应用数学丛书

数理逻辑

沈百英 编著

国防工业出版社

应 用 数 学 丛 书

数 理 逻 辑

沈百英 编著

国防工业出版社

（京）新登字106号

内 容 简 介

数理逻辑是一门边缘性学科，它以人们的逻辑推理本身作为研究对象，也是计算机科学的基础理论。

本书对两个逻辑演算（命题演算与谓词演算）作了详尽的阐述，并对数理逻辑的三个分支，即递归论、模型论与证明论的内容穿插地作了初步介绍，而其中特别对递归函数论方面作了一定的介绍。

本书可作为计算机科学、数学、哲学等工作者的参考书，并可作为各高等院校数学系、计算机科学系数理逻辑课程的教材或参考书。

应用数学丛书
数 理 逻 辑
沈百英 编著
*
国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号）
（邮政编码 100044）
新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
850×1168 1/32 印张 $12^3/_4$ 333千字
1991年12月第一版 1991年12月第一次印刷 印数：0,001—1,000册

ISBN 7-118-00402-2/O·27 定价：10.40元

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其是近年发展起来的边缘学科，更与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作，更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧，也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式。各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

序　言

在我国，数理逻辑这门学科已被越来越多的人所重视，它的理论价值与实用价值已越来越明显；特别是正处在电子计算机普遍使用的今天，它的重要性也显得更突出。

各门科学都大量使用着逻辑推理，而数理逻辑却以推理本身作为研究的对象；它以研究两个演算（即命题演算与谓词演算）开始，经过近一个世纪的发展，现在已形成了内容异常丰富的四大分支，即递归论、公理化集合论、证明论与模型论。如果把作为此四大分支的公共基础的逻辑演算独立为一大分支，那么数理逻辑现在已成为有五大分支的一门学科。

起初，数理逻辑是一些数学工作者（特别是研究数学基础的人们）所关心的学科，现在它不但受到更多数学分支的工作者的重视，而且已成为人工智能、自动控制等方面工作者的指导性学科，特别是已成为计算机科学的基础理论（很多计算机科学家本身就是数理逻辑家）；另外广大哲学界、法学界也已把数理逻辑作为一个重要的研究领域。

本书仅是数理逻辑这门学科的一个引论，主要介绍逻辑演算部分的两个演算。由于本书以计算机科学工作者为主要读者对象，故介绍时注重于语法描述（也即形式描述），再辅以语义描述（也即含义描述），这是因为计算机只懂语法，不懂语义（也即只懂形式，不懂含义）。另外对联结词的书写方式，注重于前置法，再辅以中置法，并把中置法作为前置法的缩写（因此在理论上说只使用前置法），这是因为实践证明计算机易懂前置法，难懂中置法（当然更易懂后置法）。本书对这两个演算作了多种形式的刻划，又在演算的形式推理方面，直言式推理与自然推理（或假设推理）并重，并介绍了足够的具体推导技巧。

在四大论方面，除公理化集合论外，本书对其它三大论，即递归论、证明论与模型论都作了一定内容的介绍，也因为递归论对于计算机科学工作者来说显得更重要，故本书也着重介绍了它的大部分初等理论。关于集合论方面，本书未涉及到公理化集合论的具体内容，并假定读者熟悉一些素朴集合论（也即直观集合论）方面的一些基本知识，它们已在本书的绪论中作了叙述。

除素朴集合论方面的一些知识外，本书还在绪论中叙述了另外一些要求读者事先熟悉的知识，因为笔者既把它们看作本书的预备知识（因此大部分结论是不加证明或仅作简单证明），又把它们看作本书的有机组成部分。

本书对所介绍的内容都作了详细的并且尽可能普遍化的阐述，对Gödel的完备性定理与不完全性定理等都作了详尽的刻划。

本书若能对读者在获取数理逻辑的知识方面起一些作用，那么笔者将感到高兴。

应用数学丛书目录

*1.	Z变换与拉普拉斯变换		关肇直	王恩平	编著
*2.	常微分方程及其应用		秦化淑	林正国	编著
*3.	实变函数论基础			胡钦训	编著
*4.	正交函数及其应用			柳重堪	编著
*5.	沃尔什函数与沃尔什变换		关肇直	陈文德	编著
*6.	圆柱函数			刘　颖	编著
*7.	集合论			程极泰	编著
*8.	图论			王朝瑞	编著
*9.	概率论			狄昂照	编著
*10.	矩阵理论		王耕禄	史荣昌	编著
*11.	复变函数论			杨维奇	编著
*12.	逼近论	徐利治	周蕴时	孙玉柏	编著
*13.	矢量与张量分析	冯潮清	赵愉深	何浩法	编著
*14.	模糊数学		汪培庄	刘锡荟	编著
*15.	编码理论			肖国镇	编著
*16.	应用泛函分析			柳重堪	编著
17.	偏微分方程			丁夏畦	编著
18.	球函数及其应用			楼仁海	编著
*19.	椭圆函数及其应用			高本庆	编著
*20.	应用离散数学			陈文德	编著
*21.	拓扑理论及其应用		王则柯	凌志英	编著
*22.	网络理论			张正寅	编著
*23.	广义函数及其解析表示		李邦河	李雅卿	编著
*24.	群论			刘木兰	编著
*25.	数理逻辑			沈百英	编著

*26.	线性系统与多变量控制			叶庆凯	编著
27.	最优化计算方法	马仲蕃	应玫茜	陈光亚	编著
28.	实用数理统计		李国英	吴启光	编著
*29.	多项式与多项式矩阵		王恩平	王朝珠	编著
30.	索伯列夫空间			丁夏畦	编著
31.	旋转群与四元素方法			毕大川	编著
*32.	信息论与最优编码			章照止	编著
33.	场的数学理论及物理应用			杜　珣	编著
34.	系统的动态辨识			张永光	编著
*35.	非线性系统分析与应用			司徒荣	编著
36.	数学物理数值方法		应隆安　滕震环	韩厚德　黄禄平	编著
*37.	误差理论与数据处理			贾沛璋	编著
38.	可计算性与计算复杂性			李　未	编著
*39.	随机过程理论及应用			熊大国	编著
*40.	估计理论与随机控制			卢伯英	编著
*41.	应用组合数学			刘振宏	编著
*42.	渐进分析方法及应用		徐利治	陈文忠	编著
43.	有限元方法			应隆安	编著
44.	经济数学		苑凤岐	林　寅	编著
*45.	预测的数学方法			张有为	编著
46.	粘性流体理论		吴望一	韩厚德	编著
47.	塑性理论			黄筑平	编著
48.	变分法及其应用		叶庆凯	郑应平	编著

* 为已经出版或即将出版的书目。

目　　录

绪　论

什么是数理逻辑？

在多门科学中，人们都在使用大量的推理（归纳推理或演绎推理），以达到寻找自然界的各种规律性的目的。但这些大量的符合逻辑的推理不是这些科学的研究对象，而是作为一种工具，作为获得正确的自然规律的保证。在高度抽象的各种数学学科中，也几乎处处在使用演绎推理来得到各门学科独自的数学定理，但它们亦不以演绎推理为自己的研究对象；即使在叙述严密的数学分支（例如抽象代数学）中，演绎推理的规律亦是作为已知的东西而加以运用。

以推理作为研究对象的学科之一就是本书所要讨论的数理逻辑。因此粗略地说，数理逻辑就是以推理（特别是数学中的演绎推理）作为研究对象的学科。另外数理逻辑主要是运用数学方法来研究推理。这些数学方法主要是精确化与符号化。但数理逻辑亦给其它科学，特别是数学提供了大量的研究方法，其中特别是公理方法，语法研究方法与可构造性的方法（其中包括可构造性的论证方法，可构造性的判定方法以及能行地构造对象的方法）。就是由于这些，使得数理逻辑成为计算机科学的基础理论。另外由于数理逻辑对推理，特别是演绎推理的形式研究方法，给哲学中形式逻辑这门学科带来了新的生命。

数理逻辑这门学科发展到今天，已有四大分支：递归论、公理集合论、证明论（包括构造性数学）与模型论。本书所论述的内容主要是这四大分支的一个共同基础部分，很多学者把它作为数理逻辑的一个单独分支，称之为逻辑演算。另外也穿插地介绍了一些关于递归论、模型论与证明论的初步内容。

集合与函数

集合与函数是两个很基本的概念，要想用更基本的概念来严格定义它们已是很困难的了，因此我们只能加以“描述”。集合是由一些确定的、互相可区别的事物所组成的一个整体。组成集合的对象或事物称为这个集合的元素。还要补充说明的是，集合中的元素个数与性质是不加限制的，它们可有限，亦可无穷；这些元素的性质可互不相干。另外集合中的元素是彼此互不相同的，相同的两个事物只能作为一个元素处理。最后，一个集合中的元素是明确的东西，因此任何一个事物在或不在某集合中是确定的，即或者在此集合中，或者不在此集合中。用符号 $a\in S$ 表示元素 a 在集合 S 中。用 $a\notin S$ 表示元素 a 不在集合 S 中。

确定一个集合通常有两种方法。一种是列举法，就是把该集合中的元素全部列出。例如集合 S 如下给出：

$$S=\{1,\ 5,\ 7,\ 6\}$$

于是集合 S 中含有四个元素，即 1，5，7，6。又如

$$S=\{\text{太阳，地球，}\pi\text{，}\{1,\ 2\}\}$$

这个集合 S 亦含有四个元素，即太阳，地球，数 π 以及集合 $\{1,2\}$。显然，只有有限集（即元素个数为有限数的集）才能使用列举法。另一种是描述法。例如

$$S=\{x\mid x\text{ 为正偶数}\}$$

这个集 S 由 x 为正偶数的那些 x 组成，即由 2，4，6，8，…等全体正偶数组成。一般地说，用描述法确定一个集合的记法是

$$S=\{x\mid \cdots x\cdots\}$$

其中 $\cdots x\cdots$ 是描述 x 的一个句子，它刻划了集 S 中元素的性质。无穷集（即元素个数为无穷的集合）都用描述法确定。但有限集亦可用描述确定。例如设 S 用列举法确定如下：

$$S=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$$

则 S 亦可用描述法确定如下：

$$S=\{x\mid x\text{ 为}a_1\text{或 }x\text{ 为}a_2\text{或}\cdots\text{或 }x\text{ 为}a_n\}$$

设有两个集S_1与S_2，若S_1中的元素也是S_2中的元素，则称S_1

是S_2的子集，或称S_1包含在S_2中，或称S_2包含S_1，记为$S_1 \subseteq S_2$。显然若$S_1 \subseteq S_2$，又$S_2 \subseteq S_1$，则$S_1 = S_2$(即两个集S_1与S_2具有相同的元素，或说S_1与S_2相等)。若$S_1 \subseteq S_2$，但$S_1 \neq S_2$，则称S_1为S_2的真子集，记为$S_1 \subset S_2$。因此若$S_1 \subset S_2$，则S_1的每个元素亦是S_2的一个元素，但S_2中至少有一个元素不在S_1中。有一个特殊的集，它不会有任何元素，称为空集，记为ϕ。对任何集S，有$\phi \subseteq S$。

对集合可以进行运算。S_1与S_2的并指集合

$$S_1 \cup S_2 = \{x \mid x \in S_1 \text{ 或 } x \in S_2\}$$

故它是通过合并S_1与S_2的元素（重复的算一个）而得。S_1与S_2的交指集合

$$S_1 \cap S_2 = \{x \mid x \in S_1 \text{ 且 } x \in S_2\}$$

故它是通过取S_1与S_2的公共元素而得。S_1对S_2的差指集合

$$S_1 \backslash S_2 = \{x \mid x \in S_1 \text{ 且 } x \notin S_2\}$$

故它是通过取在S_1中但不在S_2中的元素而得。若$S_1 \cap S_2 = \phi$，则称S_1与S_2不相交。不难证明，关于集合的并、交、差等运算有以下简单的性质：

$$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1, \quad S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1,$$
$$S_1 \cup (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cup S_2) \cup S_3,$$
$$S_1 \cap (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cap S_2) \cap S_3,$$
$$S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3),$$
$$S_1 \cup (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cup S_2) \cap (S_1 \cup S_3),$$
$$S \cap S = S \cup S = S, \quad S \cup \phi = S \backslash \phi = S,$$
$$S \cap \phi = \phi \backslash S = S \backslash S = \phi,$$

对于集合的并与交还有一个一般的记法，可适用于无穷个集合的并与交。设C是由集合组成的集，则

$$\cup C = \{x \mid x \text{ 属于 } C \text{ 中某个元素}\}$$
$$\cap C = \{x \mid x \text{ 属于 } C \text{ 中每个元素}\}$$

特别，

$$A \cup B = \cup \{A, B\}$$
$$A \cap B = \cap \{A, B\}$$

$$\bigcup_n A_n = \bigcup\{A_n | n \text{ 为非负整数}\}(\text{即} = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots)$$

$$\bigcap_n A_n = \bigcap\{A_n | n \text{ 为非负整数}\}(\text{即} = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots)$$

显然，$\bigcup_n A_n = \{x | \text{有某个 } i, x \in A_i\}$，$\bigcap_n A_n = \{x | \text{对每个 } i, x \in A_i\}$。

由 n 个元素 a_1，…，a_n 组成的有序 n-矢指 $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$，简称为 n-矢。2-矢 $\langle a_1, a_2\rangle$ 亦称为有序对。有序 n-矢与 n 元有限集是不同的对象。以 2-矢为例，$\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$，但 $\{a, b\} = \{b, a\}$，且 $\{a, a\} = \{a\}$，但 $\langle a, a\rangle \neq \langle a\rangle$。$\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = \langle b_1, \cdots, b_n\rangle$ 当且仅当 $a_i = b_i (i = 1, \cdots, n)$。有一个特殊的 n-矢为 0-矢，记为 $\langle\ \rangle$。

今后恒以 Z 表示自然数集 $Z = \{0, 1, 2, \cdots\}$（本书恒把 0 看作第一个自然数。因此自然数集即为全体非负整数）。

两个集 S_1 与 S_2 的笛卡尔积指下列有序对集

$$S_1 \times S_2 = \{\langle x, y\rangle | x \in S_1 \text{ 且 } y \in S_2\}$$

设 A 为任意集，n 为自然数，今定义集 A^n 如下：

$$A^0 = \{\langle\ \rangle\}, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \times A,$$

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ 个 } A} = \{\langle x_1, \cdots, x_n\rangle | x_i \in A, 1 \leqslant i \leqslant n\}。$$

当 $n \geqslant 1$ 时，A^n 的一个子集称为 A 上的一个 n 元关系。A 上的一元关系亦称为 A 上的一个性质。设 P 为 A 上的一个 n 元关系（即 $P \subseteq A^n$）。若 $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle \in P$，则称 $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ 满足 P，或称 $P(a_1, \cdots, a_n)$ 真。若 $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle \notin P$，则称 $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ 不满足 P，或称 $P(a_1, \cdots, a_n)$ 假。对于二元关系 R，$R(a, b)$ 真，亦可记为 aRb；$R(a, b)$ 假，亦可记为 $a\not{R}b$。

设有二元关系 R。R 的定义域 $D_m(R)$ 为集合

$$D_m(R) = \{x | \text{有 } y, \text{使得} \langle x, y\rangle \in R\}$$

R 的值域 $R_n(R)$ 为集合

$$R_n(R) = \{x | \text{有 } y \text{ 使得} \langle y, x\rangle \in R\}$$

R 的定义域与值域的并称为 R 的域，记为 $\mathrm{F_d}(R)$。

设有两个集合 A，B。$A \times B$ 的一个子集 C 称为 A 到 B 的一

个部分对应。若 $\langle a, b\rangle\in C$，则称 b 对应于 a，或 a 有对应 b。设 f 是 A 到 B 的一个部分对应。若由 $\langle x, y\rangle\in f$ 和 $\langle x, z\rangle\in f$ 可得 $y=z$，则称此部分对应 f 为 A 到 B 中的函数。因此当 f 是 A 到 B 中的函数时，若 A 中元素 a 有 B 中元素对应，则 a 的对应是唯一的，这个唯一的值称为 f 在 a 处的值，记为 $f(a)$。设 $a\in A$，若 f 在 a 处有值，则称 f 在 a 处有定义；否则称 f 在 a 处无定义（即 a 无对应）。当 f 为 A 到 B 中的函数时，f 的定义域为集

$$D_m(f)=\{x \mid 有 B 中元素对应于 x\}$$

f 的值域为集

$$R_n(f)=\{y \mid 有 A 中元素对应 y\}$$

当 $D_m(f)=A$ 时称 f 为（A 到 B 中的）全函数，当 $D_m(f)\subset A$ 时称 f 为（A 到 B 中的）部分函数。当 $R_n(f)=B$ 时，称 f 为 A 到 B 上的函数。若由 $f(a)=f(b)$ 得 $a=b$，则称 f 为 1—1 的。又 A 到 B 上的 1—1 全函数 f 称为 A 到 B 的一个一一对应。A 到 B 中的全函数 f 常记为

$$f: A\to B$$

A 到 B 中的一个函数也称为 A 到 B 中的一个映射。A 到 B 上的一个全映射称为 A 到 B 的满射。A 到 B 中的一个 1—1 全映射称为 A 到 B 的单射。A 到 B 上的一个 1—1 全映射称为 A 到 B 的双射。因此 A 到 B 的一个双射就是 A 到 B 的一个一一对应。

A^n 到 B 中的一个函数称为 A 到 B 中的一个 n 元函数。A 到 B 中的一个全 n 元函数称为 A 上的一个 n 元函数。若 n 元函数 f 在 $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ 有定义，则常把值 $f(\langle a_1, \cdots, a_n\rangle)$ 记为 $f(a_1, \cdots, a_n)$。按约定，$A^1=A$，故 A^1 到 B 中（上）的一个一元函数即为 A 到 B 中（上）的函数。又因 $A^0=\{\langle\ \rangle\}$，故 A 上的一个零元函数 f 仅在 $\langle\ \rangle$ 处有定义，且 $f(\langle\ \rangle)$ 为 B 中某元素。$A^n\to A$ 的一个 n 元函数又称为 A 上的一个 n 元运算。例如通常的加法是 Z 上的一个二元运算，但通常的减法不是 Z 上的二元运算（它只是 Z^2 到 Z 中的一个二元函数）。

设有函数 $f: A\to B$。称 f 对集合 C 的一个限制是函数 $f_C=f\cap(C\times B)$。故 $f_C(x)=y$ 当且仅当 $x\in C$ 且 $f(x)=y$。集 C 在函数 f 下的象为 f_C 的值域，记为 $f(C)$。因此

$$f(C)=\{y \mid 有x\in C，使得f(x)=y\}$$

集 W 在函数 f 下的逆象是所有在 f 的定义域中使得 $f(x)\in W$ 的元素 x 的集合，记为 $f^{-1}(W)$。因此

$$f^{-1}(W)=\{x \mid x\in D_m(f)\ 且\ f(x)\in W\}$$

称 f 把 A 映射到 B 中（B 上）。若 $A\subseteq D_n(f)$，且 $f(A)\subseteq B$（$f(A)=B$）。

设 R 为 A 上的一个二元关系，则 R 的逆关系 R^{-1} 为集合

$$R^{-1}=\{\langle y, z\rangle \mid \langle z, y\rangle\in R\}$$

设 f 为 A 到 B 中的一个一一部分函数，则 f 的逆 f^{-1} 是下列 $B\times A$ 的一个子集：

$$f^{-1}=\{\langle y, x\rangle \mid x\in D_m(f)\ 且\ f(x)=y\}$$

显然，f^{-1} 是 B 到 A 中的一个一一部分函数，且

$$D_m(f^{-1})=R_n(f),\quad R_n(f^{-1})=D_m(f)$$

又 $\langle a, b\rangle\in f^{-1}$（记为 $f^{-1}(a)=b$）当且仅当 $a=f(b)$。另外当 f 为 A 到 B 上的双射时，f^{-1} 亦为 B 到 A 上的双射。也即 A 到 B 上的 1—1 对应也是 B 到 A 上的一一对应，因此 A 到 B 上的 1—1 对应亦称为 A 与 B 之间的 1—1 对应。

一个二元关系 R 称为自反的，若对所有的 $x\in D_m(R)$，有 xRx。一个二元关系 R 称为对称的，若由 xRy 可得 yRx。二元关系 R 称为可传的，若由 xRy 和 yRz 可得 xRz。一个自反的、对称的和可传的二元关系称为等价关系。

任给集 A，有一个特殊的 A 上二元关系 I_A，称为 A 上的恒等关系，它被定义为

$$I_A=\{\langle x, x\rangle \mid x\in A\}$$

显然 I_A 是 A 上的一个等价关系。

对于 A 上的任意一个等价关系 R，对应一个集合，称为 R 的等价类集合。它如下构成：设 $a\in A$，则令 $[a]$ 为集合 $\{x \mid aRx\}$，