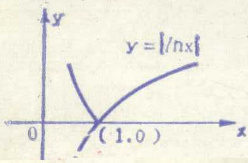
主编 徐光迎

中等数学

学习指导



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

南京大学出版社

中等数学学习指导

徐[illegible]迎　主编

周春泉　杨[illegible]蕙　[illegible]审

副主编　刘玉泽　傅必友　颜世[illegible]

编　者（以姓氏笔画为序）

江苏工业学院图书馆
藏书章

中等数学学习指导

徐光迎　主编

南京大学出版社出版发行

（南京大学校内）

中国人民解放军87423部队印刷厂印刷

开本787×1092毫米1/32　印张9.75　字数215千

1991年2月第1版　1991年2月第1次印刷

印数1—6500册

ISBN　7—305—01032—4

O·56　定价：3.80元

前　言

本书是根据现行工科类和财经类专业中专数学教学大纲的要求，参照高等教育出版社出版的工科类《数学》和财经类《数学》两套通用教材编写的。书稿由安徽省中专数学教学研究会组织审阅，除主审外，参加审稿的还有徐祖发、黄永英、施宗莱、夏景萱、汪自力、冯梅浩、尤鸿康、王爱华等。

本书内容包括初等数学和一元微积分，共三篇十六章，每章分基本内容、学习指导、典型例题和综合练习四部分。本书具有叙述简明、重点突出、选例典型、题型多样等特点，可供各类中专和技工学校、职业学校的学生用作学习辅导，亦可供有关教师和高中学生参考。

在编审过程中，我们曾得到安徽省中专数学教研会以及安徽、江苏、山东等省有关学校的大力支持，全国中专数学课程组沈清先生提过不少宝贵意见，谨在此一并致谢。

由于编者水平所限，书中一定存在不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编者

1990年10月于蚌埠

目录

第一篇

第二篇

第三篇

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

第一篇

第一章　集合与函数

一、基本内容

（一）集合的概念

1、集合的意义

每一组对象的全体形成一个集合，简称集。组成集合的各个对象叫做集合的元素。

习惯上，常用大写字母A、B、C…表示集合，用小写字母a、b、c…表示元素。元素a与集合A之间是"属于"（记作$a \in A$）或"不属于"（记作$a \notin A$）的关系。

由数组成的集合叫做数集。常见的数集有自然数集（N）整数集（Z），有理数集（Q）和实数集（R）。根据数的正负，常用Z^+表示正整数集，用R^-表示负实数集，等等。

由点组成的集合叫做点集。方程（组）或不等式（组）的所有解组成的集合称为解集。

在所研究的问题中，包含一切元素的集合叫做全集，记作Ω。

尽管任何对象都可以作为某个集合的元素，但对于一个给定的集合，其中的元素必须具备三个特征：

（i）确定性：元素是否属于集合，界限分明。

（ii）互异性：集合中任何两个元素都是不相同的。

（iii）无序性：集合中的元素没有主次、前后之别。

集合根据它的元素多少被分为

名　称	意　　义
有限集	含有有限个元素
无限集	含有无数个元素
单元素集	只含一个元素
非空集	至少含有一个元素
空集(∅)	不含任何元素

表1—1

集合的表示法一般有列举法和描述法两种。列举法是把属于某个集合的元素一一列举出来，写在括号{ }内；描述法是把属于某个集合的元素所具有的特定性质描述出来，写在括号{ }内。

为了形象直观地表示集合之间的关系和运算，通常还用圆(或任何封闭曲线围成的图形)表示一般集合，用矩形表示全集，而用圆或矩形内的点表示该集合的元素。这种用来表示集合的封闭图形称为文氏（Venn）图。

2、集合的包含关系

定义1：如果集合A的任何一个元素都属于集合B，则称A是B的子集，记作$A\subseteq B$(读作“A包含于 B”）或 $B\supseteq A$（读作“B包含A”）。

规定空集是任何集合的子集。根据定义，任何集合都是它自身的子集。因此任意一个非空集B，至少有两个子集（∅和B）。

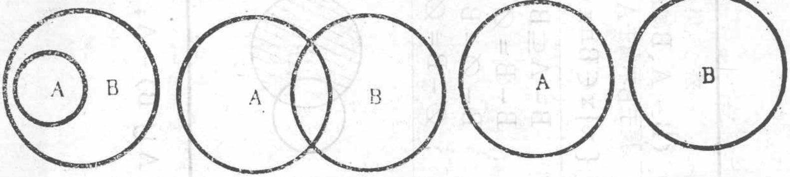
定义2：如果集合A是集合B的一个子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么A就叫做B的真子集，记作$A\subset B$或$B\supset A$（读作“B真包含A”）。

显然，空集是任何非空集的真子集。

定义3：对于两个集合A和B，如果$A\subseteq B$，同时，$B\subseteq A$，则称A和B相等，记作$A=B$。

易知，集合的包含关系是真包含关系与相等关系的统称。

一般说来，两个集合之间的关系有包含、部分包含和互不包含三种。它们可用文氏图表示如下：



包　含　　　　部分包含　　　　互不包含

图1—1

（二）集合的运算

1、 集合的运算

设A、B表示两个集合，Ω表示全集，则关于集合的运算如表1—2所示。

集合的并运算和交运算都满足交换律和结合律、二者之间满足分配律，即

$A\cup B=B\cup A$　　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$A\cap B=B\cap A$　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

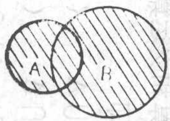
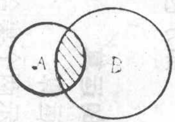
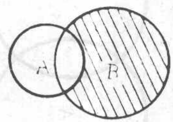
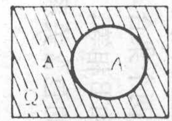
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

集合的并、交、补三种运算之间满足反演律〔德·摩根（De Morgan）公式〕

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，　　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

表1—2

集合运算（记号、读法）	并　集 $(A\cup B$、A并B)	交　集 $(A\cap B$、A交B)	差　集 $(B-A$、B减A)	补　集 $(\overline{A}$、A补)
元素特征	属于A或属于B $\{x\mid x\in A$或$x\in B\}$	属于A且属于B $\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$	属于B不属于A $\{x\mid x\in B$且$x\notin A\}$	不属于A $\{x\mid x\notin A\}$
包含关系	$A\subseteq A\cup B$ $B\subseteq A\cup B$ $A\cup A=A$ $A\cup\varnothing=A$	$A\cap B\subseteq A$ $A\cap B\subseteq B$ $A\cap A=A$ $A\cap\varnothing=\varnothing$	$B-A\subseteq B$ $B-B=\varnothing$ $B-\varnothing=B$ $\varnothing-B=\varnothing$	$A\cup\overline{A}=\Omega$ $A\cap\overline{A}=\varnothing$ $\overline{\Omega}=\varnothing$ $\overline{\varnothing}=\Omega$
示意图				

注：由差集的图示可以看出：$B-A=B-(A\cap B)=(A\cup B)-A$；

由补集的图示可以看出：$\overline{A}=\Omega-A$，$\overline{\overline{A}}=A$。

2、 有限集合的元素个数

根据集合运算的定义可知，如果A、B、Ω均为有限集合，则$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$\overline{A}$仍为有限集合。

设N_M表示有限集合M中的元素个数，则有公式：

（1）$N_{A\cup B}=N_A+N_B-N_{A\cap B}$

或$N_{A\cap B}=N_A+N_B-N_{A\cup B}$

（2）$N_{B-A}=N_B-N_{A\cap B}=N_{A\cup B}-N_A$

（3） $N_{\overline{A}}=N_\Omega-N_A$ 或$N_A=N_\Omega-N_{\overline{A}}$

（三）函数的概念

1、 函数

设A、B是两个集合，如果按照某种对应关系f， 对于A中的任何一个元素，在B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应（包括集A、集B及从A到B的对应关系f）叫做从集A到集B的单值对应（亦称映射），记作$f:A\to B$。

设X、Y是两个非空数集，则单值对应$f:X\to Y$称为从集X到集Y的函数，通常记作 $y=f(x)$。其中f表示对应关系；x表示集X中的任一元素（自变量），它的取值范围叫做函数的定义域（集合X）；y表示集Y中对应于x的元素（因变量），y值的集合叫做函数的值域（集合Y的子集）。

定义域和对应关系是构成函数的两个要素。确定函数的定义域有两点依据：一是要使表示函数的解析式有意义；二是要使所研究的问题具有实际意义。表示函数对应关系的方法通常有三种：解析法，列表法，图象法。用描点法作函数图象，就是通过列表、描点、连线等作图步骤，把表示函数的解析法转化为列表法乃至图象法。

如果函数$y=f(x)$在定义域内的反对应关系是单值的，

那么这个反对应关系就确定了一个以y为自变量，x为因变量的函数，它叫做$y=f(x)$的反函数，记作$x=f^{-1}(y)$。习惯上通常记为$y=f^{-1}(x)$（仍以x表示自变量）。

互为反函数的两个函数，它们的定义域、值域互换〔即$y=f^{-1}(x)$的定义域和值域分别是$y=f(x)$的值域和定义域〕，它们在同一平面直角坐标系中的图象关于直线$y=x$对称。

2、 区间

设a、b为任意两个实数，且$a<b$，规定区间如下表

有限区间	$[a,b]$	(a,b)	$[a,b)$	$(a,b]$	╲
无限区间	$(-\infty,a]$	$(-\infty,a)$	$[a,+\infty)$	$(a,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$

表1—3

有了区间，函数的定义域就可用不等式、集合或区间等三种方法来表示，在中专数学里，一般用区间表示。

二、学习指导

本章主要介绍现代数学中最基本、最重要的两个概念：集合与函数。本章的重点是集合的基本概念和运算、函数与反函数的概念。运用集合来定义函数是本章的难点。

（一）关于集合的概念

学习集合概念首先要注意集合中元素的三个特征，即确定性、互异性和无序性。确定性是指对于给定的集合，任给一个对象都能判断它是或者不是这个集合的元素。如“某班学生的全体”构成一个集合，某个学生是否这个班学生非常明确；“某市小孩子的全体”不构成集合，因为“小孩子”的概念模糊，多大的人叫做“小孩子”不明确。互异性要求

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

集合中的元素不能重复，相同的对象归入任何一个集合时，只能算作一个元素。无序性告诉我们用列举法表示集合时，不必考虑元素间的顺序。

其次要注意区别元素与集合之间是"属于"（或"不属于"）的关系，只有集合与集合之间才可能有"包含"(或"包含于"）的关系。

再次要能区分元素和集合。如∅与{0}，{a}与a，{∅}与∅。∅是空集而{0}则表示含有一个元素0的单元素集，{a}是单元素集而a仅表示一个元素，{∅}表示以空集∅为元素的单元素集。

表示集合的两种方法并无本质区别，究竟选用哪种表示法要视具体问题而定。有些集合只能用一种方法表示，有些集合两种表示法可兼用，例如

集合$\{-2, 0, 3, 5\}$中元素的共性不易看出，不宜用描述法。

集合$\{x \mid x^2-5x+6>0\}$中元素的个数无限，不宜用列举法。

而集合$\{x \mid x^2-4<0, x\in Z\}$还可用列举法表示为$\{-1, 0, 1\}$。

借助省略号，有时用列举法也可表示元素很多的集合，如$\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$，$\{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$。

（二）关于集合的运算

在学习并集与交集的概念时，要特别注意关键字"或"与"且"。"或"指几种可能的情况都包括，满足其中一个条件即可；"且"指同时满足所有条件，缺一不可。

补集是差集的特例，它是相对全集而言的，同一集合，相对不同的全集，其补集不同。例如：设$A=\{2, 4\}$，

$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$\Omega_2 = \{2, 4, 6, 8\}$，则

$$\overline{A}_1 = \Omega_1 - A = = \{1, 3, 5\}$$

$$\overline{A}_2 = \Omega_2 - A = \{6, 8\}$$

显然，$\overline{A}_1 \neq \overline{A}_2$。

反演律揭示了集合的并、交、补三种运算之间的联系，它可归纳为如下六字诀

并的补＝补的交

以左往右读，得$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；

以右往左读，得$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

有时，利用反演律可简化集合的运算。

（三）关于函数的概念

单值对应，可以是“一对一”或“多对一”，无论一个或多个自变量，只要对应于一个确定的因变量，都是单值对应。

函数由它的两要素完全确定。因此，两要素是区别不同函数的依据，两个解析式表示同一函数，除非它们的定义域和对应关系分别相同。例如$f(x) = x^2$和$f(x) = x^2$（$x \leqslant 0$），尽管对应关系相同，但定义域不同，故二者不是同一函数。

当函数由一个解析式给出时，求其定义域的要点如下表

解析式	定义域
整式	全体实数R
分式	须使“分母$\neq 0$”
偶次根式	须使“被开方数$\geqslant 0$”
对数式	须使“真数> 0”

表1—4

求$y = f(x)$的反函数的步骤：

（i）明确$f(x)$的定义域；

（ii）考察$f(x)$在定义域内反对应关系是否单值，如果是单值，则有反函数$x=f^{-1}(y)$；

（iii）互换x、y的符号，得反函数$y=f^{-1}(x)$。

三、典型例题

〔**例1**〕 判断下列写法的正误，并说明理由：

（1）$0\in\varnothing$，　　　　（2）$a\subset\{a\}$

解：（1）写法错误，根据定义，空集不含任何元素，因此元素"0"不可能属于空集$\varnothing$。

（2）写法错误，a表示元素，而$\{a\}$表示集合，元素与集合之间只能是"属于"或"不属于"的关系，不可能是包含关系，正确的写法应是"$a\in\{a\}$"。

〔**例2**〕下列每组中的两个函数是否相同？

（1）$f(x)=x$ 与 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$，

（2）$f(x)=x^2$ 与 $f(t)=t^2$。

解：（1）$\varphi(x)=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x & \text{当}x\geqslant0\text{时}\\-x & \text{当}x<0\text{时}\end{cases}$

虽然$f(x)$与$\varphi(x)$的定义域都是R，但由于对应关系不同，因而$f(x)$与$\varphi(x)$不相同。

（2）尽管$f(x)=x^2$与$f(t)=t^2$中表示自变量的字母不同，但二者的定义域和对应关系分别相同，因而二者表示同一函数。

〔**例3**〕设$\Omega=\{x|\ x\in N，且x\leqslant10\}$，$A=\{1，2，4，5，9\}$，$B=\{4，6，7，8，10\}$，$C=\{3，5，10\}$。求

（1）$A\cup B$、$A\cap B$；

（2）$(C\cap A)\cup(C\cap B)$、$(C\cup A)\cap(C\cup B)$；

（3）$\overline{A}\cap\overline{B}$ 、 $\overline{A}\cup\overline{B}$。

解：（1）$A\cup B=\{1、2、4、5、9\}\cup\{4、6、7、8、10\}$

$=\{1、2、4、5、6、7、8、9、10\}$

$A\cap B=\{1、2、4、5、9\}\cap\{4、6、7、8、10\}$

$=\{4\}$

（2）$\because C\cap(A\cup B)=(C\cap A)\cup(C\cap B)$

$\therefore (C\cap A)\cup(C\cap B)=C\cap(A\cup B)$

$=\{3、5、10\}\cap\{1、2、4、5、6、7、8、9、10\}$

$=\{5、10\}$

$\because C\cup(A\cap B)=(C\cup A)\cap(C\cup B)$

$\therefore (C\cup A)\cap(C\cup B)=C\cup(A\cap B)$

$=\{3、5、10\}\cup\{4\}=\{3、4、5、10\}$

（3）$\because \overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}, \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$

$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\Omega-A\cup B=\{3\}$

$\therefore \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\overline{\{4\}}=\{1,2,3,5,6,7,8,9,10\}$

由此例可见，利用集合运算的分配律与反演律可以简化计算。

〔**例4**〕设

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\in Z^{+}\\ 0 & x\in Z^{-}\\ 1 & x\in\{0\}\end{cases}$$

求$f\{f[f(-4)]\}$的值。

解：由函数定义知$f(-4)=0$，$f(0)=1$，

$f(1)=-1$

$\therefore f\{f[f(-4)]\}=f\{f(0)\}=f\{1\}=-1$

解此题的关键在于正确理解和掌握函数的两要素，当自

变量属于定义域的不同范围时，要根据相应的对应关系求函数值。

〔**例5**〕求下列函数的定义域：

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}+\sqrt{|x|-1}$$

解：要使函数$f(x)$有意义，必须

$$\begin{cases}x^2-1\neq 0\\ |x|-1\geqslant 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant 1\text{或}x\leqslant -1\end{cases}$$

$\therefore f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$。

当$f(x)$可看作由两个函数$f_1(x)$与$f_2(x)$经四则运算构成时，$f(x)$的定义域就是$f_1(x)$与$f_2(x)$的定义域的交集，因此，求$f(x)$定义域的方法是解能使$f_1(x)$与$f_2(x)$都有意义的不等式组。

〔**例6**〕求下列函数的反函数：

（1）$y=\dfrac{x-3}{2x-1}$；（2）$y=x^2-2$ $x\in[0,+\infty)$。

解：（1）函数$y=\dfrac{x-3}{2x-1}$的定义域为$(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$，由$y=\dfrac{x-3}{2x-1}$得$x=\dfrac{y-3}{2y-1}$（这个对应关系是单值的，因而$y=\dfrac{x-3}{2x-1}$有反函数）。

互换符号x和y，即得反函数$y=\dfrac{x-3}{2x-1}$。

它的定义域也是$(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$。

可见，函数$y=\dfrac{x-3}{2x-1}$的反函数是它自身。

（2）已知$y=x^2-2$的定义域$D=[0,+\infty)$

由$y=x^2-2$得$x^2=y+2$，从而

$x=\sqrt{y+2}$,（$\because x\in[0,+\infty)$）。

互换符号x、y即得函数$y=x^2-2$在$[0,+\infty)$上的反函数$y=\sqrt{x+2}$。

〔**例7**〕 设$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

（1）求证$f(x)+f(\dfrac{1}{x})=0$,

（2）求方程 $f(\dfrac{x-1}{x+1})=-x$的解集。

证（1）证明的关键在于区别函数与函数值，当自变量x在定义域D内取定值x_0时，函数$f(x)$的对应值记为$f(x_0)$。我们可以把$f(\dfrac{1}{x})$视为x取$\dfrac{1}{x}$时$f(x)$的对应值。

$$f(x)+f(\frac{1}{x})$$

$$=\frac{x-1}{x+1}+\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{x-1}{x+1}+\frac{1-x}{x+1}=0,$$

（2）：由$f(\dfrac{x-1}{x+1})=-x$，即$\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=-x$,

整理得 $x^2=1$，解得$x=\pm1$。

但当$x=-1$时，分式$\dfrac{x-1}{x+1}$无意义，所以$x=-1$是增根。

因此，原方程的解集是$\{1\}$。

〔**例8**〕 为了解决上、下班的交通问题，调查了某地100个职工，其中78人持有月票，52人拥有自行车，而持有月票又拥有自行车的有37人，问（1）持有月票而无自行车的；（2）既无月票又无自行车的各有多少人？

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo