在水中,要使从正方体中溢出来的水量为最大,问第二次放人的球的半径应该是多大?

解:依题意可知两球的球心都在这正方体的一条对角线上。

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 没入水中的小球 O_1 和球 O 与水面 ABCD 都相切，过棱 AA′、CC′作出正方体的对角面 AA′C′C。如图 4，AA′C′C 是矩形，圆 O_1 与圆 O 是两球的大圆，并且都和 AC 相切。

因为 $AC_1=2\sqrt{3}a$

所以 $AO=\sqrt{3}a, AS=(\sqrt{3}-1)a$

又设圆 O_1 半径为 r，则 $AO_1=\sqrt{3}r, AS=(\sqrt{3}+1)r$，即 $(\sqrt{3}-1)a=(\sqrt{3}+1)r$，即第二次放入的球，半径应为 $r=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}a(2-\sqrt{3})a.$

5、*展开法*

有些空间图形，将其表面展开后即是平面图形，我们便可在此平面图形内，研究有关元素间的关系，求得问题的解决。例如：

圆台的上下底面半径是 5 和 10，母线长 20，求从其中一条母线的中点绕圆台侧面一周后到原来母线下端的最短线的长度，以及最短线与上底面圆周的最近距离。

解：将圆台的侧面展开成扇环形，其圆心角 $\theta=\frac{10-5}{20}\times360°=90°$，从母线中点 B 绕侧面一周后到原来母线下端 A 的最近距离为展开图图 5 中线段 A′B 的长。

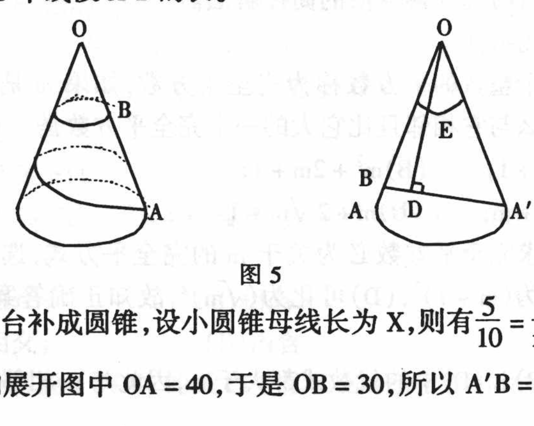


图 5

将圆台补成圆锥，设小圆锥母线长为 X，则有 $\frac{5}{10}=\frac{x}{x+20}$，得 X=20，可知展开图中 OA=40，于是 OB=30，所以 $A'B=\sqrt{30^2+40^2}$

$=50$。

作 $OD\perp A'B$ 交上底圆弧于 E,则 ED 为最短线与上圆周的最近距离。

又 $OD=OA'\times\frac{OB}{A'B}=24,OE=20$,所以 $ED=4$。

同学们大多知道将立体几何的问题转化为平面几何问题,大大有利于问题的解决,但却不很清楚通过什么具体方法去实现这一点。为此我们应该感谢姚老师为我们所做的精彩总结。

解答选择题方法

我们总结了全国各地的师生们在实战中摸索出的许多种颇有实效的解答选择题的方法。从中选择了十三种方法,依次介绍如下。

这十三种方法是:干支特征法、直接法、筛选法、特殊值法、反例法、验证法、分析法、逆推法、图像法、变换法、恒等变形法、猜证法和概念判定法。

1、干支特征法

对于有且只有一个正确答案的选择题,充分分析题干和选择支的特征,有时能获得灵活的简捷解法。

(1)结构特征

例:一个整数的平方数称为完全平方数,如果 m 是一个完全平方数,那么与它相邻且比它大的一个完全平方数是

(A)m^2+1;　(B)m^2+2m+1;

(C)m^2+m;　(D)$m+2\sqrt{m}+1$。

解:所求完全平方数必为关于 m 的完全平方式,选择支中只有(B)可化为$(m+1)^2$,(D)可化为$(\sqrt{m})^2$,故知正确答案必在(B)(D)之中。

因为(B)和(D)中的代数式都大于 m,因此与 m 相邻且比 m 大

的一个完全平方数必为(B)和(D)中的较小者,因此选(D)。

(2)范围特征

例:如果$|\cos\theta|=\frac{1}{5}$,$\frac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$,那么$\sin\frac{\theta}{2}$的值等于

(A)$-\frac{\sqrt{10}}{5}$; (B)$\frac{\sqrt{10}}{5}$;

(C)$-\frac{\sqrt{15}}{5}$; (D)$\frac{\sqrt{15}}{5}$。

解:由$\frac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$得$\frac{5\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{2}$。注意到$\sin\frac{\pi}{2}$在此区间上是减函数,

$\therefore \frac{-\sqrt{2}}{2}>\sin\frac{\theta}{2}>-1$。

选择支中除(C)在此范围内之外,其他都大于$-\sqrt{\frac{2}{2}}$,故选择(C)。

(3)数字特征

例:下列各组数中,不满足方程 $85X-32y=101$ 的一组是

(A)$X=329,y=86$ (B)$X=625,y=171$;

(C)$X=978,y=256$; (D)$X=1301,y=341$。

解:在已知方程中,由于左边的减数 $324y$ 必为偶数,$85X-324y$ 得到差 101 是奇数,从而推知 $85X$ 必为奇数,因此 X 是奇数。注意到选择支中的(A)、(B)、(D)都是奇数,只有(C)中的 X 不是奇数,因此选(C)。

(4)隐含条件

例:圆 $C_1:X^2+y^2=4$ 和圆 $C_2:X^2+y^2+6X+4y=0$ 的位置关系是

(A)相切; (B)相离;

(C)相交; (D)内含。

解:容易验证圆 C_1 的圆心坐标(0,0)适合圆 C_2 的方程,因此