ZHANGLIANGFENXI JIANMINGJIAOCHENG

张量分析简明教程

张若京　编著

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

同济大学“十一五”规划教材

张量分析简明教程

张若京　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书介绍张量分析的基本内容，包括空间曲线坐标系、张量的基本概念和代数运算、张量场论、二阶张量以及曲面上的张量。考虑到笛卡儿坐标系的广泛应用，故最后一章介绍了笛卡儿张量。各章后均有习题，书后有部分习题答案。

本书可作为力学专业、应用数学专业以及理工科有关专业的本科生或研究生教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

张量分析简明教程/张若京编著. --上海：同济大学出版社，2010.2

ISBN 978-7-5608-4240-0

Ⅰ.①张… Ⅱ.①张… Ⅲ.①张量分析—高等学校—教材 Ⅳ.①O183.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 007634 号

张量分析简明教程

张若京 编著

责任编辑 解明芳 责任校对 杨江淮 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经　销 全国各地新华书店

印　刷 同济大学印刷厂

开　本 787mm×960mm 1/16

印　张 9.75

印　数 1—3100

字　数 195000

版　次 2010 年 2 月第 1 版 2010 年 2 月第 1 次印刷

书　号 ISBN 978-7-5608-4240-0

定　价 19.00 元

前　言

当今，对于一个力学工作者来说，张量分析实在是一个极其重要的数学工具。

力学是自然科学中最早建立完备科学体系的一门学科，也是在自然科学中运用定量分析工具——数学最多的一门学科。几个世纪以来，数学和力学之间的相互影响是十分显著的。一方面，力学充分使用数学来表述和预测；另一方面，力学的需要又促进了数学的发展。德裔美国力学教授 W. Flügge 在他的《张量分析与连续介质力学》的"序"中写道："由于牛顿动力学的需要产生了微积分，为了对力系的描述发展了矢量代数，对速度场和力场的研究发展了矢量分析，从力学的能量原理中产生了变分法"。又写道，"张量(Tensor)这个名字本身就表明它的来源是弹性理论。"今天，不熟悉张量分析的人去阅读连续介质力学的文献时会感到困难。所以，不仅是高等学校的理工科学生，而且许多工程技术人员都产生了掌握张量分析这一数学工具的愿望。

表达非线性连续介质力学的基本方程需要张量分析的显而易见的理由是因为连续介质力学的基本量——应力和应变——都是张量。然而，更重要的是，大变形或者几何非线性的描述必需张量分析。事实上，当结构发生大变形时，我们通常无法在一个整体坐标系中同时去描述初始构形和当前构形两者。合理的做法是在初始构形上设置局部坐标，它随体变形，又成为当前构形上的局部坐标。这就产生了一个问题，就是，即使初始构形上的局部坐标可以选择正交坐标系，也无法保证大变形后，当前构形上的坐标仍然是正交的。所以，对于大变形的完整描述，必须在一般的曲线坐标系中进行。于是，对于一个坐标系就必须采用两套基矢量——协变基矢量和逆变基矢量。而且基矢量必须参与求导，这就有了协变导数，等等。这就是张量分析的逻辑。于是就有了非线性连续介质力学。

自 1990 年起，编者给本校工程力学专业的本科生和研究生讲授张量分析与连续介质力学课程。为编写讲稿，参考了国内主要的专著、译著和教材，先于 2004 年由同济大学出版社出版了《张量分析教程》一书。在此基础上修改，构成了本书的主要内容。其中，第 3 章引用了郭仲衡先生的专著《非线性弹性理论》的有关章节。第 4 章采用了文献[2]的相关章节。第 5 章则主要来自文献[3]和[6]。

编者建议，读者可以重点阅读第 1 章和第 2 章。它们是进一步学习非线性连续介质力学的数学准备。第 3 章，第 4 章和第 5 章可以认为是专题介绍。其中，第 3 章深入讨论了二阶张量的特性。读者在阅读时可对照线性代数的有关章节。之所以将此章编入，是因为连续介质力学的基本量——应力和应变——都是二阶张量。第 4 章是壳体理论的基础知识，而如果只关心小变形的连续介质力学，则只要看第 5 章就

足够了。

为了区分矢量与张量，本书中的字母，凡带下划线(—)者表示矢量，凡带下波浪线(～)者表示张量。不采用几乎所有教科书都惯用的黑斜体既表示矢量又表示张量的做法。

限于作者水平，书中难免有不足甚至错误之处，诚恳希望广大读者批评指正。

本教材被列为“同济大学‘十一五’规划教材”，并获“同济大学教材、学术著作出版基金”资助。特此致谢。

编　者

2009 年 10 月 30 日

目　录

1 曲线坐标系

在求解数学物理问题时，首先要选定坐标系。比较常用的是直角坐标系，也称笛卡儿直角坐标系(Cartesian coordinates)。通常用 $Oxyz$ 表示笛卡儿直角坐标系。其中，O 是坐标原点，x，y 和 z 是三个坐标轴。

如果用$\underline{i}$，$\underline{j}$，$\underline{k}$表示沿 x，y，z 轴的单位矢量，称为**基矢量**(basic vector)，则任意一个矢量可以按下式分解：

$$\underline{p}=p_x\,\underline{i}+p_y\,\underline{j}+p_z\,\underline{k} \tag{1.0.1}$$

式中，p_x，p_y，p_z 称为矢量$\underline{p}$关于笛卡儿直角坐标系 $Oxyz$ 的分量。

矢量的点积是一个很重要的概念。设有两个非零矢量$\underline{u}$和$\underline{v}$，按下式定义它们之间的点积(也称数量积，标量积或内积)：

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\,|\underline{v}|\cos\langle\underline{u},\underline{v}\rangle \tag{1.0.2}$$

式中，$|\underline{u}|$表示矢量$\underline{u}$的长度，也称为它的模或绝对值。$\langle\underline{u},\underline{v}\rangle$表示矢量$\underline{u}$和$\underline{v}$之间的夹角。注意，内积的这个定义式是与坐标系无关的。

笛卡儿直角坐标系的三个基矢量是相互正交的且具有单位长度。由上述点积的定义知，它们具有以下正交归一关系：

$$\begin{cases}\underline{i}\cdot\underline{i}=1, & \underline{j}\cdot\underline{j}=1, & \underline{k}\cdot\underline{k}=1\\ \underline{i}\cdot\underline{j}=0, & \underline{j}\cdot\underline{k}=0, & \underline{k}\cdot\underline{i}=0\end{cases} \tag{1.0.3}$$

即相同基矢量的点积是 1，不同基矢量的点积为零。

利用点积运算，容易求出任意矢量在三个坐标轴上的分量。事实上，将式(1.0.1)的两端分别点乘基矢量$\underline{i}$，$\underline{j}$，$\underline{k}$，则依次有

$$p_x=\underline{p}\cdot\underline{i},\quad p_y=\underline{p}\cdot\underline{j},\quad p_z=\underline{p}\cdot\underline{k} \tag{1.0.4}$$

另外，在笛卡儿直角坐标系中，很方便用分量表示两个矢量之间的点积。例如，假设矢量$\underline{u}$和$\underline{v}$有着像式(1.0.1)那样的分解式，则

$$\begin{aligned}\underline{u}\cdot\underline{v}&=(u_x\,\underline{i}+u_y\,\underline{j}+u_z\,\underline{k})\cdot(v_x\,\underline{i}+v_y\,\underline{j}+v_z\,\underline{k})\\&=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z\end{aligned} \tag{1.0.5}$$

事实上，只要把上式两个括号内的求和项逐项乘开，利用正交归一关系(式(1.0.3))，就可得到最后一个等式的右边。

1.1 斜角直线坐标系

应该看到，之所以矢量点积有着像式(1.0.5)那样简单的表达式，是因为笛卡儿直角坐标系的三个基矢量之间存在正交归一关系(1.0.3)。为了说明这一点，我们来看看斜角直线坐标系。以图 1.1 所表示的二维斜角直线坐标系 Ox^1x^2 为例。其中，x^1 和 x^2 为两个坐标轴，两轴之间的夹角为 φ。这里，右上角的数字代表上标而不是幂次(本书中，如无特别说明，字母右上角的数字都代表上标)。选取沿 x^1 和 x^2 正向的矢量 $\underline{g}_1$ 和 $\underline{g}_2$ 为参考矢量(可以不是单位矢量)，则 $\underline{g}_1$ 和 $\underline{g}_2$ 就构成了斜角直线坐标系的一组基矢量。在这一组基下，按照矢量分解的平行四边形法则，任意一个矢量 $\underline{p}$ 可以有类似于式(1.0.1)的分解式(或称展开式)：

$$\underline{p}=p^1\,\underline{g}_1+p^2\,\underline{g}_2=\sum_{\alpha=1}^{2}p^\alpha\,\underline{g}_\alpha=p^\alpha\,\underline{g}_\alpha \tag{1.1.1}$$

式(1.1.1)中的最后一项表示，我们在某种约定下，可以省去求和号，所以，称为**约定求和**(summation convention)。通常把这个约定称为**爱因斯坦约定**。其内容是：凡在同一项中，上下指标成对出现，就要求和。这个成对出现的指标，如式(1.1.1)中的 α，称为**哑(指)标**(dummy index)。一般规定，用希腊字母，即 $\alpha,\beta,\cdots$，表示的指标，取值范围是 1 和 2，所以，也称为二维指标。用拉丁字母，即 $i,j,\cdots$，表示的指标，取值范围是 1,2 和 3，所以，也称为三维指标。哑标可以随意更换字母，例如，$p^\alpha\,\underline{g}_\alpha=p^\beta\,\underline{g}_\beta$。

由于斜角直线坐标系中的基矢量不相互正交，且不是单位矢量，所以，点积的坐标表达式很繁杂，这可以从图 1-1 中的二维斜角直线坐标系看出。这时，点积的坐标表达式可以通过乘开下式的右端，利用式(1.0.2)而得到：

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=(u^1\,\underline{g}_1+u^2\,\underline{g}_2)\cdot(v^1\,\underline{g}_1+v^2\,\underline{g}_2)$$

可以看出，其结果是很繁杂的。

为了使斜角坐标系中的矢量点积运算也有类似于在笛卡儿直角坐标系中的简洁表达式，见式(1.0.5)，我们再引入一套与 $\underline{g}_1$ 和 $\underline{g}_2$ 对偶的参考矢量 $\underline{g}^1$ 和 $\underline{g}^2$。要求它们分别与 $\underline{g}_1$ 和 $\underline{g}_2$ 垂直，即

$$\underline{g}^1\cdot\underline{g}_2=\underline{g}^2\cdot\underline{g}_1=0 \tag{1.1.2a}$$

并使

$$\underline{g}^1\cdot\underline{g}_1=\underline{g}^2\cdot\underline{g}_2=1 \tag{1.1.2b}$$

式(1.1.2b)说明，虽然新引入的对偶矢量 $\underline{g}^1$ 和 $\underline{g}^2$ 一般也不是单位矢量(因为 $\underline{g}_1$ 和 $\underline{g}_2$ 并不一定是单位矢量)，但它们和 $\underline{g}_1$，$\underline{g}_2$ 之间是按相应内积的值归一的。式(1.1.2b)还说明，$\underline{g}^1$ 与 $\underline{g}_1$ 及 $\underline{g}^2$ 与 $\underline{g}_2$ 的夹角都是锐角。由图 1-1 知，当 φ 为锐角时，此夹角为

$\frac{\pi}{2}-\varphi$，当 φ 为钝角时，为 $\varphi-\frac{\pi}{2}$。所以，对偶矢量$\underline{g}^1$ 和$\underline{g}^2$ 的长度分别是

$$|\underline{g}^1|=\frac{1}{|\underline{g}_1|\sin\varphi},\quad |\underline{g}^2|=\frac{1}{|\underline{g}_2|\sin\varphi} \tag{1.1.3}$$

以上说明，按式(1.1.2)可以唯一地确定一组新的基矢量$\underline{g}^1$ 和$\underline{g}^2$。式(1.1.2)可以统一地表示成

$$\underline{g}^\alpha\cdot\underline{g}_\beta=\underline{g}_\beta\cdot\underline{g}^\alpha=\delta^\alpha_\beta \tag{1.1.4}$$

这里，δ^α_β 称为二维 kronecker delta，其值为

$$\delta^\alpha_\beta=\begin{cases}1, & 当\ \alpha=\beta\\ 0, & 当\ \alpha\neq\beta\end{cases} \tag{1.1.5}$$

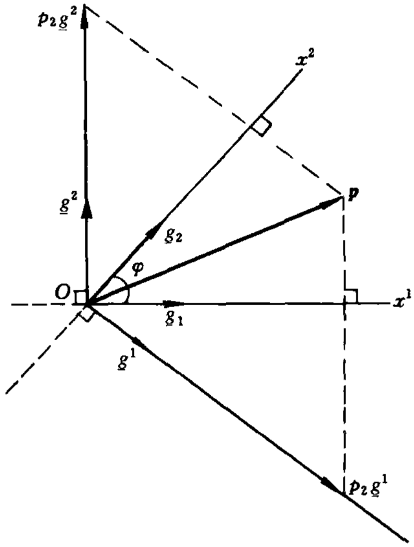


图 1-1　斜角直线坐标系的协变基和逆变基

为了区别$\underline{g}_1$ 和$\underline{g}_2$，$\underline{g}^1$ 和$\underline{g}^2$ 这两组基矢量，我们称沿坐标线的一组基矢量$\underline{g}_\alpha$ 为**协变基矢量**(covariant)，而称新引入的另一组基矢量$\underline{g}^\alpha$ 为**逆变基矢量**(contravariant)。任意一个矢量$\underline{p}$既可以按协变基分解，如式(1.1.1)所示，也可以按逆变基分解，即有

$$\underline{p}=p^\alpha\,\underline{g}_\alpha=p_\alpha\,\underline{g}^\alpha \tag{1.1.6}$$

以上是二维情况。对于三维斜角直线坐标系，设协变基是$\underline{g}_j$，则逆变基$\underline{g}^i$ 按下式引入：

$$\underline{g}^i\cdot\underline{g}_j=\delta^i_j \tag{1.1.7}$$

式中，δ^i_j 是三维 kronecker delta，其值为

$$\delta^i_j=\begin{cases}1, & 当\ i=j\\ 0, & 当\ i\neq j\end{cases} \tag{1.1.8}$$

任意一个三维矢量$\underline{p}$都可以在协变基和逆变基这两组基下分解：

$$\underline{p}=p^i\,\underline{g}_i=p_i\,\underline{g}^i \tag{1.1.9}$$

其中，矢量$\underline{p}$在协变基下的分量 p^i 称为矢量的**逆变分量**，在逆变基下的分量 p_i 称为矢量的**协变分量**。利用这两组基矢量，可以方便地表示矢量的任意分量，而且表达式和在笛卡儿直角坐标系中一样简单，见式(1.0.4)。事实上，把式(1.1.9)中的第一个等号的两端同时点乘逆变基$\underline{g}^i$，就有

$$\underline{p}\cdot\underline{g}^i=(p^j\,\underline{g}_j)\cdot\underline{g}^i=p^j(\underline{g}_j\cdot\underline{g}^i)=p^j\delta_j^i=p^i \tag{1.1.10a}$$

其中，第二个等号的左面表示和式$p^j\,\underline{g}_j$与逆变基矢量$\underline{g}^i$相点乘，右面表示和式$p^j\,\underline{g}_j$的每一项与$\underline{g}^i$点乘后再求和。第三个等式之所以成立是因为利用了式(1.1.7)。第四个等式之所以成立是因为利用了式(1.1.8)。这时，只有当$p^j\delta_j^i$中的哑指标$j=i$时，才有$\delta_j^i=1$(当$j=i$)，所以，结果等于p^i。当然，也可以认为$p^j\delta_j^i$是关于哑指标j的三项求和式，其中，只有当j等于i的项非零，所以有上述结果。类似地，把式(1.1.9)中的第二个等号的两端同时点乘协变基$\underline{g}_i$，就有

$$\underline{p}\cdot\underline{g}_i=p_j\,\underline{g}^j\cdot\underline{g}_i=p_j\delta_i^j=p_i \tag{1.1.10b}$$

把上两式写在一起，即

$$p^i=\underline{p}\cdot\underline{g}^i \quad 和 \quad p_i=\underline{p}\cdot\underline{g}_i \tag{1.1.11}$$

式(1.1.11)是任意矢量在两组对偶基下的分量表达式，它们和笛卡儿直角坐标系下的类似表达式(1.0.4)一样简单。

引进逆变基以后，还可以使矢量点积的形式简单。这只要把进行点积的两个矢量分别在协变基和逆变基中分解就可以了。例如

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=u_i\,\underline{g}^i\cdot v^j\,\underline{g}_j=u_iv^j\,\underline{g}^i\cdot\underline{g}_j=u_iv^j\delta_j^i=u_iv^i \tag{1.1.12a}$$

注意，第二个等号的左端是两个求和式相乘，右端写出了经逐项相乘后的通项。类似地还有

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=u^i\,\underline{g}_i\cdot v_j\,\underline{g}^j=u^iv_j\,\underline{g}_i\cdot\underline{g}^j=u^iv_j\delta_i^j=u^iv_i \tag{1.1.12b}$$

式(1.1.12)表明，使用互为对偶的协变基和逆变基以后，矢量点积的形式和在笛卡儿直角坐标系下一样简单，见式(1.0.5)。

通过本节的讨论可以看出，在笛卡儿直角坐标系中，之所以矢量点积的坐标表达式具有简单的形式，其原因在于笛卡儿直角坐标系具有基矢量正交归一的特性。对于基矢量不相互正交的一般坐标系，矢量点积的坐标表达式就复杂了，而克服的方法是采用两套基矢量。沿坐标轴的基矢量称为协变基矢量，按式(1.1.7)引入的基矢量称为逆变基矢量。它们之间满足正交归一关系。

小　结

1. 如果坐标轴之间的夹角不是直角，那么，矢量展开和矢量点乘就没有了在直角坐标系中那样简洁的坐标表达式了。克服的方法是采用两套基矢量。沿坐标轴的基矢量称为协变基矢量，按式(1.1.7)引入的基矢量称为逆变基矢量。

2. 协变基矢量沿坐标轴这一点是与原来概念的基矢量相同的，但区别是，协变基矢量不一定是单位长，甚至允许有量纲。相应地，逆变基矢量也不一定是单位长，

也允许有量纲。

3. 直角坐标系的协变基矢量和逆变基矢量重合，即有

$$\underline{g}_1=\underline{g}^1=\underline{i},\quad \underline{g}_2=\underline{g}^2=\underline{j},\quad \underline{g}_3=\underline{g}^3=\underline{k}$$

4. 因为每一个坐标系都有两套基矢量，任意矢量可以在这两套基矢量中分别展开，所以任意矢量$\underline{p}$有两个展开式：

$$\underline{p}=p^i\underline{g}_i=p_i\underline{g}^i$$

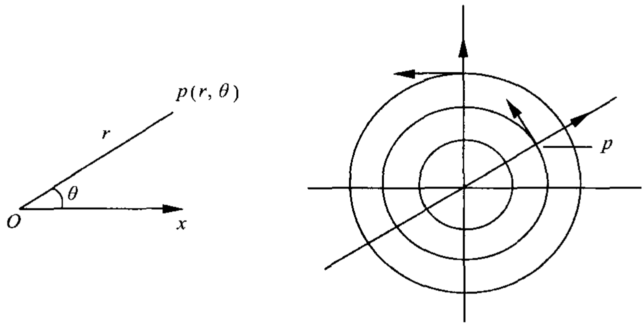
其中，$p^i=\underline{p}\cdot\underline{g}^i$，　$p_i=\underline{p}\cdot\underline{g}_i$

5. 相应地，矢量点乘运算也有两种简洁的表达式，它们是

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=u_iv^i=u^iv_i$$

1.2　曲线坐标系的基矢量

曲线坐标系的一个简单例子是极坐标系，见图 1-2。



(a) 矢径与极角　　(b) 坐标线

图 1-2　极坐标系

在图 1.2(a)中，O 是极点，Ox 是极轴。对于任意点 $p(r,\theta)$，坐标 r 称为矢径，θ 是极角。θ 从极轴开始，逆时针转动为正，顺时针转动为负。如果固定矢径不变，而连续变动极角，可以得到一个圆。如果固定极角不变，而连续变动矢径，则得到一条射线。这个圆和射线就是通过 p 点的两条坐标线。

对于极坐标系，一族共点射线和一族以该点为圆心的同心圆构成两组坐标线。它们布满整个平面。相应地，平面上任意一点都有其中的一根射线和一个同心圆经过，它们是通过该点的两条坐标线。

一般说来，对于一个数学物理问题，总可以选择三个独立参数来描述点在三维空间中的位置。这样的独立参数称为点在三维空间中的**坐标**。坐标与点是一一对应的。令三个参数中的某一个连续变动其值，而另外两个保持不变，则该点将描出一条轨迹曲线，称该轨迹曲线为坐标线。因为有三个独立参数，所以，通过三维空间的每

一点必有三根不共面的坐标线。一般情况下，坐标线是曲线。当三个参数中的一个保持不变，而其余两个参数连续变动其值，则所形成的点的集合就构成坐标面。通过三维空间的每一点必有三个坐标面。一般情况下，坐标面是曲面。

在三维空间中取一定点 O。从定点 O 出发，指向 p 点的矢量 $\underline{R}$，称为 p 点的**位置矢量**或**矢径**。考虑点 $p(x^1, x^2, x^3)$ 附近的矢径微段 $\mathrm{d}\,\underline{R}$。显然，有

$$\mathrm{d}\,\underline{R} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \tag{1.2.1}$$

式(1.2.1)分母中的上标表示整个分式的下标，所以，满足约定求和的指标规定。i 是哑指标。式(1.2.1)中的偏导数 $\frac{\partial \underline{R}}{\partial x^i}$ 是经过 p 点的三个矢量，它们沿坐标线 x^i 的切线方向，且指向坐标增加的一侧。我们选择 $\frac{\partial \underline{R}}{\partial x^i}$ 作为点 p 附近的曲线坐标系的协变基矢量，即令

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{R}}{\partial x^i} \tag{1.2.2}$$

因为经过 p 点的三根坐标曲线不共面，所以，这样定义的三个协变基矢量也不共面。此外，选择 $\underline{g}_1$，$\underline{g}_2$ 和 $\underline{g}_3$ 的顺序，使之构成右手系，这就要求

$$[\underline{g}_1\ \underline{g}_2\ \underline{g}_3] > 0 \tag{1.2.3}$$

式中，符号 $[\underline{a}\underline{b}\underline{c}] = \underline{a} \cdot \underline{b} \times \underline{c}$ 表示矢量 $\underline{a}$，$\underline{b}$ 和 $\underline{c}$ 所构成的体积，称为**混合积**。按式(1.2.2)和式(1.2.3)定义的协变基矢量也称为**自然基**矢量。由式(1.2.1)和式(1.2.2)知

$$\mathrm{d}\,\underline{R} = \underline{g}_i \mathrm{d}x^i \tag{1.2.4}$$

它说明，这样定义的协变基矢量保证了 $\mathrm{d}\,\underline{R}$ 是矢径的全微分。与斜角直线坐标系类似，我们同样可以依照式(1.1.7)定义曲线坐标系的逆变基矢量 $\underline{g}^i$。

显然，斜角直线坐标系中的相应公式(1.1.9)～式(1.1.12)对于这里的曲线坐标系仍然适用。所不同的只是在曲线坐标系中，基矢量的大小和方向都随点的位置变化而变化，基矢量是点的位置的函数，即有 $\underline{g}_i = \underline{g}_i(x^1, x^2, x^3)$，$\underline{g}^i = \underline{g}^i(x^1, x^2, x^3)$。它不像直线坐标系那样空间各点处的基矢量都相同，并不随点的位置变化。所以，曲线坐标系是**局部坐标系**，而直线坐标系是**整体坐标系**。我们知道，任何矢量型的物理量(例如，力、速度等)总是附着在空间某个确定的点上的。例如，对于力来说，这个点就是它的作用点。对于流场中的流速，这个点就是某一特定的空间位置。对于线元 $\mathrm{d}\,\underline{s}$，这个点就是假定该无限小量收敛到零的那个点。在曲线坐标系中，对于任何矢量都必须明确这样一个点。相应的基矢量就取自这一点。所谓矢量的分解，就是指

按该点处的基矢量进行分解。

为了说明当曲线坐标系给定以后，如何确定某一点处的基矢量，我们看下面的例题。

例 1-1 设有圆柱坐标系（图 1-3），令 $r=x^1$，$\theta=x^2$，$z=x^3$，求任意点 p 处的协变基矢量$\underline{g}_i$。

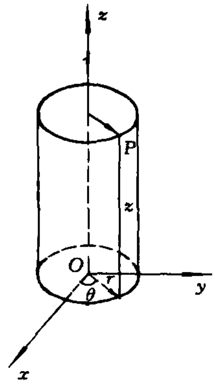


图 1-3 圆柱坐标系

解 曲线坐标系的协变基矢量有定义式（1.2.2）。对于圆柱坐标系，坐标为(r,θ,z)的任意点的位置矢量是$\underline{R}=r\cos\theta\,\underline{i}+r\sin\theta\,\underline{j}+z\,\underline{k}$。所以

$$\begin{aligned}\underline{g}_1&=\frac{\partial \underline{R}}{\partial x^1}=\frac{\partial \underline{R}}{\partial r}=\cos\theta\,\underline{i}+\sin\theta\,\underline{j}\\ \underline{g}_2&=\frac{\partial \underline{R}}{\partial x^2}=\frac{\partial \underline{R}}{\partial \theta}=-r\sin\theta\,\underline{i}+r\cos\theta\,\underline{j}\\ \underline{g}_3&=\frac{\partial \underline{R}}{\partial x^3}=\frac{\partial \underline{R}}{\partial z}=\underline{k}\end{aligned}\qquad(1.2.5)$$

小　结

1. 曲线坐标系是局部坐标系。在局部坐标系中，每一点的基矢量都不同。基矢量是点的函数。例如，在图 1-2(b)所示的极坐标系中，不同的两点处有不同的协变基矢量。

2. 选择$\underline{g}_i=\dfrac{\partial \underline{R}}{\partial x^i}$作为曲线坐标系在 p 点处的协变基矢量，其中，$\underline{R}$是 p 点的位置矢量或矢径。$\underline{g}_i$ 沿坐标线 x^i 的切线方向，指向坐标增加的一侧。$\underline{g}_i$ 可以不是单位长，可以有量纲。

1.3 坐标变换与基变换

为了讨论坐标变换，假设除了已经建立的坐标系 x^i 以外，再引入一组“新”坐标系 $x^{i'}$，其中 i'仍然取值 1,2,3。加上撇号只不过表示它们是新坐标系中的指标，以示与原坐标系中的指标 i 有所区别而已。

从坐标系 x^i 到 $x^{i'}$ 的坐标变换用下式表示：

$$x^{i'}=x^{i'}(x^1,x^2,x^3)=x^{i'}(x^j)\qquad(1.3.1)$$

其中，$x^{i'}$ 作为 x^j 的函数有所需要的各阶连续导数，且变换的雅可比式不等于零：

$$\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right|\neq0\qquad(1.3.2)$$

因而式（1.3.1）有逆变换

$$x^i = x^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = x^i(x^{j'}) \tag{1.3.3}$$

下面讨论**基变换**。这两组坐标系有各自的基矢量，当然它们的基矢量之间也存在转换关系，称**基变换**。

设老坐标系 x^i 的协变基和逆变基是$\underline{g}_i$ 和$\underline{g}^i$；新坐标系 $x^{i'}$ 的协变基和逆变基是$\underline{g}_{i'}$和$\underline{g}^{i'}$。当然可以把新坐标系的每一个协变基在老坐标系的协变基中分解，写成

$$\underline{g}_{i'} = \beta_{i'}^{j}\underline{g}_j \tag{1.3.4}$$

式(1.3.4)与式(1.1.9)类似。其中，i'是自由指标，代表三个式子，分别是三个新协变基$\underline{g}_{i'}$在老协变基中的分解式。j 是哑指标，表示三项求和。变换系数 $\beta_{i'}^{j}$称为**协变变换系数**，由九个数组成。注意，式(1.3.4)中等号两端的自由指标是平衡的，即指标符号相同且上下位置相同。在张量指标系统中，这是必须保证的。

类似地，也可以把新坐标系的逆变基在老坐标系的逆变基中分解，写成

$$\underline{g}^{i'} = \beta_j^{i'}\underline{g}^j \tag{1.3.5}$$

变换系数 $\beta_j^{i'}$ 称为**逆变变换系数**，也由九个数组成。

由于在新坐标系中存在关系$\underline{g}_{i'} \cdot \underline{g}^{k'} = \delta_{i'}^{k'}$，将式(1.3.4)和式(1.3.5)代入，得

$$\delta_{i'}^{k'} = \underline{g}_{i'} \cdot \underline{g}^{k'} = \beta_{i'}^{j}\underline{g}_j \cdot \beta_l^{k'}\underline{g}^l = \beta_{i'}^{j}\beta_l^{k'}\underline{g}_j \cdot \underline{g}^l = \beta_{i'}^{j}\beta_l^{k'}\delta_j^l \tag{1.3.6}$$

式(1.3.6)中的最后一个等号成立是因为在老坐标系中也存在关系$\underline{g}_i \cdot \underline{g}^j = \delta_i^j$。在最右端项中，$l$ 是哑指标，表示约定求和。由于只有当 l 取值为 j 时，$\delta_j^l = 1$，其余均为零，所以，式(1.3.6)也可以继续写成 $\beta_{i'}^{j}\beta_j^{k'}$。当然，也可以在最右端项中对 j 求和，得到 $\beta_{i'}^{l}\beta_l^{k'}$。这两个结果是相同的。最终有

$$\beta_{i'}^{j}\beta_j^{k'} = \delta_{i'}^{k'} \tag{1.3.7}$$

式(1.3.7)有两个自由指标 i'和 k'，表示有 $3^2 = 9$ 个方程。这说明，可以求解九个未知数。通常的情况是，知道一组变换系数，例如，式(1.3.4)中的协变变换系数 $\beta_{i'}^{j}$，就可以求出式(1.3.5)中的另一组逆变变换系数 $\beta_j^{k'}$。反之亦然。事实上，如果我们把变换系数的九个数按矩阵排列，其中，下指标表示行，上指标表示列，则式(1.3.7)可以写成

$$\begin{bmatrix} \beta_{1'}^1 & \beta_{1'}^2 & \beta_{1'}^3 \\ \beta_{2'}^1 & \beta_{2'}^2 & \beta_{2'}^3 \\ \beta_{3'}^1 & \beta_{3'}^2 & \beta_{3'}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'} \\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'} \\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3.8}$$

这个矩阵乘法和张量约定求和式(1.3.7)中的乘法规则相同。它说明关于“下指标表示行，上指标表示列”的规定是合理的。式(1.3.8)表示，由 $\beta_{i'}^{j}$ 和 $\beta_j^{k'}$ 组成的系数矩阵互为逆矩阵。

以上讨论的是，新基用老基表示。反过来，老基也可以用新基表示。先推导老协变基在新协变基中的分解式。为此，用 $\beta^{i'}_{k}$ 乘式(1.3.4)两端，得

$$\beta^{i'}_{k}\underline{g}_{i'}=\beta^{i'}_{k}\beta^{j}_{i'}\underline{g}_{j} \tag{1.3.9}$$

再看式(1.3.8)，因为左端两个矩阵互为逆矩阵，所以可以交换位置，得到下述关系式：

$$\begin{bmatrix}\beta^{1'}_{1} & \beta^{2'}_{1} & \beta^{3'}_{1}\\ \beta^{1'}_{2} & \beta^{2'}_{2} & \beta^{3'}_{2}\\ \beta^{1'}_{3} & \beta^{2'}_{3} & \beta^{3'}_{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^{1}_{1'} & \beta^{2}_{1'} & \beta^{3}_{1'}\\ \beta^{1}_{2'} & \beta^{2}_{2'} & \beta^{3}_{2'}\\ \beta^{1}_{3'} & \beta^{2}_{3'} & \beta^{3}_{3'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.3.10}$$

此式可以写成

$$\beta^{i'}_{k}\beta^{j}_{i'}=\delta^{j}_{k} \tag{1.3.11}$$

把式(1.3.11)代入式(1.3.9)，就得到

$$\underline{g}_{k}=\beta^{i'}_{k}\underline{g}_{i'} \tag{1.3.12}$$

这就是老协变基按新协变基分解的表达式。再用 $\beta^{j}_{i'}$ 乘式(1.3.5)的两端，同时把式(1.3.5)右端的哑指标 j 换成 k，得

$$\beta^{j}_{i'}\underline{g}^{i'}=\beta^{j}_{i'}\beta^{i'}_{k}\underline{g}^{k} \tag{1.3.13}$$

把式(1.3.11)代入，可得

$$\underline{g}^{j}=\beta^{j}_{i'}\underline{g}^{i'} \tag{1.3.14}$$

这就是老逆变基按新逆变基分解的表达式。

可以看出，在新老坐标系的四个基变换的表达式中，只需要两个变换系数$\beta^{j}_{i'}$和$\beta^{i'}_{j}$。这两组变换系数又通过式(1.3.7)相互联系，所以，只要一组变换系数就足够了。带撇(′)的指标是下指标者叫协变变换系数，带撇(′)的指标是上指标者叫逆变变换系数。现在介绍它们的求法。

根据协变基矢量的定义式(1.2.2)，老坐标系的协变基是$\underline{g}_{i}=\dfrac{\partial \underline{R}}{\partial x^{i}}$，新坐标系的协变基是$\underline{g}_{i'}=\dfrac{\partial \underline{R}}{\partial x^{i'}}$。由于新老坐标系之间存在变换关系式(1.3.1)和式(1.3.3)，利用复合函数的求导公式，有

$$\underline{g}_{i'}=\frac{\partial \underline{R}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial \underline{R}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}}\underline{g}_{j} \tag{1.3.15}$$

将此式与式(1.3.4)比较，又因为协变基$\underline{g}_{j}$ 的线性无关性，所以

$$\beta_{i'}^{j}=\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}} \tag{1.3.16}$$

同理,可得

$$\beta_{j}^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} \tag{1.3.17}$$

上两式中,i'和 j 均为自由指标,故各自对应有 $3^2=9$ 个关系式。

下面,通过一个例子来说明变换系数的具体求法。

例 1-2 设在三维空间中同时设立一个圆柱坐标系(r,θ,z)和一个笛卡儿直角坐标系$(Oxyz)$。任意一点 p 的坐标 r,θ,z 和 x,y,z 之间满足如下关系:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z \tag{1.3.18}$$

求变换系数。

解 不妨把圆柱坐标系看作老坐标系,即

$$x^{1}=r,\quad x^{2}=\theta,\quad x^{3}=z$$

而把笛卡儿直角坐标系看作新坐标系,即

$$x^{1'}=x,\quad x^{2'}=y,\quad x^{3'}=z$$

所以,逆变变换系数 $\beta_{j}^{i'}$ 可以根据式(1.3.17)求出:

$$\beta_{1}^{1'}=\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\quad \beta_{1}^{2'}=\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\quad \beta_{1}^{3'}=\frac{\partial z}{\partial r}=0$$

$$\beta_{2}^{1'}=\frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\sin\varphi,\quad \beta_{2}^{2'}=\frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\varphi,\quad \beta_{2}^{3'}=\frac{\partial z}{\partial \theta}=0$$

$$\beta_{3}^{1'}=\frac{\partial x}{\partial z}=0,\quad \beta_{3}^{2'}=\frac{\partial y}{\partial z}=0,\quad \beta_{3}^{3'}=\frac{\partial z}{\partial z}=1 \tag{1.3.19}$$

又由式(1.3.18),有

$$r=\sqrt{x^{2}+y^{2}},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

从而协变变换系数 $\beta_{i'}^{j}$ 为

$$\beta_{1'}^{1}=\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta,\quad \beta_{1'}^{2}=\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r},\quad \beta_{1'}^{3}=\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\beta_{2'}^{1}=\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta,\quad \beta_{2'}^{2}=\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r},\quad \beta_{2'}^{3}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\beta_{3'}^{1}=\frac{\partial r}{\partial z}=0,\quad \beta_{3'}^{2}=\frac{\partial \theta}{\partial z}=0,\quad \beta_{3'}^{3}=\frac{\partial z}{\partial z}=1 \tag{1.3.20}$$