《工程数学方法》编写组

工程数学方法

GONGCHENGSHUXUE FANGFA

（第 1 分册）

东南大学出版社

工程数学方法

（第 1 分册）

《工程数学方法》编写组

东南大学出版社

前　言

现代科技在迅速发展，数学更加广泛深入地应用于各个领域，各工科专业也不同程度地对工程数学提出了新要求。为了在不增加课内总学时的前提下，使工科学生较全面地掌握工程师必备的数学知识与方法，我校工程数学教材改革小组对原有工程数学内容进行了调查与研讨，在广泛征求意见的基础上，经过数年的教学实践，几经修改，编写出《工程数学方法》一书。

本书共三个分册，内容分别为：

第 1 分册：线性代数，数值计算方法，运筹学；

第 2 分册：复变函数，数学物理方程；

第 3 分册：概率论，数理统计。

本书有以下特点：

(1)　注意培养工程师必备的数学知识与方法，调整连续型、离散型、随机型数学的比例，其中新增运筹学一篇，并加重数理统计在“概率统计”中的位置，单独设篇。

(2)　体现工程数学特点，强调应用，加强数学建模能力的培养与实际计算的可操作性；而不过分拘泥于各篇的系统性、严密性，删减过于繁杂的推导证明，着重讲清思想方法，给学生以必要的数学方法与基本知识。

(3)　把握本科这一层次，在适当增加若干有用内容与方法的同时，又注意到区别于工科研究生有关数学课程的教材。

(4)　在注意各篇内容的相互渗透，避免不必要重复的同时，保持各篇内容的相对独立性，通过不同的组合方法，可供各工科专业自行选择其中的某些篇制订教学计划。

本书中打“ * ”号内容、习题对学时较少的教学班可删去。

《工程数学方法》由本校工程数学教材改革小组成员集体编写，分工负责。各篇执笔者为：线性代数，俞南雁；数值计算方法，袁慰平、江风；运筹学，朱道元；复变函数，韩瑞珠；数学物理方程，宋柏生；概率论，毛惠良；数理统计，曹振华。全书由宋柏生、俞南雁统稿。

本书的编写过程中，东南大学王元明、张元林、陈浩球、吴学澄、张明淳、张令敏等专家教授认真地审阅了原讲义，并提出许多宝贵意见；数力系的许多同事都为完善本书作出了很大帮助；本书酝酿过程中，得到李延保教授的大力支持。作者对此表示衷心的感谢。

面对21世纪，工科数学教学和教材，如何更好地适应培养未来工程师的创新意识、能力和素质的需要，是需要不断探索的大课题。由于编者水平有限，书中的缺点与不妥之处在所难免，恳请广大教师和读者批评指正以利修改完善。

东南大学数力系
《工程数学方法》编写组
1996年5月

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇 数值计算方法

第三篇　运筹学

第一篇　线性代数

1　矩阵运算·行列式

线性代数是研究多变量与多变量之间线性关系的数学分支。矩阵(包括数组向量)正是用来描写这种线性关系的基本工具。本篇以矩阵的运算、变换及用矩阵方法处理有关问题为重点。

本章主要讨论矩阵的运算及与此相联系的行列式。

1.1　矩阵及其运算(一)

1.1.1　矩阵概念

线性方程组既是线性代数最古老的问题,又是当代科技、经济等领域一种常用的数学模型。n 个未知量(不妨设为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$)的 m 个一次代数方程联立所得的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

称为 $m \times n$ **线性方程组**。(1.1) 式中诸系数 a_{ij} 按原相对位置可以排成一个矩形数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

在其它许多场合，人们也常遇到类似表格：工厂中每月各种产品的产量日报表或消耗定额表，学校中各班成绩统计表等等。数学上为显示这类表格是一个整体并便于参加运算，常用括号括起来。

定义 1.1 由 mn 个数排成的 m 行、n 列矩形表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

称为 $m \times n$ **矩阵**，记作 A 或 $A_{m\times n}$，也记作 $[a_{ij}]$ 或 $[a_{ij}]_{m\times n}$，其中数 a_{ij} 称为 A 的 (i,j) **元素** $(i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,n)$，下标 i 和 j 依次称为 a_{ij} 的**行标**和**列标**。

矩阵 A 与 B **相等**记为 $A = B$，此式意味着 A 与 B 行数相同、列数相同，且一切 $a_{ij} = b_{ij}$。例如由 $\begin{bmatrix} 3 & x & -1 \\ 2 & 4 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ 可得 $x = 1, y = 7, z = 3$。

$m \times n$ 矩阵也称为 **n 阶矩阵**或 **n 阶方阵**。一阶方阵 $[a]$ 也可写为 a。

$1 \times n$ 矩阵也称为 **n 维行向量**，$n \times 1$ 矩阵也称为 **n 维列向量**。行向量和列向量统称为**向量**。向量的元素通常称为**分量**。例如 $\alpha = [3,1,0,-2]$ 是 4 维行向量，其第二分量是 1。

1.1.2 加法及数乘

定义 1.2 设 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$，$B = [b_{ij}]_{m\times n}$，称 $[a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$ 为 A 与 B **相加**所得的**和**，记为 $A + B$，即

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

定义 1.3 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，k 是数，称 $[ka_{ij}]_{m\times n}$ 为 k 与 A 相乘（数乘）所得的积，记为 kA 或 Ak，即

$$kA = Ak = [ka_{ij}]_{m\times n}$$

例 1

(1) $\begin{bmatrix}4 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$；

(2) $(-2)\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 0 & 6\\ -2 & 2\end{bmatrix}$；

(3) $x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ a_{32}\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}a_{13}\\ a_{23}\\ a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{bmatrix}$。

元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，记为 O 或 $O_{m\times n}$（零向量也记为 0 或 θ）。通常可以从上下文或等式的左右端辨别 O 的属性。

矩阵 $[-a_{ij}]_{m\times n}$ 称为 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的**负矩阵**，记为 $-A$。例如 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}$，则 $-A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ -2 & 1 & -4\end{bmatrix}$。

利用负矩阵可以定义矩阵的**减法**：设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，规定

$$A-B=A+(-B)=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

矩阵的加法（含减法）及数乘统称矩阵的**线性运算**。根据定义 1.2 和定义 1.3 不难验证，线性运算有以下基本性质：

(1) $A+B=B+A$　　（交换律）；

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$　　（结合律）；

(3) $A+O=A$；

(4) $A+(-A)=O$；

(5) $1A=A$；

(6) $k(lA)=(kl)A$；

(7) $(k+l)A=kA+lA$；

(8) $k(A+B)=kA+kB$。

根据定义或根据基本性质，还可以验证以下性质：

(9) $A+X=B \Leftrightarrow X=B-A$ （移项规则）；

(10) $kA=O \Leftrightarrow k=0$ 或 $A=O$。

1.1.3 乘法

在叙述矩阵乘法的定义之前，先看一个例子。

例2 某装配工厂把s种零部件装配成三种产品。用a_{ij}表示组装一个i号产品($i=1,2,3$)需要第j种零部件的个数($j=1,2,\cdots,s$)。每种零部件又有国产和进口之分，用b_{j1}和b_{j2}分别表示国产的和进口的第j种零件的单价($j=1,2,\cdots,s$)。记

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3s} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} \end{bmatrix}$$

则用国产或进口零件生产一个i号产品，在零件方面的成本费分别是

$$\begin{aligned} c_{i1} &= a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+\cdots+a_{is}b_{s1} \\ c_{i2} &= a_{i1}b_{12}+a_{i2}b_{22}+\cdots+a_{is}b_{s2} \end{aligned} \qquad (i=1,2,3)$$

可注意到c_{ij}是A的第i行与B的第j列对应元素乘积之和。以c_{ij}为元素可得到3×2矩阵

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

定义1.4 设$A=[a_{ij}]_{m\times s}$，$B=[b_{ij}]_{s\times n}$，令

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj} \qquad (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$$

称$C=[c_{ij}]_{m\times n}$为矩阵A与B的积，记为$C=AB$。

注意A与B可乘(AB有意义)的前提是A的列数等于B的行

数。积 AB 的行数等于 A 的行数，AB 的列数等于 B 的列数。AB 的 (i,j) 元素等于 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的对应元素乘积之和。

例 3

(1) $$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix};$$

(2) $$[x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\left[\sum_{i=1}^{3} x_i y_i\right]=\sum_{i=1}^{3} x_i y_i;$$

(3) $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}[x_1\ x_2\ x_3]=\begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & y_1x_3 \\ y_2x_1 & y_2x_2 & y_2x_3 \\ y_3x_1 & y_3x_2 & y_3x_3 \end{bmatrix}。$$

回头看线性方程组(1.1) 式。记

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

则(1.1) 式可以简洁地表示为

$$Ax=b$$

不难验证，对于矩阵乘法，有以下运算性质：

(1) 结合律：$(AB)C=A(BC)$；

(2) 分配律：$A(B+C)=AB+AC$；

$(B+C)G=BG+CG$；

(3) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$。

证 性质(2)、(3) 由读者完成，仅证性质(1)。设

$$A=[a_{ip}]_{m\times k},\ B=[b_{pq}]_{k\times s},\ C=[c_{qj}]_{s\times n}$$

$$AB=U=[u_{iq}]_{m\times s},\ BC=V=[v_{pj}]_{k\times n}$$

显然 $(AB)C=UC$ 及 $A(BC)=AV$ 都是 $m\times n$ 矩阵，它们的 (i,j) 元素分别是

$$\sum_{q=1}^{s} u_{iq}c_{qj} = \sum_{q=1}^{s}(\sum_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pq})c_{qj}$$

$$\sum_{p=1}^{s} a_{ip}v_{pj} = \sum_{p=1}^{s} a_{ip}(\sum_{q=1}^{k} b_{pq}c_{qj}) = \sum_{q=1}^{s}(\sum_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pq})c_{qj}$$

它们是相等的，因此$(AB)C = A(BC)$。

由于矩阵乘法适合结合律，因此有限个矩阵的乘积

$$A_1A_2\cdots A_s \quad , \quad s \geqslant 3$$

可以不用括号。

值得注意的是，矩阵的乘法一般说来不满足交换律，即"$AB = BA$"不总是成立的。事实上，AB有意义时BA未必有意义，如例3之(1)；即使AB与BA都有意义，也未必相等，如例3之(2)、(3)。为了区别相乘的次序，称AB为"A右乘以B"，或"B左乘以A"。

同样值得注意的是，仅由$AB = 0$未必能推断$A = 0$或$B = 0$，例如

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

再由乘法分配律知，仅由$AB = AC, A \neq 0$，未必能断言$B = C$。即对于矩阵乘法，消去律不成立。

以上两点是矩阵乘法与数的乘法的不同之处。当然，在某些特殊情况下，乘法可以交换；把$A \neq 0$的条件适当加强后，也能从$AB = AC$得出$B = C$。这些在后面可以看到。

对于方阵，还可以定义幂。

定义 1.5 设A为方阵，规定

$$A^1 = A,\ A^2 = AA, \cdots,\ A^{k+1} = A^kA \qquad (k\text{为正整数})$$

根据矩阵乘法结合律易证以下性质：

(1) $A^kA^l = A^{k+l}$;

(2) $(A^k)^l = A^{kl}$;

(3) 若$AB = BA$，则$(AB)^k = A^kB^k$.

其中k,l均为正整数。

例 4 设 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，求证 $A^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$，其中 n 为正整数。

证 用数学归纳法。$n=1$ 时公式显然成立。设 $n=k$ 时公式成立，即 $A^k=\begin{bmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{bmatrix}$，则

$$
\begin{aligned}
A^{k+1}=A^kA&=\begin{bmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta & -\cos k\theta\sin\theta-\sin k\theta\cos\theta\\ \sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta+\cos k\theta\cos\theta\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta\\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

表明当 $n=k+1$ 时，要求证的公式也成立。因此对一切正整数 n，公式成立。

下面再举一个实例说明矩阵运算的描述功能。

例 5 按年龄组分布的女性人口模型。

将某地区女性人口分为 n 个年龄组（例如每 5 年为 1 组）。用 a_i 表示第 i 年龄组女性的存活率（即第 i 年龄组中能活到 $i+1$ 年龄组的女性数与第 i 组女性数之比）；用 b_i 表示生育率（即第 i 年龄组女性平均每人生女孩数）。假定 a_i,b_i 都是常数。用 $x_i(k)$ 表示第 k 时段第 i 年龄组女性人口数，初始人口 $x_i(0)$ 已知（$i=1,2,\cdots,n$）。则根据 a_i,b_i 的定义可写出

$$
\begin{cases}
x_1(k+1)=b_1x_1(k)+b_2x_2(k)+\cdots+b_nx_n(k)\\
x_2(k+1)=a_1x_1(k)\\
x_3(k+1)=\qquad\qquad a_2x_2(k)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n(k+1)=\qquad\qquad\qquad\qquad a_{n-1}x_{n-1}(k)
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

记

$$x(k)=\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\\vdots\\x_n(k)\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n\\ a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1} & 0\end{bmatrix}$$

则(1.3)式可写成

$$x(k+1)=Ax(k)\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)\tag{1.3a}$$

由(1.3a)式递推可得

$$x(k)=A^kx(0)\quad(k=1,2,\cdots,n)\tag{1.3b}$$

至此问题已转化为求 A^k。3.1 中将部分解决这个问题。

1.1.4 转置·几种特殊矩阵

定义 1.6 把 $m\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的各行依次改为列(必然地 A 的列依次改为行),所得到的 $n\times m$ 矩阵

$$A^T=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

称为 A 的**转置矩阵**。由 A 写出 A^T 的运算称为**转置**。A^T 也常写为 A'。

A^T 的(i,j)元,正是 A 的(j,i)元。

不难验证,矩阵的转置有下述运算性质:

(1) $(A^T)^T=A$;

(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

(3) $(kA)^T=kA^T$;

(4) $(AB)^T=B^TA^T$。

证 性质(1)、(2)、(3)极易验证。下面只证(4)。设 $A=[a_{ij}]_{m\times s}$,$B=[b_{ij}]_{s\times n}$,则$(AB)^T$ 与 B^TA^T 都是 $n\times m$ 矩阵,而

$$(AB)^T\text{ 的}(i,j)\text{ 元素}=AB\text{ 的}(j,i)\text{ 元素}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki};$$

$$B^TA^T \text{ 的}(i,j)\text{ 元素} = \sum_{k=1}^{s} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}b_{ki}。$$

它们的确相等，因此$(AB)^T = B^TA^T$。

下面叙述几种特殊方阵。

满足 $A^T = A$ 的矩阵称为**对称矩阵**，或简称**对称阵**。显然，对称阵一定是方阵，而方阵 $A = [a_{ij}]$ 为对称阵的充要条件是对一切 i，j 有 $a_{ji} = a_{ij}$。

对称阵的直观特点是关于对角线($a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 一线) 对称。例如

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

是一个三阶对称阵。

以下三种特殊方阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

分别称为**对角阵**、**数量阵**(或纯量阵) 和**单位阵**，其中未标出的非对角元素全为零。

显然，对角阵是对称阵的特款，数量阵是对角阵的特款，单位阵又是数量阵的特款。

单位阵常用 I 或 I_n(也可用 E 或 E_n) 表示。于是数量阵便可用 aI 或 aI_n 表示。利用 Kronecker 记号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.4}$$

单位矩阵 I 也可以表示成$[\delta_{ij}]$，而数量阵及对角阵可依次表示为$[a\delta_{ij}]$ 和$[a_i\delta_{ij}]$。

根据矩阵乘法的定义，可验知：