《工程中的振动问题》

习题题解

镇江农业机械学院　上海工业大学
上海市业余工业大学　郑州工学院　合编
河北工学院　安徽工学院

1980.10

编 者 的 话

“Vibration Problems in Engineering”（4ed）（S. Timoshenko, D. H. Young, W. Weaver, Jr. 著）一书系统地介绍了振动理论及其在工程中的应用，并详尽地介绍了矩阵分析及计算机的应用。该书可作为工科大专院校“机械振动”课程的教材或参考书，对于从事振动教学或科研工作的教师、科技人员都是一本很好的参考资料。

书中汇集了大量结合工程实际的振动问题。我们在教学工作过程中对全部习题作了详细介答，现汇编成册，供学习振动理论和从事振动设计工作的同志参考。由于我们水平有限，加上时间仓促，有错误之处请阅者批评指正。

参加本题介编写工作者有：

第一章	郑州工学院	王 伟
	镇江农机学院	彭玉萬 张 准
第二章 第四章	上海工业大学	刘培俊 李德滋
	上海市业余工业大学	赵仲国 邱熊飞
第三章	镇江农机学院	杨琪武
	河北工学院	关合珍 周德慧 赵钦芳
第五章	镇江农机学院	张 准
	安徽工学院	孟庆隆

有关用计算机计算部分由张准同志编写程序进行计算。

全书由张准、邱熊飞二同志负责校核、定稿。

（本题介由上海工业大学印刷厂负责印刷，我们特表示衷心的感谢）

编 者

1980.7.

目　　录

第一章　具有单自由度的系统

解题公式摘要

一、自由谐波振动：

弹簧静变形：$\delta_{st}=\dfrac{W}{K}$ [§1.1−(a)]

密圈螺旋弹簧刚度：$K=\dfrac{Gd^4}{8nD^3}$ [§1.1−(b)]

角频率：$p^2=\dfrac{Kg}{W}=\dfrac{g}{\delta_{st}}$ [§1.1−(d)]

周期：$\tau=2\pi\sqrt{\dfrac{W}{Kg}}=2\pi\sqrt{\dfrac{\delta_{st}}{g}}$ (1.3)

自然频率：$f=\dfrac{1}{\tau}=\dfrac{p}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{Kg}{W}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{\delta_{st}}}$ (1.4)

旋转振动角频率：$p^2=\sqrt{\dfrac{k_r}{I}}$ [§1.2−(b)]

园轴扭转刚度：$k_r=\dfrac{GJ}{l}=\dfrac{\pi d^4G}{32l}$ [§1.2−(c)]

二、能量法与瑞利法：

$$(KE)_{max}=(PE)_{max} \tag{1.13}$$

$$\dot{x}_{max}=px_{max} \tag{1.14}$$

$$(PE)_{max}=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx \qquad [\S1.3-(m)]$$

$$p^2=\frac{g\int_0^l wydx}{\int_0^l wy^2dx} \tag{1.18}$$

$$p^2=\frac{\alpha\int_0^l i\phi dx}{\int_0^l i\phi^2dx} \tag{1.19}$$

$$p^2=\frac{g\sum_{j=1}^{n}W_jy_j}{\sum_{j=1}^{n}W_jy_j^2} \tag{1.20}$$

$$p^2=\frac{\alpha\sum_{j=1}^{n}I_j\phi_j}{\sum_{j=1}^{n}I_j\phi_j^2} \tag{1.21}$$

三、无阻尼受迫振动：

稳态响应：$x=\left(\dfrac{P}{K}\sin\omega t\right)\left(\dfrac{1}{1-\omega^2/p^2}\right)$ (1.24)

动力放大因子： $\beta=\dfrac{1}{1-\omega^2/p^2}$ [§1.6-(e)]

$$x=(d\sin\omega t)\left(\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\right) \tag{1.26}$$

$$x^*=\left(-\frac{Wa}{Kg}\sin\omega t\right)\left(\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\right) \tag{1.28}$$

暂态响应： $x=\dfrac{q}{p^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\dfrac{\omega}{p}\sin pt\right)$ (1.29b)

$$x=\frac{q}{p^2-\omega^2}(\cos\omega t-\cos pt) \tag{1.30b}$$

$$\lim_{\omega\to p}x=-\frac{q}{2p^2}(pt\cos pt-\sin pt) \tag{1.31a}$$

$$\lim_{\omega\to p}x\approx-\frac{qt}{2p}\cos pt \tag{1.31b}$$

四、具有粘滞阻尼的自由振动：

1．小阻尼情形：

角频率： $p_d=\sqrt{p^2-n^2}$ [§1.8-(e)]

周期： $\tau_d=\dfrac{2\pi}{p_d}=\dfrac{2\pi}{p}\dfrac{1}{\sqrt{1-(n^2/p^2)}}$ [§1.8-(f)]

阻尼响应： $x=e^{-nt}\left(x_0\cos p_dt+\dfrac{\dot{x}_0+nx_0}{p_d}\sin p_dt\right)$ (1.35)

$$x=Ae^{-nt}\cos(p_dt-\alpha_d) \tag{1.36}$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{(\dot{x}_0+nx_0)^2}{p_d^2}}$$ [§1.8-(h)]

$$\alpha_d=\tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0+nx_0}{p_dx_0}\right)$$ [§1.8-(i)]

对数减幅系数： $\delta=\ln\dfrac{x_{mi}}{x_{m(i+1)}}=n\tau_d=\dfrac{2\pi n}{p_d}$ (1.37)

$$\delta=\frac{1}{j}\ln\frac{x_{mi}}{x_{m(i+j)}}$$ [§1.8-(l)]

2．过阻尼情形： $x=\dfrac{\dot{x}_0-r_2x_0}{r_1-r_2}e^{r_1t}+\dfrac{r_1x_0-\dot{x}_0}{r_1-r_2}e^{r_2t}$ (1.39)

3．临界阻尼情形： $x=e^{-pt}[x_0+(\dot{x}_0+nx_0)t]$ (1.41)

五、具有粘滞阻尼的受迫振动：

稳态响应： $x=\dfrac{Q}{K}\beta\cos(\omega t-\theta)$ (1.46)

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2+(2\gamma\omega/p)^2}} \tag{1.47}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega/p}{1-\omega^2/p^2}\right) \tag{1.48}$$

共振频率比： $$\frac{\omega}{p}=\sqrt{1-2\gamma^2} \qquad [\S 1.9-(\mathrm{h})]$$

共振振幅： $$A_{max}=\frac{Q}{K}\beta_{res}=\frac{Q}{K}\frac{1}{2\gamma}=\frac{Q}{2mnp}=\frac{Q}{c\omega} \qquad [\S 1.9-(\mathrm{i})]$$

六、一般周期干扰力：

$$F(t)=a_0+\sum_{i=1}^{n}(a_i\cos i\omega t+b_i\sin i\omega t) \tag{1.58}$$

$$a_i=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos i\omega t dt \qquad (i=1,2,3,\cdots) \tag{1.59a}$$

$$b_i=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin i\omega t dt \tag{1.59b}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt \tag{1.59c}$$

七、任意干扰力：

杜哈曼积分： $$x=\frac{e^{-nt}}{p_d}\int_0^t e^{nt'}\frac{Q}{m}\sin p_d(t-t')dt' \tag{1.62}$$

$$x=e^{-nt}\left[x_0\cos p_d t+\frac{\dot{x}_0+nx_0}{p_d}\sin p_d t+\frac{1}{p_d}\int_0^t e^{nt'}\frac{Q}{m}\sin p_d(t-t')dt'\right] \tag{1.63}$$

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt+\frac{1}{p}\int_0^t\frac{Q}{m}\sin p(t-t')dt' \tag{1.65}$$

对阶梯函数的无阻尼响应：

$$x=\frac{Q_1}{K}(1-\cos pt) \tag{1.66}$$

对矩形脉冲的无阻尼响应：

$$\begin{cases} x=\dfrac{Q_1}{K}(1-\cos pt) & (0\leq t_1\leq t) \\ x=\dfrac{Q_1}{K}[\cos p(t-t_1)-\cos pt] & (t_1\leq t) \end{cases} \tag{1.67}$$

对斜坡函数的无阻尼响应： $$x=\frac{\delta Q}{K}\left(t-\frac{1}{p}\sin pt\right) \qquad [\S 1.12-(\mathrm{n})]$$

对任意基础运动的无阻尼响应：

$$x=p\int_0^t x_s\sin p(t-t')dt' \tag{1.70}$$

$$x^*=-\frac{1}{p}\int_0^t \ddot{x}_s\sin p(t-t')dt' \tag{1.73}$$

八、响应的数值介法：

1．分段常数内插值法：

$$x_i=\frac{1}{K}\sum_{j=0}^{i-1}\Delta Q_j[1-\cos p(t_i-t_j)] \tag{1.75c}$$

$$x=e^{-n(t-t_{i-1})}[x_{i-1}\cos p_d(t-t_{i-1})+\frac{\dot{x}_{i-1}+nx_{i-1}}{p_d}\sin p_d(t-t_{i-1})]$$

$$+\frac{Q_i}{K}\left\{1-e^{-n(t-t_{i-1})}[\cos p_d(t-t_{i-1})+\frac{n}{p_d}\sin p_d(t-t_{i-1})]\right\} \tag{1.76a}$$

$$x_i=e^{-n\Delta t_i}[x_{i-1}\cos p_d\Delta t_i+\frac{\dot{x}_{i-1}+nx_{i-1}}{p_d}\sin p_d\Delta t_i)]$$

$$+\frac{Q_i}{K}[1-e^{-n\Delta t_i}(\cos p_d\Delta t_i+\frac{n}{p_d}\sin p_d\Delta t_i)] \tag{1.76b}$$

递推公式

$$x_i=x_{i-1}\cos p\Delta t_i+\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\sin p\Delta t_i+\frac{Q_i}{K}(1-\cos p\Delta t_i) \tag{1.76c}$$

$$\frac{\dot{x}_i}{p}=-x_{i-1}\sin p\Delta t_i+\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\cos p\Delta t_i+\frac{Q_i}{K}\sin p\Delta t_i \tag{1.76d}$$

$$x_i=x_o\cos pt_i+\frac{\dot{x}_o}{p}\sin pt_i+\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{i}Q_j[\cos p(t_i-t_j)-\cos p(t_i-t_{j-1})] \tag{1.76e}$$

2．分段线性内插值法：

递推公式

$$x_i=x_{i-1}\cos p\Delta t_i+\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\sin p\Delta t_i+\frac{Q_{i-1}}{K}(1-\cos p\Delta t_i)$$

$$+\frac{\Delta Q_i}{pK\Delta t_i}(p\Delta t_i-\sin p\Delta t_i) \tag{1.77c}$$

$$\frac{\dot{x}_i}{p}=-x_{i-1}\sin p\Delta t_i+\frac{\dot{x}_{i-1}}{p}\sin p\Delta t_i+\frac{Q_{i-1}}{K}\sin p\Delta t_i$$

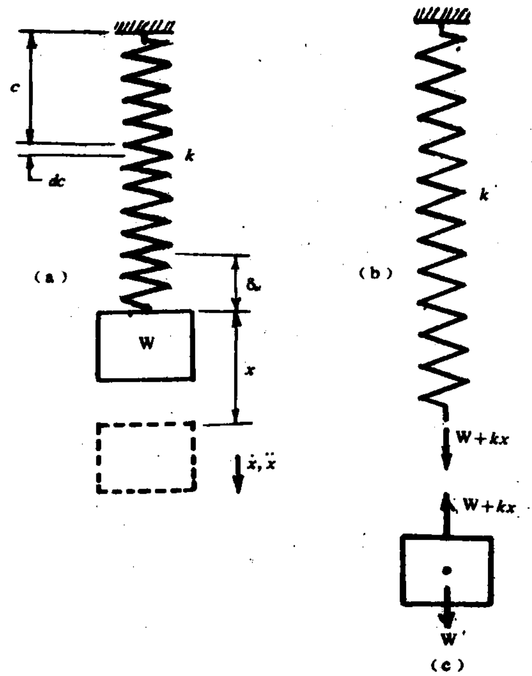
$$+\frac{\Delta Q_i}{pK\Delta t_i}(1-\cos p\Delta t_i) \tag{1.77d}$$

$$x_i=x_o\cos pt_i+\frac{\dot{x}_o}{p}\sin pt_i+\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{i}\{Q_{j-1}[\cos p(t_i-t_j)-\cos p(t_i-t_{j-1})]$$

$$+\frac{\Delta Q_j}{\Delta t_j}[\Delta t_j\cos p(t_i-t_j)+\frac{1}{p}\sin p(t_i-t_j)-\frac{1}{p}\sin p(t_i-t_{j-1})]\} \tag{1.77e}$$

1.1 自由谐波振动

1.1—1　图1.1中螺旋弹簧的平均线圈直径D＝1英寸，钢丝直径d＝0.1英寸，共有20圈。钢丝受剪的弹性模量$G=12\times10^6$磅/英寸^2，悬挂重量W＝30磅。试求自由振动的周期。



题1.1—1图

解：由公式§1.1－（b）可知：该系统的刚度系数为：

$$K=\frac{Gd^4}{8nD^3}$$

而系统的角频率：

$$p=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{Kg}{W}}$$

其周期

$$\tau=\frac{2\pi}{p}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{W}{gK}}$$

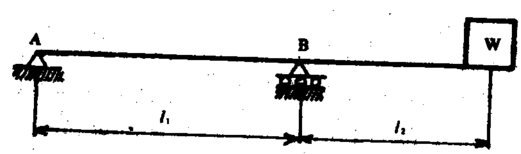
$$=2\pi\sqrt{\frac{W8nD^3}{gGd^4}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{30\times8\times20\times1^3}{386\times12\times10^6\times0.1^4}}$$

$$=\frac{4\pi}{19.65}$$

$$=0.64\text{秒}$$

1.1—2　一根抗弯刚度$EI=12\times10^7$磅—英寸^{2}的简支梁，两支承之间的净跨度$L_1=6$英尺，一端外伸$L_2=3$英尺，如图1.1—2示，略去梁的分布质量。试求在外伸端点处重量为W＝600磅的物块自由振动的频率。



题1.1—2图

解：在梁的外伸端载荷W的作用下，梁的静挠度为：

$$\delta_{st}=\frac{Wl_2^2(l_1+l_2)}{3EI}$$

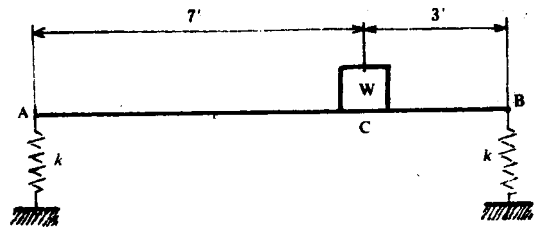
该系统的角频率为：　$p=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$

则自由振动的频率为：

$$f=\frac{p}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EIg}{Wl_2^2(l_1+l_2)}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\times12\times10^7\times386}{600\times3^2\times9\times12^3}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{1654.7}=6.474(\text{周/秒})$$

1.1—3　一根抗弯刚度 $EI=30\times10^6$ 磅—英寸^2 的梁AB，借弹簧支承于A点和B点处，每一弹簧系数 $k=300$ 磅/英寸，如图所示。略去梁的分布质量，试计算位于B点左边3英尺处的重量W＝1000磅的物块自由振动的周期。



题1.1—3图

解：设梁的刚度系数为K_1，由梁弹性变形引起c处的位移为δ_{st1}，用材料力学挠度公式可得：

$$\delta_{st1}=\frac{Wab(l^2-a^2-b^2)}{6EIl}$$

又设二个支承弹簧的刚度系数为K_2，由支承弹簧引起c处的位移为δ_{st2}，用静力平衡和几何关系可得：

$$\delta_{st2}=\frac{3W}{10K}+\frac{7}{10}\left(\frac{7}{10}\frac{W}{K}-\frac{3}{10}\frac{W}{K}\right)=\frac{W}{K}\left[\frac{3}{10}+\frac{49}{100}-\frac{21}{100}\right]=0.58\frac{W}{K}$$

由§1.1—(a)式可得：$K_1\cdot\delta_{st1}=W$，$K_2\delta_{st2}=W$

将δ_{st1}，δ_{st2}代入此二式中：

$$\frac{1}{K_1}=\frac{\delta_{st1}}{W}=\frac{3\times7\times(10^2-7^2-3^2)\times12^4}{6\times30\times10^6\times10\times12}=8.467\times10^{-4}$$

$$\frac{1}{K_2}=\frac{\delta_{st2}}{W}=\frac{0.58}{300}=19.33\times10^{-4}$$

整个系统相当于弹簧K_1和弹簧K_2的串联，其等效刚度系数K为：

$$\frac{1}{K}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}=(8.467+19.33)\times10^{-4}=27.8\times10^{-4}$$

由(1.3)式　$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{Kg}}=2\pi\sqrt{\frac{10^3\times27.8\times10^{-4}}{386}}=0.533$秒

1.1—4　一个重量W＝150千磅的水箱，借四根端点嵌固的竖直管柱支承着。每一柱的抗弯刚度 $EI=2\times10^9$ 磅—英寸^2。试计算该水箱顺水平方向自由振动的周期。略去诸柱的分布质量。

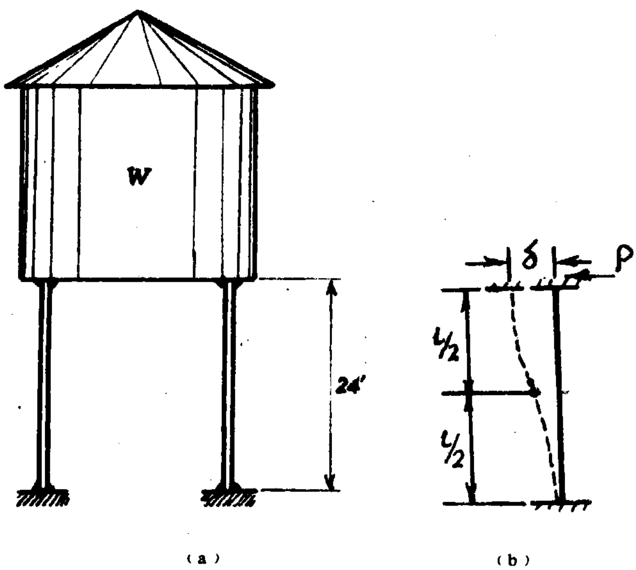
解：此系统可简化为如图11.4(b)图所示，设水箱水平方向作用一力P，则管柱有水平方向的变形δ，由于每根管柱受P/4水平力管端固定，并在其中间长度处有一拐点，因此：

$$\delta=2\left[\frac{(P/4)\times(l/2)^3}{3El}\right]=\frac{Pl^3}{48EI}$$

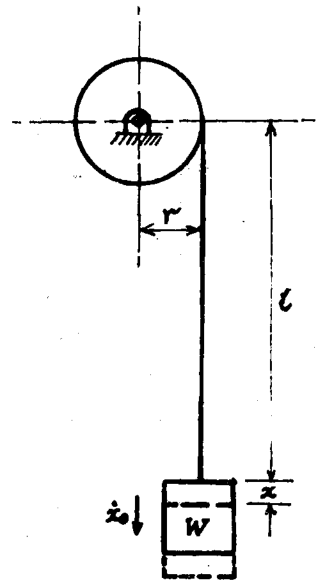
设管柱的等效刚度系数为K，则：

$$K=\frac{P}{\delta}=\frac{48EI}{l^3}$$

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{g}\cdot\frac{1}{K}}=2\pi\sqrt{\frac{150000\times24^3\times12^3}{386\times48\times2\times10^9}}=1.954\text{秒}$$



题1.1—4图



题1.1—5图

1.1—5　为了降低例题4条件下发生的最大动应力，假设在钢索下端与升降机之间加一个弹簧常数 $k=2000$磅/英寸的短弹簧。试计算在此情况下，当钢索的上端突然停止时产生的最大应力。采用与例题4所给的相同数据。

解：在载荷W＝10000磅作用下，钢索的静变形：

$$\delta_{st1}=\frac{Wl}{EA}$$

由题知：$l=60$英尺

$E=15\times10^6$ 磅/英寸^2

$A=2.5$英寸^2，$\dot{x}_0=36$英寸/秒

则：$\delta_{st1}=\dfrac{10^4\times6\times1.2\times10^2}{15\times10^6\times2.5}=\dfrac{7.2}{15\times2.5}=0.192$英寸

同时，短弹簧也产生静变形：

$$\delta_{st2}=\frac{W}{K}=\frac{10000}{2000}=5\text{英寸}$$

系统的静变形：$\delta_{st}=\delta_{st1}+\delta_{st2}=5.192$英寸

系统的角频率：

$$P=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}=\sqrt{\frac{386}{5.192}}=8.622\ 1/秒$$

当以$\dot{x}_o=3$英尺/秒突然停止时,所产生的自由振动振幅$x_m=\dot{x}_o/p$。

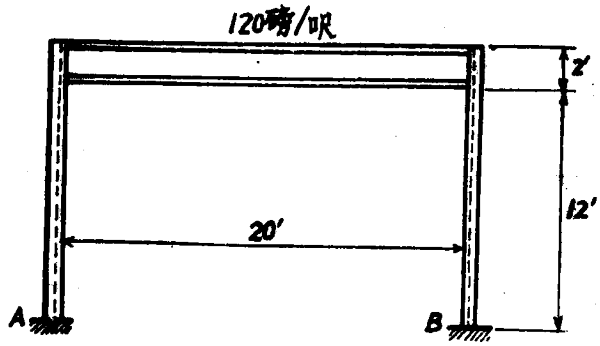
则系统的最大位移为:

$$\delta_{max}=\delta_{st}+\dot{x}_o/p=5.192+36/8.622=9.367英寸$$

最大应力:

$$\sigma_{max}=\frac{W}{A}(\frac{\delta_{max}}{\delta_{st}})=\frac{10000}{2.5}\cdot\frac{9.367}{5.192}=7217磅/英寸^2$$

1.1—6　有一门式框架,由一根20英尺长的24英寸重型工字梁,与两根相对为柔性的柱焊接成刚性连接,如图所示。每一柱为一根横截面面积$A=4.02$(英寸)^{2}的槽钢,其最小回转半径$r=0.62$英寸,$E=30\times10^6$磅/(英寸)^2。试计算在框架平面内侧向振动的固有周期。(a)假设A和B处完全固定,(b)假设A和B处均为铰。略去工字梁的弯曲和柱的质量。



题1.1—6图

解:(a)　假设A、B端固定并设在侧向有一力P,其变形:

$$\delta=2\left(\frac{\frac{P}{2}(\frac{l}{3})^3}{3EI}\right)=\frac{Pl^3}{24EI}$$

设刚度系数为K:

$$P=K\delta$$

$$\frac{1}{K}=\frac{\delta}{P}=\frac{l^3}{24EI}$$

式中:$I=A\cdot r^2$

其振动的固有周期:$\tau_a=2\pi\sqrt{\frac{W}{g}\cdot\frac{1}{K}}=2\pi\sqrt{\frac{W}{g}\frac{l^3}{24EI}}$

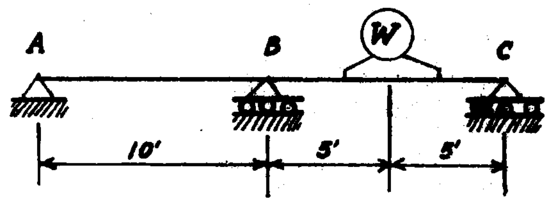
$$\tau_a=2\pi[\frac{2400}{386}\times\frac{1.44^3\times10^6}{72\times10^7\times4.02\times6.2^2\times10^{-2}}]^{1/2}=0.812秒$$

(b)　假设A、B端铰接,梁将保持水平,支柱相当于悬梁则:

$$\delta=\frac{Pl^3/2}{3EI}=\frac{Pl^3}{6EI},\ \frac{1}{K}=\frac{l^3}{6EI}$$

$$\tau_b=2\pi\sqrt{\frac{W}{g}\frac{l^3}{6EI}}=2\tau_a=1.62秒$$

1.1—7　有一根由两个6英寸槽钢，背靠背地组成两跨连续梁（$I=2\times17.4=34.8$英寸^4），在BC跨的中点处，有一个重量$W=12$千磅的马达，如图所示。试计算该马达自由铅垂振动的自然频率f，略去该梁的分布质量。



题1.1—7图

解：简单双等跨连续梁最大挠度公式：

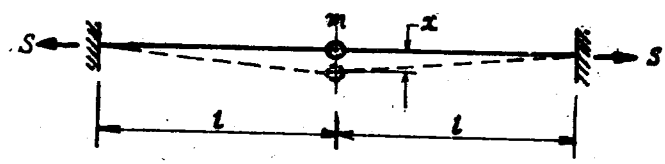
$$y_{max}=\gamma\frac{Wl^3}{EI}$$

（见"机械工程手册"第4篇工程力学P 4—155）得：

$$\delta_{st}=0.01502\times\frac{12000\times120^3}{3\times10^7\times34.8}=0.2983$$

$$\therefore\quad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{386}{0.2983}}=5.725\text{周/秒}$$

1.1—8　有一个质量为m的小球，系于长度为$2l$紧拉着钢丝的中点处，如图所示。钢丝不能抵抗弯曲，并承受了很大的初始拉力S。试建立该球微小侧向振动时的运动微分方程；并证明如果钢丝中的拉力可以假设保持为常数，那么该运动将为简谐运动。在此情况下振动的周期是多少？



题1.1—8图

解：小球的运动微分方程为：

$$m\ddot{x}=-2\frac{x}{l}S$$

$$\ddot{x}+\frac{2S}{ml}x=0$$

当S为常数时其解为：

$$x=A\sin(pt+\alpha)$$

所以小球作简谐运动。其中A为振幅，它决定于初始条件；p为角频率，$p=\sqrt{\frac{2S}{ml}}$。周期

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{ml}{2S}}$$

1.1—9　有一重量W，借类似于图1.5a中两个弹簧那样的方式串联着的三个弹簧k_1、k_2、k_3悬挂着。试证明该系统的等效弹簧常数为：

$$k=\frac{k_1k_2k_3}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}$$

解：每一组弹簧所受的拉力均为W，它们每一个弹簧的伸长为：

$$\delta_1=\frac{W}{k_1},\ \delta_2=\frac{W}{k_2},\ \delta_3=\frac{W}{k_3}。$$

系统总的变形为：

$$\delta_{st}=\delta_1+\delta_2+\delta_3$$

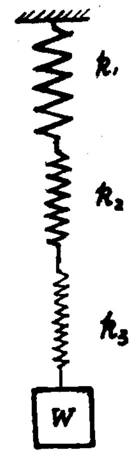
设系统的弹簧系数为K

则：$\delta_{st}=\dfrac{W}{K}$

所以有：$\dfrac{W}{k}=\dfrac{W}{k_1}+\dfrac{W}{k_2}+\dfrac{W}{k_3}$

$$\frac{1}{k}=\frac{k_2k_3+k_1k_3+k_1k_2}{k_1k_2k_3}$$

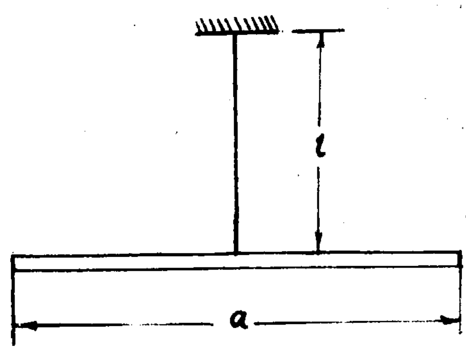
$$K=\frac{k_1k_2k_3}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}$$



题1.1—9图

1.2 旋转振动

1.2—1 一根重量W＝4磅，长度$a=2$英尺的水平杆AB，其中点悬挂于长度$l=2$英尺、直径$d=1/8$英寸的铅垂钢丝上，试求该杆扭转振动的频率。假设该杆为刚性细长杆。剪切模量为$G=12\times10^6$磅/英寸^2。略去钢丝的质量。



题1.2—1图

解：系统作扭转自由振动，其运动微分方程式为：

$$I\ddot{\varphi}=-K_t\varphi$$

角频率：$p=\sqrt{\dfrac{K_t}{I}}$

自然扭振频率：$f=\dfrac{p}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K_t}{I}}$

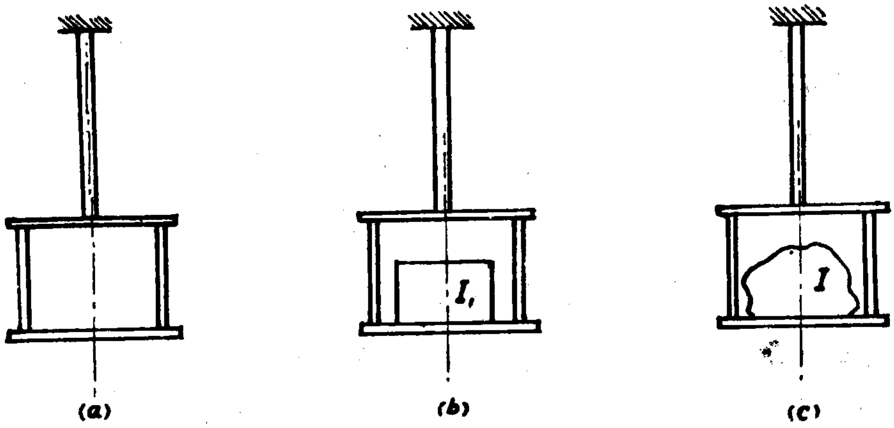
其中：

$$I=\frac{1}{12}\frac{W}{g}a^2=\frac{4}{12}\times\frac{4\times12^2}{386}=0.4974(磅.英寸.秒^2)$$

$$K_t=\frac{\pi d^4G}{32l}=\frac{12\times10^6\times\pi}{8^4\times32\times24}=11.98$$

则 $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{11.98}{0.4974}}=0.781$ 周/秒

1.2—2　图中表示一种对于实验确定不规则形状物体的质量惯性矩极为有用的装置。它由两块平行板组成，该平行板按如此方式连接使整个装配合体作为一个刚体系于一铅垂轴上，而且能将任一有限大小的物体置于其内，当它空着的时候(图a)，此扭摆有一观察到的周期τ_o。当带着一个已知惯性矩为I_1的物体与它一起振动时(图b)，该摆的周期为τ_1；而当带着未知惯性矩为I的物体时(图c)，该摆以周期τ_2进行振动，试求出后一物体对旋转轴线(亦即该轴的轴线)的惯性矩I。



题1.2—2图

解：系统为扭转自由振动

由　$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K_r}}$

则　$I = \frac{K_r}{(2\pi)^2}\tau^2$

当空着的时候：

$$I_o = \frac{K_r}{(2\pi)^2}\tau_o^2 \cdots\cdots(1)$$

当放入惯矩为I_1的物体时候

$$I_o + I_1 = \frac{K_r}{(2\pi)^2}\tau_1^2 \cdots\cdots(2)$$

当放入惯矩为未知的I的物体时：

$$I_o + I = \frac{K_r}{(2\pi)^2}\tau_2^2 \cdots\cdots(3)$$

(2)式÷(1)式：$\frac{I_o + I_1}{I_o} = \frac{\tau_1^2}{\tau_o^2}$　则　$\frac{I_1}{I_o} = \frac{\tau_1^2 - \tau_o^2}{\tau_o^2}$ $\cdots\cdots(4)$

(3)式÷(1)式：$\frac{I_o + I}{I_o} = \frac{\tau_2^2}{\tau_o^2}$　则　$\frac{I}{I_o} = \frac{\tau_2^2 - \tau_o^2}{\tau_o^2}$ $\cdots\cdots(5)$

(5)式÷(4)式得: $I=\dfrac{\tau_2^2-\tau_o^2}{\tau_1^2-\tau_o^2}I_1$

1.2—3　一根重量为W、长度为 l 的细长棱柱形杆 AB，A处为一铰，B处借一常数为 k 的弹簧支承在水平位置，如图所示。试求该杆在铅垂平面内有一个很小的角位移 ϕ 时，其旋转振动的周期。略去弹簧的质量，并考虑杆是刚性的。

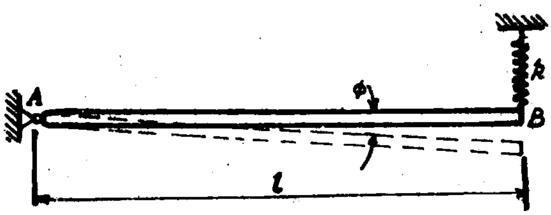
解: 系统的振动微分方程:

$$I\ddot{\varphi}=-kl\varphi\cdot l$$

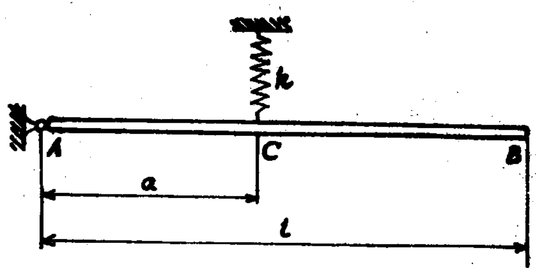
$$I\ddot{\varphi}+kl^2\varphi=0$$

式中: $I=\dfrac{1}{3}\dfrac{W}{g}l^2$

则: $\tau=\dfrac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{kl^2}}=2\pi\sqrt{\dfrac{Wl^2}{3gkl^2}}=2\pi\sqrt{\dfrac{W}{3kg}}$



题1.2—3图



题1.2—4图

1.2—4　一根重量为W、长度为 l 的细长刚性棱柱形杆 AB，A处为铰接，在C处用铅垂弹簧将杆支承成水平位置(见图)。试计算该杆在铅垂平面内有一微小旋转振幅时的周期 τ。假设弹簧常数为 k，并略去质量不计。

解: 系统的振动微分方程为:

$$I\ddot{\varphi}=-Ka^2\varphi$$

$$I\ddot{\varphi}+Ka^2\varphi=0$$

式中: $I=\dfrac{1}{3}\dfrac{W}{g}l^2$

则: $\tau=\dfrac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{Ka^2}}=2\pi\sqrt{\dfrac{Wl^2}{3gKa^2}}=2\pi\dfrac{l}{a}\sqrt{\dfrac{W}{3gK}}$

1.2—5　试确定图中所示盘的扭转振动的频率，假设该轴的端点嵌固于A处和B处。轴的两部分具有相同的直径 d，及不同的长度 l_1 与 l_2，该盘的惯性矩为 I。

解: 系统的扭振运动微分方程式:

$$I\ddot{\varphi}=-K_{r1}\varphi-K_{r2}\varphi$$

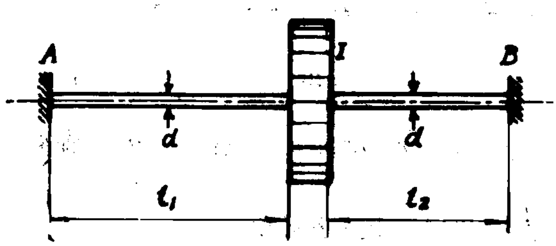
$$I\ddot{\varphi}+(K_{r1}+K_{r2})\varphi=0$$

角频率: $p=\sqrt{\dfrac{K_{r1}+K_{r2}}{I}}$

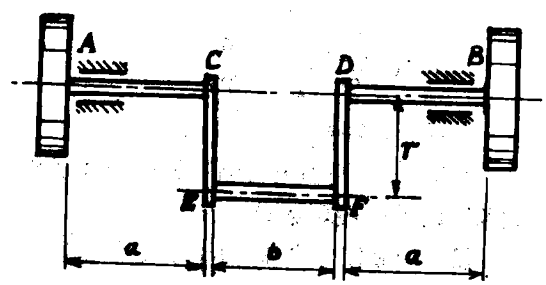
扭振频率：$f=\dfrac{p}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K_{r1}+K_{r2}}{I}}$

式中：　$K_{r1}=\dfrac{\pi d^4 G}{32 l_1}$，　$K_{r2}=\dfrac{\pi d^4 G}{32 l_2}$

则：　$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\dfrac{\pi d^4 G}{32}\left(\dfrac{1}{l_1}+\dfrac{1}{l_2}\right)}{I}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\pi d^4 G(l_1+l_2)}{32 l_1 l_2 I}}$



题1.2—5图



题1.2—6图

1.2—6　试确定一根直轴的等效长度L_1，该轴与图示曲柄轴的轴颈AC、DB具有相同的扭转刚度C_1。曲柄连接板CE和DF的抗弯刚度为B。假设A和B处的轴承具有足够的空隙，允许曲柄轴扭转过程中C和D自由侧向位移。曲柄销EF的扭转刚度为C_2，摆幅半径为r。

解：假设EF段的等效长度为l_1，给一转角φ_1，有：

$$\varphi_1=\frac{Ml_1}{C_1}=\frac{Mb}{C_2}$$

则：$l_1=\dfrac{C_1}{C_2}b$

又设CE段的等效长度为l_2，给一转角φ_2，有：

$$\varphi_2=\frac{Mr}{B}=\frac{Ml_2}{C_1}，得\quad l_2=\frac{C_1}{B}r$$

同理DF段的等效长度：$l_3=\dfrac{C_1}{B}r$

所以：$L_1=2a+\dfrac{C_1}{C_2}b+2\dfrac{C_1}{B}r$

1.2—7　有两个平行轴AB和CD支承于轴承上，以齿轮啮合传动，如图所示。每一轴的外端带有一个很重的盘，该系统进行扭转振动。试计算在下列数据时的振动周期：$I_A=I_D=1000$磅—英寸—秒^2；$l_1=l_2=60$英寸；$d_1=d_2=3$英寸；$\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1}{2}$。略去两个齿轮和两根轴的惯量。假设每一轴的剪切模量$G=12\times10^6$磅/英寸^2。