常微分方程典型题解法和技巧

丁崇文

福建教育出版社

Chang Wei Fen
Fang Cheng
Dian Xing Ti
Jie Fa He Ji Qiao

常微分方程典型题解法和技巧

丁崇文

福建教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程典型题解法和技巧/丁崇文. 福州：
福建教育出版社，2001.10（2004.4 重印）
ISBN 7-5334-3311-4

Ⅰ. 常… Ⅱ. 丁… Ⅲ. 常微分方程－高等学校－
解题 Ⅳ. O175.1－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第076643号

常微分方程典型题解法和技巧

丁崇文

*

福建教育出版社出版发行

（福州梦山路27号 邮编：350001

电话：0591－3726971 3725592

传真：3726980 网址：www.fep.com.cn）

福建省蓝盾印刷厂印刷

（福州市鼓楼区湖前江厝路5号 邮编：350013）

开本850毫米×1168毫米 1/32 19.875印张 480千字 2插页

2001年10月第1版 2004年4月第2次印刷

印数：2 101－6 200

ISBN 7－5334－3311－4/O·1 定价：38.00元

内容简介

本书是作者根据多年的教学经验，收集了六百余题常微分方程的典型题，其宗旨是帮助读者学习和掌握解题方法和解题技巧，提高分析问题和解决问题能力。

凡有志于学习常微分方程的读者，本书定会给予巨大帮助和指导。本书可作为本科生、大专生的参考书，也可作为青年教师的参考书。

前　言

常微分方程中的知识、方法和技巧是丰富多彩的，熟练地掌握它们将使有关专业的读者，在其一生的学习和工作中受益无穷．著名数学家和教育家乔治·波利亚（George·Polya）曾说过："一位好的数学教师或学生应努力保持解题的好胃口"．许多大师的经验告诉我们，要学好常微分方程，最好的办法莫过于经常动手去解题．初学者解题时，深感拿到一个题目不知如何思考，如何下手分析，不善于把学过的知识灵活应用于解题，或者在做习题时采用"套公式"的方法，这样只能通过大量的练习，才能获得一些知识，很难学会分析问题和解决问题的方法．本书试图给读者展示另一种解题方法：从分析题目的条件和其结论之间的关系入手，理清解题思路，一步一步做下去，遇到需用公式，自然地提取使用，清楚地判断结论的正确性．这种解题方法，不但能对所学知识加深理解，还有利于培养数学的思维能力，掌握解题方法，提高分析问题、解决问题能力．为此，本书针对常微分方程课程内容精选、编制了六百余道典型题（这些题目不同于笔者已出版的《常微分方程习题与解答》中题目），用上述方法作了解答，有些题目的解法独特、新颖．解答的正文步骤较为简略，希望读者在阅读本书时边看边推导，最好主动去想一些更好的解题方法．解题思路和方法是多种多样的，而且方程（组）的通解形式和李雅普诺夫函数的形式也不是唯一的，所以本书所提供解法仅

供参考.

本书可以作为常微分方程的教学参考书.写这本书,对我们来说是一个尝试,希望对读者有所启发,但作者水平有限,缺点与错误在所难免,恳请专家和读者多多批评指正.

笔　者

2000 年 8 月 28 日

目　　录

第一章　绪　　论

1　指出下面微分方程的阶数,并回答方程是否是线性.

(1)　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^2 - y$,

(2)　$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^3 + 12xy = 0$,

(3)　$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y^2 = 0$,

(4)　$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3xy = \sin x$,

(5)　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \cos y + 2x = 0$,

(6)　$\sin(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}) + e^y = x$.

解　(1)　一阶线性;

(2)　二阶非线性;

(3)　二阶非线性;

(4)　二阶线性;

(5)　一阶非线性;

(6)　二阶非线性.

2　验证下列函数均为方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 y = 0$的解,这儿$\omega > 0$是常数.

(1)　$y = \cos\omega x$,

(2)　$y = c_1\cos\omega x$　(c_1是任意常数),

(3)　$y = \sin\omega x$,

(4)　$y = c_2\sin\omega x$　(c_2是任意常数),

(5) $y = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ （c_1、c_2 是任意常数），

(6) $y = A\sin(\omega x + B)$ （A、B 是任意常数），

(7) $y = \cos\omega(x + c_1)$ （c_1 是任意常数），

(8) $y = \cos(\omega x + c_1)$ （c_1 是任意常数）.

解 (1) 因为

$$左边 = -\omega^2\cos\omega x + \omega^2\cos\omega x = 0 = 右边,$$

所以 $y = \cos\omega x$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

(2) 因为

$$左边 = -c_1\omega^2\cos\omega x + c_1\omega^2\cos\omega x = 0 = 右边,$$

所以 $y = c_1\cos\omega x$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

(3) 因为

$$左边 = -\omega^2\sin\omega x + \omega^2\sin\omega x = 0 = 右边,$$

所以 $y = \sin\omega x$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

(4) 因为

$$左边 = -c_2\omega^2\sin\omega x + c_2\omega^2\sin\omega x = 0 = 右边,$$

所以 $y = c_2\sin\omega x$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

(5) 因为

$$\begin{aligned}左边 &= -c_1\omega^2\cos\omega x - c_2\omega^2\sin\omega x + c_1\omega^2\cos\omega x + c_2\omega^2\sin\omega x\\ &= 0 = 右边,\end{aligned}$$

所以 $y = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

(6) 因为

$$\begin{aligned}左边 &= -A\omega^2\sin(\omega x + B) + A\omega^2\sin(\omega x + B)\\ &= 0 = 右边,\end{aligned}$$

所以 $y = A\sin(\omega x + B)$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

(7) 因为

$$\begin{aligned}左边 &= -\omega^2\cos\omega(x + c_1) + \omega^2\cos\omega(x + c_1)\\ &= 0 = 右边,\end{aligned}$$

所以 $y=\cos\omega(x+c_1)$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解.

(8) 因为

$$\begin{aligned}\text{左边}&=-\omega^2\cos(\omega x+c_1)+\omega^2\cos(\omega x+c_1)\\&=0=\text{右边},\end{aligned}$$

所以 $y=\cos(\omega x+c_1)$ 是方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解.

3 设一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=2x$.

(1) 求出它的通解;

(2) 求通过点(1,4)的特解;

(3) 求出与直线 $y=2x+3$ 相切的解;

(4) 求出满足条件 $\int_0^1 y\,dx=2$ 的解;

(5) 绘出(2)、(3)、(4)的图形.

解 (1) $y=x^2+c$;

(2) 以 $x=1, y=4$ 代入(1)式得

$4=1+c$,

$c=3$,

所以 $y=x^2+3$;

(3) 由 $y'=2x=2$,

得 $x=1, y=5$,

代入(1)式得

$5=1+c, c=4$,

所以 $y=x^2+4$;

(4) 由 $\int_0^1(x^2+c)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+cx\right]_0^1=\frac{1}{3}+c=2$,

得 $c=\frac{5}{3}$,

所以 $y=x^2+\frac{5}{3}$;

(5)

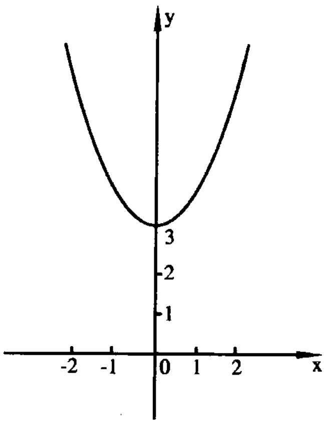

图1.1

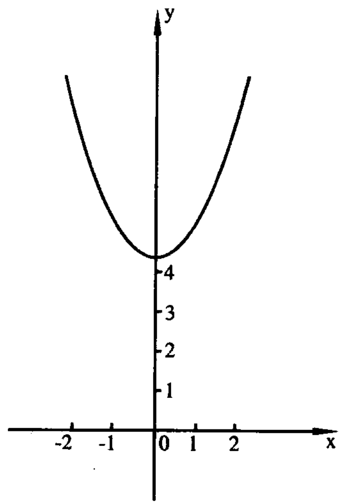

图1.2

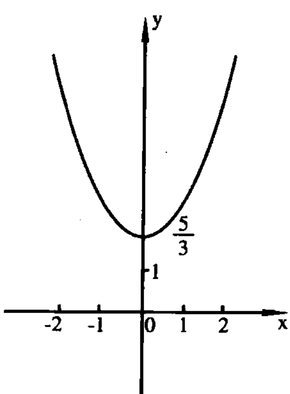

图1.3

4 确定下列哪些函数是微分方程 $y' - 2ty = t$ 的解.

(a) $y = 2$, (b) $y = -\frac{1}{2}$,

(c) $y = e^{t^2}$, (d) $y = e^{t^2} - \frac{1}{2}$,

(e) $y = -7e^{t^2} - \frac{1}{2}$.

解 代入方程验证,易知

$y = 2, y = e^{t^2}$ 不是方程解,

$y = -\frac{1}{2}, y = e^{t^2} - \frac{1}{2}, y = -7e^{t^2} - \frac{1}{2}$ 是方程解,

所以(b)、(d)和(e)是微分方程解.

5 确定下列哪些函数是微分方程 $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$ 解.

(a) $y = 0$, (b) $y = 2$,

(c) $y = 2t$, (d) $y = -3t$,

(e) $y = t^2$.

解 代入方程验证,易知

$y = 0, y = 2t, y = -3t$ 是方程解,

$y = 2, y = t^2$ 不是方程解,

所以(a),(c)和(d)是微分方程解.

6 确定下列哪些函数是微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$ 的解.

(a) $y = x$, (b) $y = x^8 - x^4$,

(c) $y = \sqrt{x^8 - x^4}$, (d) $y = (x^8 - x^4)^{\frac{1}{4}}$.

解 代入方程验证,易知

$y = x, y = x^8 - x^4, y = \sqrt{x^8 - x^4}$ 不是方程解,

$$y=(x^8-x^4)^{\frac{1}{4}}\text{ 是方程解,}$$

所以(d)是微分方程的解.

7 **确定下列哪些函数是微分方程**$y''-xy'+y=0$**解.**

(a) $y=x^2$, (b) $y=x$,

(c) $y=1-x^2$, (d) $y=2x^2-2$,

(e) $y=0$.

解 代入方程验证,易知

$$y=x^2,y=1-x^2,y=2x^2-2\text{ 不是方程解}$$

$$y=x,y=0\text{ 是方程解,}$$

所以(b)和(e)是微分方程解.

8 **确定下列哪些函数是微分方程** $x''-4x'+4x=\mathrm{e}^t$ **的解.**

(a) $x=\mathrm{e}^t$, (b) $x=\mathrm{e}^{2t}$,

(c) $x=\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t$, ($d$) $x=t\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t$,

(e) $x=\mathrm{e}^{2t}+t\mathrm{e}^t$.

解 代入方程验证,易知

$$x=\mathrm{e}^t,x=\mathrm{e}^{2t}+e^t,x=t\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t\text{ 是方程解,}$$

$$x=\mathrm{e}^{2t},x=\mathrm{e}^{2t}+t\mathrm{e}^t\text{ 不是方程解,}$$

所以(a)、(c)和(d)是微分方程解.

验证下列函数是否是相应微分方程通解(9 ~ 12)

9 $c^2y^2+(c^2-a^2)x^2=c^2(c^2-a^2)$,

$xyy'^2+y'(x^2-y^2-a^2)-xy=0$.

解 对式子

$$c^2y^2+(c^2-a^2)x^2=c^2(c^2-a^2),$$

关于 x 求导得

$$2yy'c^2 + (c^2 - a^2)2x = 0,$$

代入方程左边得

$$\frac{4x^3y(a^2 - c^2)^2}{4c^4y^2} + \frac{2x(a^2 - c^2)}{2c^2y}(x^2 - y^2 - a^2) - xy$$

$$= 0 = 右边,$$

所以 $c^2y^2 + (c^2 - a^2)x^2 = c^2(c^2 - a^2)$ 是方程的解,且该方程是一阶微分方程,因此它是原方程通解.

10 $y = e^x\int_0^x e^{t^2}dt + ce^x,$

$y' - y = e^{x+x^2}.$

解 对式子

$$y = e^x\int_0^x e^{t^2}dt + ce^x,$$

关于 x 求导得

$$y' = e^x\int_0^x e^{t^2}dt + e^xe^{x^2} + ce^x,$$

代入方程左边得

$$y' - y = e^{x+x^2} + e^x\int_0^x e^{t^2}dt + ce^x - e^x\int_0^x e^{t^2}dt - ce^x$$

$$= e^{x+x^2} = 右边,$$

所以 $y = e^x\int_0^x e^{t^2}dt + ce^x$ 是方程的解,且方程是一阶微分方程,因此它是方程的通解.

11 $y = x(\int \frac{e^x}{x}dx + c),$

$xy' - y = xe^x.$

解 对式子

$$y = x\left(\int \frac{e^x}{x}dx + c\right),$$

关于 x 求导得

$$y' = \int \frac{e^x}{x}dx + c + e^x,$$

代入方程左边得

$$\begin{aligned} xy' - y &= x\left(\int \frac{e^x}{x}dx + c\right) + xe^x - x\left(\int \frac{e^x}{x}dx + c\right) \\ &= xe^x = \text{右边}, \end{aligned}$$

所以 $y = x\left(\int \frac{e^x}{x}dx + c\right)$ 是方程解，且该方程是一阶微分方程，因此它是方程的通解.

12 $x = ye^{cy+1}$,

$$y' = \frac{y}{x(\ln x - \ln y)}.$$

解 对式子

$$x = ye^{cy+1},$$

关于 x 求导得

$$1 = y'e^{cy+1} + ye^{cy+1}cy',$$

代入方程左边得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{e^{cy+1} + cye^{cy+1}} = \frac{y}{x(1 + cy)} = \frac{y}{x(\ln x - \ln y)} \\ &= \text{右边}, \end{aligned}$$

所以 $x = ye^{cy+1}$ 是方程解，且该方程是一阶微分方程，因此它是方程的通解.

13 验证 $y = e^{-x} + x - 1$ 是方程 $y' + y = x$ 满足 $y(0) = 0$ 的解.

解 因为 $y = e^{-x} + x - 1$，　$y' = -e^{-x} + 1$,

$$左边 = -e^{-x} + 1 + e^{-x} + x - 1 = x = 右边,$$

所以 $y = e^{-x} + x - 1$ 满足方程,又

$$y(0) = e^{-0} + 0 - 1 = 0,$$

所以 $\qquad y(0) = 0,$

因此 $y = e^{-x} + x - 1$ 是方程 $y' + y = x$ 满足 $y(0) = 0$ 的解.

14　确定下列哪些函数是初值问题

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

的解.

(*a*) $y = \sin 2x$,　　(*b*) $y = x$,

(*c*) $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$,　　(*d*) $y = \cos 2x$.

解　$y = \sin 2x$ 满足方程且 $y(0) = 0$ 但 $y'(0) \neq 1$,所以它不是初值问题解;

$y = x$ 满足初值条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 但它不满足方程,所以它不是初值问题的解;

$y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ 满足方程且满足初值条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$,所以它是初值问题解;

$y = \cos 2x$ 满足方程但 $y(0) \neq 0, y'(0) \neq 1$,所以它不是初值问题解.

15　求下列两个微分方程的公共解:

(1)　$y' = y^2 + 2x - x^4$,

(2)　$y' = 2x + x^2 + x^4 - y - y^2$.

解　要求两个微分方程公共解,则它必须满足两个方程且斜率