FUNCTIONAL ANALYSIS

泛函分析

FUNCTIONAL ANALYSIS

泛函分析

[美] W. Rudin

赵俊峰 刘培德 译

湖北教育出版社

泛函分析

〔美〕W·Rudin 著

赵俊峰　刘培德 译

*

湖北教育出版社出版、发行

湖北省新华印刷厂排版、印刷

850×1168毫米32开本　15印张　5插页　371 000字

1989年8月第1版　1989年8月第1次印刷

印数：1—1 200

ISBN 7—5351—0284—0130—5/G·118

定价：6.90元

前　　言

泛函分析是一门学科，它研究某些拓扑代数结构以及把有关这些结构的知识应用于解析问题的方法。

关于这门学科的一本好的入门教科书应该包括它的公理系统(即拓扑向量空间一般理论的公理)的介绍，至少应该论述一些具有某种深度的专题，应该包含对于数学其它分支的一些有价值的应用，我希望这本书符合这些准则。

这门学科是庞大的，而且正在迅速发展，([4]的第一卷中的文献有96页，还只到1958年)、为了写一本中等规模的书，有必要选择某些领域而忽略其它的方面。我充分认识到，几乎任何一个看过目录的行家将会发现他(和我)所喜爱的某些专题不见了，而这似乎是不可避免的。写成一本百科全书并不是我的目的。我是想写一本书，它能够为进一步的探索打开通路。

这就是略去可能已包含在拓扑向量空间一般理论的论述中的许多更深奥专题的理由。例如，没有关于一致空间，关于Moore—Smith 收敛性，关于网和滤子的讨论。完备性概念仅仅出现在度量空间的内容中。囿空间没有提到，桶空间也没有。当然共轭性是提到了，但不是以最一般的形式出现的。向量值函数的积分是严格地作为一种工具论述的。我们的注意力局限在连续的被积函数上，其值在Frechet空间中。

然而，第一部分的材料对于具体问题的几乎所有应用是足够的。这其实就是这门课程应该强调的：抽象和具体二者之间紧密的相互作用不仅是整个这一学科最有用的方面而且也是最迷人的

地方。

这里对于材料的取舍还具有下面特色。一般理论绝大部分是在没有局部凸性的假设下叙述的。紧算子的基本性质是从Banach 空间的共轭理论导出的。第5章里关于端点存在性的Krein-Milman 定理有着多种形式的应用。广义函数理论和Fourier 变换是相当详尽的，并且（以很简短的两章）应用于偏微分方程的两个问题和 Wiener 的 Tauber型定理及其两个应用中。谱定理是从Banach 代数理论（特别地，从交换B^*-代数的Gelfand-Naimark 特征）导出的；这也许不是最简捷的方法，但却是容易的。相当详细地讨论了 Banach 代数中的符号演算，对合与正泛函也是如此。几个尚未写进其它教科书里的关于 Banach 代数的最新结果也包括进来了。

我假定读者熟悉测度理论和Lebesgue积分理论(包括象 L^p 空间的完备性的知识)，全纯函数的某些基本性质（如Cauchy 定理的一般形式和Runge 定理）以及与这两个解析问题并行的基本拓扑知识。另外一些拓扑事实简要地收在附录A中，除了什么是同态之类的知识外，几乎不需要什么代数背景。

历史性的参考文献汇集在附录B中。其中一些是关于初始来源的，一些是较近时期的书、文章或者可以从中找到进一步参考文献的阐述性文章。当然还有许多条目根本没有提供文献。当缺少具体的参考文献时，绝不意味着我意欲将那些工作攫为己有。

大部分应用放在第5，8，9章。有些在第11章和 250 多个习题里。许多习题备有提示。

这本书是从我在 Wisconsin 大学教过的课程中产生的。我曾与我的某些同事就各种专题进行过富有成效的讨论。特别是 Patrick Ahern, Paul Rabinowitz, Daniel Shea 和 Robert Turner. 我愉快地对他们表示感谢。

W. Rudin

内容提要

本书根据W.Rudin著《Functional Analysis》一书译出。全书三个部分共十三章和两则附录。第一部份1，2，3，4，5章是拓扑向量空间泛函分析的一般理论，第二部分6，7，8，9章是广义函数和Fourier变换，包括在微分方程中的应用和Tauber理论，第三部分10，11，12，13章是Banach代数和谱论，包括交换代数，Hilbert空间上的有界算子，无界算子。附录A叙述关于紧性和连续性的一些命题，比如Hausdorff最大定理，Tychonoff定理，Ascoli定理和序列连续性等。附录B对全书各章进行了评注，提示了历史发展线索和进一步的结果。

本书在材料的取舍和处理手法上很有特色，是一本好的泛函分析方面的教科书和参考书。它包括了某些公理表现系统的准确描述，并精彩地讨论了一些深入的专题，同时给出了在数学其他分支如微分方程中的有价值的应用。本书叙述清楚，论证严谨，不少地方的注释相当精辟并具有启发性，这是一本提高性读物，可供数学专业高年级学生和研究生作教学用书，亦可作大学数学教师参考书。

目　录

前言
第一部分　一般理论……1
第一章　拓扑向量空间……1
引论……1
分离性质……8
线性映射……13
有限维空间……14
度量化……18
有界性和连续性……23
半范数和局部凸性……26
商空间……32
例……35
习题……41
第二章　完备性……47
Baire 纲……47
Banach—Steinhaus 定理……48
开映射定理……53
闭图象定理……56
双线性映射……58
习题……59
第三章　凸性……63
Hahn—Banach 定理……63
弱拓扑……69

紧凸集 ……………………………………………………76
向量值积分……………………………………………………85
全纯函数 ……………………………………………………90
习题 ……………………………………………………94
第四章 Banach 空间的共轭性 …………………………… 101
赋范空间的赋范共轭 …………………………………… 101
伴随算子 ……………………………………………… 107
紧算子 ………………………………………………… 113
习题 …………………………………………………… 121
第五章 某些应用……………………………………… 127
连续性定理…………………………………………… 127
L_p-空间的闭子空间 ………………………………… 128
向量测度的值域 ……………………………………… 130
推广的 Stone-Weierstrass 定理……………………… 132
两个插值定理………………………………………… 134
不动点定理…………………………………………… 137
紧群上的Haar测度…………………………………… 140
不可余子空间………………………………………… 144
习题…………………………………………………… 150
第二部分 广义函数与 Fourier 变换……………………… 153
第六章 测试函数与广义函数………………………… 153
引论 …………………………………………………… 153
测试函数空间………………………………………… 154
广义函数的演算 ……………………………………… 161
局部化 ………………………………………………… 166
广义函数的支撑 ……………………………………… 169
作为导数的广义函数 ………………………………… 172
卷积 …………………………………………………… 175

习题 …… 183
第七章 Fourier变换 …… 189
基本性质 …… 189
平缓广义函数 …… 196
Paley—Wiener 定理 …… 204
Sobolev 引理 …… 210
习题 …… 213
第八章 在微分方程中的应用 …… 219
基本解 …… 219
椭圆型方程 …… 224
习题 …… 233
第九章 Tauber 型理论 …… 237
Wiener 定理 …… 237
素数定理 …… 242
更新方程 …… 248
习题 …… 252
第三部分——Banach 代数和谱论 …… 256
第十章 Banach 代数 …… 256
引论 …… 256
复同态 …… 260
谱的基本性质 …… 264
符号演算 …… 269
微分 …… 280
可逆元素群 …… 290
习题 …… 292
第十一章 交换 Banach 代数 …… 298
理想和同态 …… 298
Gelfand 变换 …… 303

对合 …………………………………………………… 312
对于非交换代数的应用 …………………………………… 317
正泛函 …………………………………………………… 322
习题 ……………………………………………………… 328
第十二章 Hilbert空间上的有界算子 …………………… 333
基本事实 ………………………………………………… 333
有界算子 ………………………………………………… 337
交换性定理 ……………………………………………… 342
单位分解 ………………………………………………… 344
谱定理 …………………………………………………… 349
正常算子的特征值 ……………………………………… 356
正算子与平方根 ………………………………………… 359
可逆算子群 ……………………………………………… 362
B^*-代数的特征 ……………………………………… 365
习题 ……………………………………………………… 370
第十三章 无界算子 ……………………………………… 377
引论 ……………………………………………………… 377
图象与对称算子 ………………………………………… 381
Cayley变换 ……………………………………………… 386
单位分解 ………………………………………………… 391
谱定理 …………………………………………………… 398
算子半群 ………………………………………………… 406
习题 ……………………………………………………… 415
附录 A 紧性与连续性 …………………………………… 420
附录 B 注释与评论 ……………………………………… 425
文献目录 ………………………………………………… 440
特殊符号表 ……………………………………………… 444
索引 ……………………………………………………… 448

第一部分　一般理论

第一章　拓扑向量空间

引论

1.1 分析学家们研究的许多问题主要的并不是涉及单个对象的，如一个函数，一个测度或一个算子，而是处理一大类这种对象．在这方面出现的大多数有价值的类实际上是具有实数域或者复数域的向量空间．由于极限过程在每个解析问题里（明显地或隐蔽地）起作用，毫不奇怪，这些向量空间都配备有度量，或者至少是拓扑．它承担了构成这个空间的对象之间的某些自然的联系．实现这一点的最简单和最重要的途径是引进一个范数，所得到的结构（定义在下面）称为赋范向量空间或赋范线性空间，或者简单地称为赋范空间．

在整个这本书中，向量空间一词将指在复数域 C 或者实数域 R 上的向量空间．为了完整起见，详细定义在§1.4中给出．

1.2 赋范空间　向量空间 X 称为赋范空间，如果对于每个 $x\in X$ 对应有一个非负实数 $\|x\|$，叫做 x 的范数，使得

(a) 对于 X 中所有 x，y，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

(b) 若 $x\in X$，α 是标量，$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$，

(c) 若 $x\neq 0$，$\|x\|>0$．

“范数”一词也用于表示把 x 映射为 $\|x\|$ 的函数．

每个赋范空间可以看作一个度量空间，其中 x 和 y 之间的距离 $d(x,y)$ 是 $\|x-y\|$，d 的有关性质是：

(i) 对于所有 x 和 y，$0\leqslant d(x, y)<\infty$，

(ii) $d(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$，

(iii) 对于所有 x, y，$d(x, y)=d(y, x)$，

(iv) 对于所有 x, y, z，$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$。

在任何度量空间中，中心在 x 半径为 r 的开球是集合

$$B_r(x)=\{y:d(x,y)<r\}.$$

特别地，如果 X 是赋范空间，集合

$$B_1(0)=\{x: \|x\|<1\} \text{和} \overline{B}_1(0)=\{x: \|x\|\leqslant 1\}$$

分别是 X 的开单位球和闭单位球。

为了表明度量空间的一个子集是开的，必须并且只须它是开球的并(可以是空集)，由此得到一个拓扑(见§1.5)。如果度量象上面那样由范数得来，容易验证向量空间运算（加法和数乘）关于这个拓扑是连续的。

Banach 空间是赋范空间，它在由范数定义的度量中是完备的，这指的是每个 *Cauchy* 序列是收敛的。

1.3 许多熟知的函数空间是 *Banach* 空间。让我们只提及若干类型：紧空间上连续函数的空间；出现于积分理论中的 L^p 空间；与欧氏空间最接近的空间——*Hilbert* 空间；可微函数的某些空间；从一个 *Banach* 空间到另一个 *Banach* 空间的连续线性映射的空间；*Banach* 代数。所有这些都将出现在以后的课文中。

但是也有许多重要的空间不具备这种结构。这里是一些例子：

(a) $C(\Omega)$，欧氏空间 R^n 中某个开集 Ω 上所有连续复函数的空间。

(b) $H(\Omega)$，在复平面的某个开集 Ω 中的所有全纯函数的空间。

(c) C_K^∞，在 R^n 上无穷可微并且在某一固定的具有非空内部

的紧集 K 外为 0 的所有复函数的空间。

(d) 在广义函数理论中用到的测试函数的空间，以及广义函数自身所成的空间。

正象后面将要看到的那样，这些空间所取的自然拓扑不能由范数导出，它们象赋范空间一样是拓扑向量空间的例子。拓扑向量空间这一概念渗透于整个泛函分析。

在简单地说明了我们的动机之后，这里是一些详细的定义，随后（在§1.9中）将罗列第一章的某些结果。

1.4 向量空间 字母 R 和 C 将总是分别表示实数域和复数域。现在，用Φ代表 R 或 C。一个标量是标量域Φ的一元。Φ上的向量空间是一个集合 Z，它的元素称为向量，其中定义有两个运算，加法和标量乘法，它们具有下列熟知的代数性质：

(a) 每一对向量 x 和 y 对应一向量 $x+y$，使得

$$x+y=y+x \quad 并且 \quad x+(y+z)=(x+y)+z;$$

X 包含唯一的向量 0（零向量或X的原点）使得对于每个 $x\in X$ 有 $x+0=x$；又对于每个 $x\in X$ 对应唯一的向量 $-x$ 使得 $x+(-x)=0$。

(b) 每一对α，x，$\alpha\in\Phi$，$x\in X$ 对应一向量 αx 使得

$$1x=x, \quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,$$

并且两个分配律

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$$

成立。

当然符号 0 也用于表示标量域的 0 元。

实向量空间是 $\Phi=R$ 的向量空间；复向量空间是 $\Phi=C$ 的向量空间. 在任何一个关于向量空间的命题里，若标量域没有明确提及，则理解为应用于这两种情况.

如果 X 是向量空间，$A\subset X$，$B\subset X$，$x\in X$ 并且 $\lambda\in\Phi$，我们采用下列记号：

$$x+A=\{x+a:a\in A\},$$
$$x-A=\{x-a:a\in A\},$$
$$A+B=\{a+b:a\in A、b\in B\},$$
$$\lambda A=\{\lambda a:a\in A\}.$$

特别地(取 $\lambda=-1$)，$-A$ 表示 A 中元素的加法逆元的全体构成的集合.

注意：在这种规定下，可能出现 $2A\neq A+A$(习题 1).

集合 $Y\subset X$ 称为 X 的子空间，若 Y 自身是一个向量空间(当然，关于同样的运算). 容易验证这种情况出现当且仅当 $0\in Y$ 并且对于所有标量 α 和 β，

$$\alpha Y+\beta Y\subset Y.$$

集合 $C\subset X$ 称为是凸的，若

$$tC+(1-t)C\subset C\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

换句话说，若 $x\in C$，$y\in C$ 并且 $0\leqslant t\leqslant 1$，要求 C 包含 $tx+(1-t)y$.

集合 $B\subset X$ 称为是均衡的，若对于每个 $\alpha\in\Phi$，$|\alpha|\leqslant 1$，$\alpha B\subset B$.

称向量空间 X 有维数 n $(dimX=n)$，若 X 有基 $\{u_1, \cdots, u_n\}$. 这是指每个 $x\in X$ 有唯一的表达式：

$$x=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n\quad(\alpha_i\in\Phi).$$

如果对于某个 n，$dimX=n$，称 X 具有 有限维数. 若 $X=\{0\}$，则 $dimX=0$.

例　若 $X=C$(标量域 C 上的一维向量空间)，其均衡集是：C，空集 ϕ 和每个以 0 为心的圆盘(开的或闭的). 如果 $X=R^2$(标量域 R 上的二维向量空间)，则有更多的均衡集：任何一个中点在(0，0)的线段都是. 关键在于，尽管明显地 C 和 R^2 等同，但从它们的向量空间结构方面考虑，二者是完全不同的.

1.5 拓扑空间 一个拓扑空间是一个集合 S，其中指定了一个子集（称为开集）族 τ，具有下列性质：S 是开的，ϕ 是开的，任何两个开集之交是开的并且每个开集族的并是开的．这种集族 τ 称为 S 上的拓扑．当有必要明确这一点的时候，相应于拓扑 τ 的拓扑空间将记为 (S, τ) 而不用 S．

若 S 和 τ 如上所述，这里是一些将要用到的标准术语：

集合 $E\subset S$ 是闭的，当且仅当它的余集是开的．E 的闭包 $\overline{E}$ 是包含 E 的所有闭集的交．E 的内部 E° 是 E 的一切开子集的并．一个点 $p\in S$ 的邻域是包含 p 的任一开集．(S, τ) 是 *Hausdorff* 空间以及 τ 是 *Hausdorff* 拓扑， 若 S 中不同的点有不相交的邻域．集合 $K\subset S$ 是紧的，若 K 的每个开复盖具有有限子复盖．一个集族 $\tau'\subset\tau$ 是 τ 的基，若 τ 的每个元素（即，每个开集）是 τ' 的某些元素的并．一个点 $p\in S$ 的邻域族 γ 是在 p 点的局部基，若 p 的每个邻域包含 γ 的一个元．

容易验证，若 $E\subset S$ 并且 σ 是所有交集 $E\cap V$ $(V\in\tau)$ 的族，则 σ 是 E 上的拓扑，我们称这一拓扑是 E 从 S 诱导的拓扑．

若拓扑 τ 是由度量 d 导出的(见 § 1.2)， 我们说 d 和 τ 彼此是相容的．

Hausdorff 空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于一点 $x\in X$（或者 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$），若 x 的每个邻域包含除有限多个以外的所有 x_n．

1.6 拓扑向量空间 假设 τ 是向量空间 X 上的拓扑，使得

(a) X 的每一点是闭集，并且

(b) 向量空间运算关于 τ 是连续的．

在这些条件下，τ 称为 X 上的向量拓扑，X 称为拓扑向量空间．

(a) 的更确切的叙述是：对于每个 $x\in X$，以 x 为唯一元素的集合 $\{x\}$ 是闭集．

在许多课本里把(a)从拓扑向量空间的定义里省去。由于几乎在每个应用中(a)是满足的，而且大多数有意义的定理要求(a)作为它的前提，看来最好是把它包括在公理内。(定理 1.12 说明(a)和(b)一起意味着 τ 是 *Hausdorff* 拓扑.)

根据定义，所谓加法是连续的是指笛卡尔乘积 $X\times X$ 到 X 中的映射

$$(x,\ y)\to x+y$$

是连续的：若 $x_i\in X$，$i=1,2$，并且 V 是 x_1+x_2 的邻域，则存在 x_i 的邻域 V_i 使得

$$V_1+V_2\subset V.$$

类似地，标量乘法是连续的是指 $\Phi\times X$ 到 X 中的映射

$$(\alpha,\ x)\to\alpha x$$

是连续的：若 $x\in X$，α 是标量并且 V 是 αx 的邻域，则对于某个 $r>0$ 和 x 的某个邻域 W，只要 $|\beta-\alpha|<r$，就有 $\beta W\subset V$。

拓扑向量空间的子集 E 称为是有界的，若对于 X 中 0 点的每个邻域 V 相应地有 $s>0$ 使得对于每个 $t>s$，$E\subset tV$。

1.7 不变性　设 X 是拓扑向量空间．与每个 $a\in X$ 和每个标量 $\lambda\neq 0$ 相联系的平移算子 T_a 和乘法算子 M_λ 由下式给出：

$$T_a(x)=a+x,\quad M_\lambda(x)=\lambda x\quad (x\in X).$$

下面的简单命题是十分重要的：

命题　T_a 和 M_λ 是 X 到 X 上的同胚。

证明　向量空间公理本身就意味着 T_a 和 M_λ 是一一的，是把 X 映射到 X 上的，并且它们的逆分别是 T_{-a} 和 $M_{1/\lambda}$。向量空间运算的连续性意味着这四个映射是连续的。所以它们每一个都是同胚（逆映射也连续的连续映射）.

这个命题的一个推论是每个向量拓扑 τ 是平移不变的（为了方便，简单地称为不变的）：集合 $E\subset X$ 是开的当且仅当它的每

个平移 $a+E$ 是开的. 于是 τ 完全由任何一个局部基确定。

在向量空间中，局部基一词将总是指 0 点的局部基. 因此拓扑向量空间 X 的局部基是 0 点的一个邻域族$\mathscr{B}$， 使得 0 点的每个邻域包含$\mathscr{B}$ 的一个元. 于是 X 的开集恰是$\mathscr{B}$ 的元经过平移的并.

向量空间 X 上的度量 d 称为是不变的， 若对于 X 中所有 x, y, z,

$$d(x+z, y+z)=d(x, y).$$

1.8 拓扑向量空间的类型 在下列定义中，X 总表示具有拓扑 τ 的拓扑向量空间.

(a) X是局部凸的，若存在局部基$\mathscr{B}$，它的所有元素都是凸的.

(b) X是局部有界的，若 0 有一个有界邻域.

(c) X是局部紧的，若 0 有一个邻域，其闭包是紧的.

(d) X是可度量的，若 τ 与某个度量 d 相容.

(e) X是 F-空间， 若它的拓扑 τ 是由一个完备不变度量 d 导出的.（与 §1.25 比较.）

(f) X是 *Frechet* 空间，若X是局部凸 F-空间.

(g) X是可赋范的，若X上存在范数使得由这一范数导出的度量与 τ 相容.

(h) 赋范空间和 *Banach* 空间已经定义(§ 1.2).

(i) X 具有 *Heine-Borel* 性质，若X的每个有界闭子集是紧的.

术语(*e*)和(*f*)并不是普遍采用的：在某些教科书中，局部凸性从 *Frechet* 空间的定义中省去，而另一些人用 F- 空间描述我们称呼的 *Frechet* 空间.